

ТЕПЛО- И МАССОБМЕН В СИСТЕМЕ ПЛОСКИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДИФфуЗИОННОГО ГОРЕНИЯ

Ф. АЛИЕВ

(Ленинград)

Рассматривается турбулентное движение заранее перемешанных химически активных газов в бесконечной системе плоских турбулентных струй при наличии диффузионного горения. Предлагаемый метод расчета позволяет определить распределение всех параметров в зоне смешения, в том числе и продольного давления. Приведены численные примеры расчета горения водорода в воздухе.

Исследование процессов тепло- и массообмена в струйных течениях представляет в настоящее время большие трудности. Поэтому все существующие методы расчета струйных течений при наличии тепло- и массообмена и химических процессов [1-5] основываются на обобщении известных полуэмпирических теорий свободной турбулентности на указанные более сложные случаи течения при наличии химических реакций.

Настоящая работа в этом смысле не исключение, она посвящена изучению движения в бесконечной системе плоских турбулентных струй при наличии диффузионного горения.

1. Постановка задачи. Рассматривается течение, образующееся в зоне смешения бесконечной системы турбулентных струй, истекающих из плоских сопел шириной $2a$ каждое (фиг. 1). Пусть из одного сопла 1 вытекает окислитель, а из соседнего сопла 2 горючее. Условия на выходе из сопел будем считать однородными, так что во всей правой полуплоскости будет иметь место периодическое течение с периодом $4a$.

Для упрощения расчетов будем в дальнейшем предполагать, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны единице, хотя хорошо известно, что эти числа ближе к 0,5, чем к 1.

Основные уравнения, описывающие осредненное стационарное движение и процессы переноса в такой системе струй в предположении, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны единице, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, & \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \varepsilon \frac{\partial H}{\partial y} \right) & \left(H = c_p T + \sum_{i=1}^N c_i h_i^* + \frac{u^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \varepsilon \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + w_i, \quad c_p = \sum_{i=1}^N c_i c_{pi}$$

$$p = \rho \frac{R_0}{m} T, \quad m = \left[\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i} \right]^{-1} \quad (1.2)$$

Здесь x , y и u , v — соответственно продольные и поперечные координаты и скорости, ρ — плотность, p — давление, m — молекулярный вес,

c_p — теплоемкость при постоянном давлении, H — полная энтальпия смеси, ϵ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости, c_i — массовая концентрация, w_i — массовая скорость образования в единице объема, h_i^* — теплота образования, c_{pi} — теплоемкость при постоянном давлении, m_i — молекулярный вес i -го компонента, R_0 — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура, N — число компонентов.

Условия, при которых надо решить систему уравнений (1.1), запишем в виде

$$Z(0, y) = Z_- \left[\frac{1 + (-1)^n}{2} \right] + Z_+ \left[\frac{1 - (-1)^n}{2} \right], \quad Z = U, H, c_i \quad (1.3)$$

$$(2n - 1)a \leq y \leq (2n + 1)a. \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots)$$

Здесь U — скорость на выходе, индексы плюс и минус означают соответственно значения на выходе из сопел 1 и 2.

Кроме условий (1.3), должны выполняться следующие интегральные условия сохранения полного количества движения, массы и полной энтальпии смеси между двумя параллельными осями (например, между осями $y = 0$ и $y = 2a$):

$$\int_0^{2a} (p + \rho u^2) dy = I_0$$

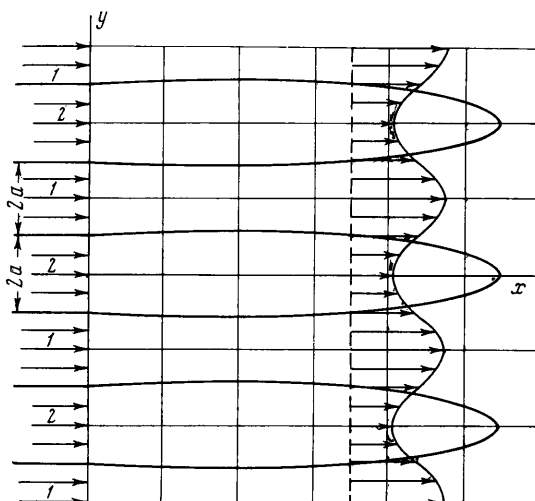
$$\int_0^{2a} \rho u dy = M_0$$

$$\int_0^{2a} H \rho u dy = H_0$$

$$(I_0, M_0, H_0 = \text{const}) \quad (1.4)$$

2. Решение уравнения движения. Введем функцию тока ψ , определяемую равенствами

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Схема течения в бесконечной системе плоских струй при наличии диффузионного фронта пламени

