

## О ПЕРЕХОДЕ ПЛОСКОЙ ПЕРЕСЖАТОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ К РЕЖИМУ ЧЕПМЕНА — ЖУГЕ

В. А. ЛЕВИН

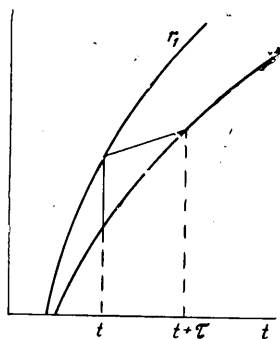
(Москва)

В работах [1, 2] были найдены асимптотические законы поведения плоских, цилиндрических и сферических бесконечно тонких детонационных волн при удалении от поджигающего источника в тех случаях, когда они, ослабевая, превращаются в волну Чепмена — Жуге. Показано, что плоская пересжатая детонационная волна асимптотически приближается к режиму Чепмена — Жуге, переход же цилиндрической или сферической сильной детонационной волны в волну Чепмена — Жуге может осуществляться на конечном расстоянии от источника инициирования.

Аналогичные выводы справедливы для распространения стационарных детонационных волн, возникающих при обтекании тел горючей смесью газов.

Однако многочисленные эксперименты [3, 4] по простреливанию тел в детонирующем газе показывают, что образующаяся перед телом пересжатая детонационная волна, ослабевая, распадается на обычный скачок уплотнения и фронт медленного горения. Чтобы установить, почему волна не выходит на режим Чепмена — Жуге, ниже рассматривается распространение плоской детонационной волны с учетом конечной скорости химических реакций. Применяется простейшая двухфронтная модель (обычная ударная волна и следующий за ней фронт пламени). Находятся условия, при которых переход к режиму Чепмена — Жуге не осуществляется. Сначала рассматривается распространение нестационарной плоской волны, а затем стационарной. Оказывается, что для тех смесей, которые использовались в указанных выше экспериментах, переход к режиму Чепмена — Жуге не возможен в рамках принятой модели.

1. Рассмотрим распространение плоской детонационной волны с учетом конечной скорости химических реакций в нестационарном случае. Примем следующую простейшую модель. Будем считать, что газ после



Фиг. 1

прохождения скачка уплотнения продолжает двигаться адиабатически в течение некоторого времени индукции  $\tau$ , после чего происходит мгновенное тепловыделение во фронте горения. Так как время индукции достаточно мало, то изменением параметров газа в области между скачком и фронтом горения можно пренебречь и считать их такими, какими они являются непосредственно за скачком.

Пусть  $r_1