Уравнение неразрывности будет удовлетворено тождественно. Далее перейдем во втором уравнении системы (1.1) от переменных x, y , к переменным Мизеса ξ, ψ в соответствии с формулами перехода [6]

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (2.2)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{1}{\rho u} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho^2 \epsilon u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \quad (2.3)$$

Как было отмечено выше, отсутствие общей теории турбулентности не позволило до настоящего времени установить рациональное выражение для коэффициента турбулентного перемешивания ϵ . Поэтому в большин-

стве существующих работ используются те или иные допущения относительно ε . В частности, в работе Тинга и Либби [7] вводится следующее соотношение:

$$\varepsilon = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \varepsilon_0 \quad (2.4)$$

где ρ_0 — некоторая характерная плотность, а ε_0 — кинематический коэффициент турбулентной вязкости несжимаемой жидкости. Формула (2.4) нашла свое применение в работах [8, 10]. В работе Либби [4] используется модифицированная к осесимметричному движению гипотеза Магера [9] для расчета горения водородной струи в спутном потоке воздуха. В обзорной статье Ферри [3] указывается на возможность предположения, что произведение $\rho\varepsilon$ — функция только продольной координаты.

Ниже также предполагается:

$$a) \quad \rho\varepsilon = \sigma(\xi) \quad \text{или} \quad б) \quad \rho^2\varepsilon = \sigma(\xi) \quad (2.5)$$

Принимая во внимание равенства (2.5), произведем линеаризацию уравнения (2.3), заменив соответственно величины ρu и u , входящие в правую часть уравнения, среднеарифметическим осевых значений этих величин

$$a) \quad \rho u = 1/2[(\rho u)_d + (\rho u)_b] = f(\xi), \quad б) \quad u = 1/2(u_d + u_b) = f(\xi) \quad (2.6)$$

Здесь индексы d и b означают соответственно на осях струи горючего и струи окислителя.

В этом случае уравнение (2.3) преобразуется к линейному уравнению типа теплопроводности:

$$\frac{\partial P'}{\partial \xi'} = \frac{\partial^2 P'}{\partial \psi'^2} \quad (2.7)$$

Здесь

$$\xi' = \frac{1}{a^2(\rho_+ U_+)^2} \int_0^{\xi} \sigma(\xi) f(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

$$P' = u' + 2 \int_0^{\xi'} \left[\frac{1}{(\rho' u')_d + (\rho' u')_b} \frac{\partial p'}{\partial \xi'} \right] d\xi'$$

$$u' = \frac{u}{U_+}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_+}, \quad p' = \frac{p}{\rho_+ U_+^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{a \rho_+ U_+} \quad (2.9)$$

Условие (1.3) для уравнения (2.7) примет вид

$$P'(0, \psi') = P'_- \left[\frac{1 + (-1)^n}{2} \right] + \left[\frac{1 - (-1)^n}{2} \right] \quad \text{при} \quad \psi'_1 \leq \psi' \leq \psi'_2 \quad (2.10)$$

где

$$\psi'_1 = \left[n - \frac{1 + (-1)^n}{2} \right] \frac{\rho_- U_-}{\rho_+ U_+} + \left[n - \frac{1 - (-1)^n}{2} \right]$$

($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\psi'_2 = \left[n + \frac{1 + (-1)^n}{2} \right] \frac{\rho_- U_-}{\rho_+ U_+} + \left[n + \frac{1 - (-1)^n}{2} \right] \quad (2.11)$$

Учитывая, что область изменения ψ' простирается от $-\infty$ до $+\infty$, запишем решение уравнения (2.7), удовлетворяющее условию (2.10), в виде [11]

$$P'(\xi', \psi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\xi'}} \int_{-\infty}^{\infty} P'(\xi', \psi'') \exp\left[-\frac{\psi' - \psi''}{4\xi'}\right] d\psi'' \quad (2.12)$$

Имея в виду однородность начальных условий на выходе из сопел, разделим область $(-\infty, +\infty)$ на участки $\psi_1' \leq \psi' \leq \psi_2'$, в пределах которых $P'(0, \psi')$ имеет постоянное значение. Тогда совершая несложные преобразования, приведем равенство (2.12) к виду

$$P'(\xi', \psi') = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[P_{-}' \frac{1 + (-1)^n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{2} \right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf} \frac{\psi' - \psi_1'}{2\sqrt{\xi'}} - \operatorname{erf} \frac{\psi' - \psi_2'}{2\sqrt{\xi'}} \right], \quad \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-t^2) dt \quad (2.13)$$

3. Определение профилей полной энтальпии и концентрации. Третье уравнение системы (1.1) в переменных Мизеса имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho^2 \epsilon u \frac{\partial H}{\partial \psi} \right) \quad (3.1)$$

Используя равенства (2.5) и (2.6), нетрудно убедиться в существовании следующего соотношения между полной энтальпией $H' = H/H_+$ и функцией P' :

$$\frac{1 - P'}{1 - P_{-}'} = \frac{1 - H'}{1 - H_{-}'}, \quad \text{или} \quad H' = 1 - (1 - H_{-}') \frac{1 - P'}{1 - P_{-}'} \quad (3.2)$$

В дальнейшем для удобства будем рассматривать смесь газов в зоне смешения как четырехкомпонентную, состоящую из окислителя 1, горючего 2, продукта 3 и инертного газа 4.

Условие стехиометрического соотношения между реагентами и продуктом реакции имеет вид

$$w_k \nu_3 m_3 + w_3 \nu_k m_k = 0 \quad (3.3)$$

Здесь ν — число молекул, вступающих в реакцию. Из четвертого уравнения системы (1.1) получим

$$\rho u \frac{\partial C_k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon \frac{\partial C_k}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

$$C_k = c_k \nu_3 m_3 + c_3 \nu_k m_k \quad (k = 1, 2) \quad (3.5)$$

Из подобия уравнений для C_k и полной энтальпии и соответствующих граничных условий следуют соотношения:

$$\frac{(C_k)_+ - C_k}{(C_k)_+ - (C_k)_-} = \frac{1 - H'}{1 - H_{-}'} = \frac{1 - P'}{1 - P_{-}'} \quad (3.6)$$

Отсюда

$$C_k = (C_k)_+ - [(C_k)_+ - (C_k)_-] (1 - P') / (1 - P'_-) \quad (3.7)$$

Здесь

$$(C_1)_+ = (c_1)_+ v_3 m_3, \quad (C_1)_- = 0, \quad (C_2)_+ = 0, \quad (C_2)_- = (c_2)_- v_3 m_3$$

Для распределения концентрации инертного газа C_4 нетрудно получить следующее соотношение, аналогичное равенству (3.7)

$$c_4 = (c_4)_+ - [(c_4)_+ - (c_4)_-] (1 - P') / (1 - P'_-) \quad (3.8)$$

Вследствие периодичности и симметричности движения относительно центральной оси произвольной струи достаточно рассмотреть канал между какими-нибудь двумя центральными осями, например между осями $\psi' = \psi'_a = 0$ и $\psi' = \psi'_b$, которые будут линиями тока.

Предположим, далее, что горение является диффузионным, т. е. химическая реакция происходит только на бесконечно тонкой поверхности (фронте пламени), где выполняются стехиометрические соотношения (3.3) и выгорает все поступившее количество горючего и окислителя. Поэтому с одной стороны фронта пламени будет равно нулю концентрация окислителя, а с другой стороны — концентрация горючего. В области между фронтом пламени и границей канала ($0 \leq \psi' \leq \psi'_b$) $c_1 = 0$ (здесь и далее индекс * означает значение на фронте), а из соотношений (3.5) и (3.7) можно найти

$$c_2 = \left[(c_2)_- + \frac{v_2 m_2}{v_1 m_1} (c_1)_+ \right] \frac{1 - P'}{1 - P'_-} - \frac{v_2 m_2}{v_1 m_1} (c_1)_+ \quad (3.9)$$

$$c_3 = \frac{v_3 m_3}{v_1 m_1} (c_1)_+ \left[1 - \frac{1 - P'}{1 - P'_-} \right] \quad (3.10)$$

В области между фронтом пламени и другой границей канала ($\psi'_* \leq \psi' \leq \psi'_b$) концентрация горючего равна нулю $c_2 = 0$. Из соотношений (3.5) и (3.7) определяется концентрация окислителя и продукта реакции

$$c_1 = (c_1)_+ - \left[(c_1)_+ + \frac{v_1 m_1}{v_2 m_2} (c_2)_- \right] \frac{1 - P'}{1 - P'_-} \quad (3.11)$$

$$c_3 = \frac{v_3 m_3}{v_2 m_2} (c_2)_- - \frac{1 - P'}{1 - P'_-}$$

На поверхности фронта пламени концентрация горючего и окислителя равна нулю, поэтому из (3.5) находим на фронте

$$(C_1)_* = (c_3)_* v_1 m_1, \quad (C_2)_* = (c_3)_* v_2 m_2 \quad (3.12)$$

При помощи этих соотношений из (3.7) найдем (3.13)

$$\frac{1 - P'_*}{1 - P'_-} = \frac{(c_1)_+ v_2 m_2}{(c_1)_+ v_2 m_2 + (c_2)_- v_1 m_1} \quad \text{или} \quad P'_* = \frac{(c_2)_- v_1 m_1 + (c_1)_+ v_2 m_2 P'_-}{(c_2)_- v_1 m_1 + (c_1)_+ v_2 m_2}$$

Последнее выражение показывает, что положение фронта пламени определяется только начальными значениями параметров. Точки плоскости $\xi' \psi'$, в которых выполняется условие $P'(\xi', \psi') = P'_*$, образуют поверхность фронта пламени.

4. Определение профилей скорости, температуры, давления и плотности. Из выражения для энтальпии (1.2) найдем связь температуры со скоростью

$$T' = \frac{T'}{T_+} = \frac{(c_p)_+}{c_p} \left[H' - \sum_{i=1}^4 c_i \frac{h_i^*}{H_+} - \frac{U_+^2}{H_+} \frac{u'^2}{2} \right] \quad (4.1)$$

а из уравнения состояния и равенства (4.1) получим соотношение для плотности

$$\rho' = \frac{U_+^2}{T_+ R_0} m c_p p' (c_p)_+^{-1} \left[H' - \sum_{i=1}^4 c_i \frac{h_i^*}{H_+} - \frac{U_+^2}{H_+} \frac{u'^2}{2} \right]^{-1} \quad (4.2)$$

Подставляя выражение для ρ' в интегральное условие сохранения полного количества движения (первое условие системы (1.4)), преобразованное к виду

$$\int_0^{\psi_b'} u' d\psi' + p' \int_0^{\psi_b'} \frac{d\psi'}{\rho' u'} = \frac{I_0}{\alpha \rho_+ U_+^2} \quad (4.3)$$

получаем следующее соотношение:

$$\int_0^{\psi_b'} u' d\psi' + \frac{R_0 T_+ (c_p)_+}{U_+^2} \int_0^{\psi_b'} \left(H' - \sum_{i=1}^N c_i \frac{h_i^*}{H_+} - \frac{U_+^2}{H_+} \frac{u'^2}{2} \right) \frac{d\psi'}{c_p m u'} = \frac{I_0}{\alpha \rho_+ U_+^2} \quad (4.4)$$

Пользуясь зависимостью (2.9), согласно которой u' отличается от функции $P'(\xi', \psi')$ на слагаемое, постоянное по сечению, из (4.4) можно определить скорость u' . Расчет u' удобнее всего производить графическим способом.

После определения скорости температура легко определяется из равенства (4.1).

Далее продифференцируем равенство (2.9) по ξ'

$$\frac{\partial P'}{\partial \xi'} - \frac{\partial u'}{\partial \xi'} = \frac{2}{(\rho' u')_d + (\rho' u')_b} \frac{\partial p'}{\partial \xi'}$$

и подставим сюда выражение ρ' из уравнения состояния. Тогда получим

$$\frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial \xi} = \frac{U_+^2}{2 R_0 T_+} \left[\left(\frac{m u'}{T'} \right)_d + \left(\frac{m u'}{T'} \right)_b \right] \left(\frac{\partial P'}{\partial \xi'} - \frac{\partial u'}{\partial \xi'} \right)$$

Производя интегрирование, будем иметь

$$p' = p_0' \exp \left\{ - \frac{U_+^2}{2 R_0 T_+} \int_0^{\xi'} \left[\left(\frac{m u'}{T'} \right)_d + \left(\frac{m u'}{T'} \right)_b \right] \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi'} - \frac{\partial P'}{\partial \xi'} \right) d\xi' \right\} \quad (4.5)$$

где p_0 — давление на выходе, одинаковое для обеих струй.

Далее, подставляя значение p' в равенство (4.2), определим плотность ρ' .

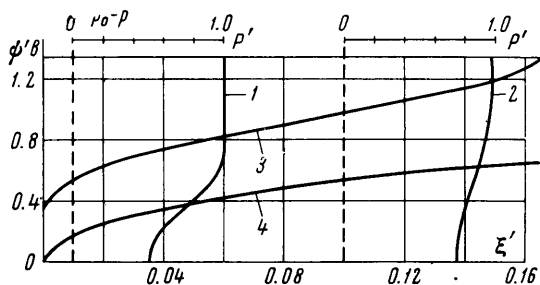
Таким образом, все искомые величины u' , T' , p' , ρ' оказываются определенными в плоскости $\xi'\psi'$.

Нетрудно убедиться, что последние два условия системы (1.4) удовлетворяются в каждом сечении.

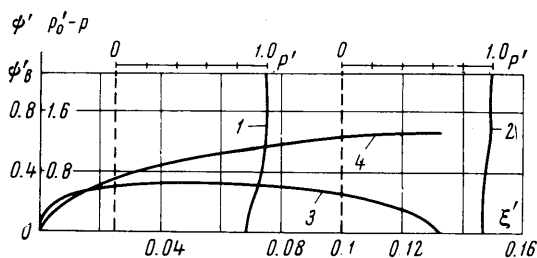
5. Переход из плоскости $\xi'\psi'$ в физическую плоскость xu . Переход от обобщенных переменных Мизеса к переменным x, u может быть произведен по формулам

$$y' = \frac{y}{2a} = \frac{1}{2} \int_0^{\psi'} \frac{d\psi'}{\rho' u'}, \quad x' = \frac{x}{2a} = \frac{a(\rho_+ U_+)^2}{2} \int_0^{\xi'} \frac{d\xi'}{\sigma(\xi') f(\xi')} \quad (5.1)$$

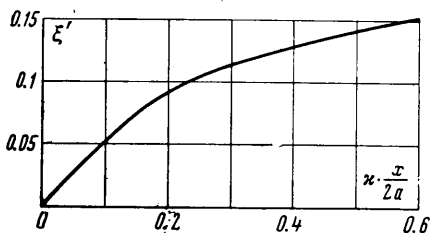
Первая формула получается из второго равенства системы (2.2), вторая из соотношения (2.8). Как видно из этого последнего равенства, переход от переменной ξ' к x' требует задания выражения для $\sigma(\xi')$.



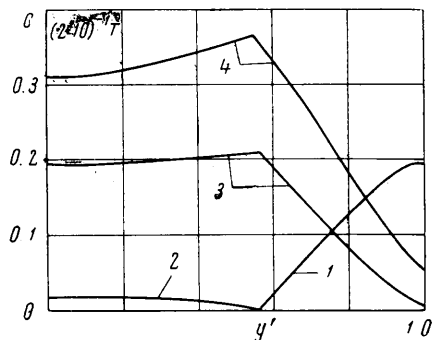
Фиг. 2. Профили функции $P'(\xi', \psi')$ в сечениях $\xi' = 0.01$ (1), $\xi' = 0.1$ (2), форма фронта пламени 3 и изменение разности давления 4 при $\alpha = 0.241$



Фиг. 3. Профили функции $P'(\xi', \psi')$ в сечениях $\xi' = 0.025$ (1), $\xi' = 0.1$ (2), форма фронта пламени 3 и изменение разности давления 4 при $\alpha = 1.668$



Фиг. 4. Связь между переменными ξ' и $x/2a$ при $\alpha = 0.241$



Фиг. 5. Профили концентрации окислителя 1 горючего 2, продукта 3 и температуры 4 в сечении $x/2a = 4.5$ при $\alpha = 1.668$

6. **Пример расчета.** При проведении расчетов по изложенному методу было принято следующее выражение для $\sigma(\xi)$:

$$\sigma(\xi) = \rho^2 \varepsilon = 1/4 \kappa a (\rho_d + \rho_b)^2 |u_d - u_b| \quad (6.1)$$

где κ — эмпирическая константа турбулентности.

Приводим результаты некоторых расчетов горения водорода в воздухе для двух случаев.

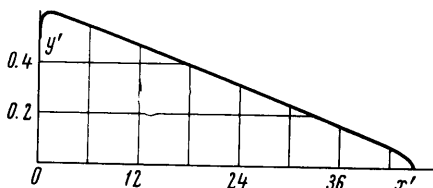
В первом случае $U_+ = 70$ м/сек, $U_- = 35,84$ м/сек, $T_+ = 1000^\circ$ К, $T_- = 295^\circ$ К. Коэффициент избытка окислителя $\alpha = 0,241$.

Во втором случае

$$U_+ = 100 \text{ м/сек}, U_- = 25,1 \text{ м/сек}, T_+ = 295^\circ \text{ К}, T_- = 295^\circ \text{ К}.$$

Коэффициент избытка окислителя $\alpha = 1,668$. Остальные значения в обоих случаях были $p_+ = p_0 = 1$ атм, $p_- = p_0 = 1$ атм, $(c_1)_+ = 0,2$; $(c_2)_- = 0,3$; $(c_4)_+ = 0,8$; $(c_4)_- = 0,7$; $(c_3)_+ = 0$, $(c_3)_- = 0$.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2—6. Из фиг. 2, 3 видно, что в случае избытка горючего ($\alpha = 0,241$) фронт пламени замыкается на оси струи окислителя,



Фиг. 6. Форма фронта пламени в плоскости $(x'/2a, y'/2a)$ при $\alpha = 1,668$

а при избытке окислителя ($\alpha = 1,668$) — на оси струи горючего. На фиг. 4 показана зависимость между переменными ξ' и $\kappa x/2a$, а на фиг. 5 приведены профили температур и концентрации в плоскости $(x/2a, y/2a)$ в сечении $x/2a = 4,5$ при использовании соотношения (6.1) для случая, когда $\alpha = 1,668$; форма фронта пламени для этого же случая приведена на фиг. 6. Значение константы турбулентности принято равным $\kappa = 0,064$.

Поступило 21 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. Изд-во «Наука», 1965.
3. Ferri A. Reviem of Problems in Application of Supersonic Combustion. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1964, vol. 68, No. 645.
4. Libby P. A. Theoretical Analysis of Turbulent Mixing of Reactive Gases with Applied to Supersonic Combustion of Hydrogen. Amer. Roc. Soc. Journ., March, 1962, vol. 32. (Рус. пер.: Ракетная техника, Изд-во «Мир», 1962, т. 32, № 3).
5. Ершин Ш. А., Ярин Л. П. К расчету турбулентного диффузионного факела. Сб. Теория и практика сжигания газа, т. 2. Изд-во «Недра», 1964.
6. Лойцянский Л. Г. К теории плоских ламинарных и турбулентных струй. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 176.
7. Ting L., Libby P. A. Remarks on the Eddy Viscosity in Compressible Mixing Flows. J. Aeronaut. Sci., 1960, vol. 27, No. 10.
8. Schetz J. A. Supersonic Diffusion Flames. In: Supersonic Flow. Chem. Processes and Radiative Transfer., Pergamon Press, 1964.
9. Mager A. Transformation of the Compressible Turbulent Boundary Layer. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 5.
10. Авдеев Е. Ф., Алиев Ф., Лапин Ю. В. Турбулентное перемешивание двух полубесконечных потоков реагирующих газов, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Гидрогазодинамика, 1966, № 265.
11. Карслоу Г. С., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964.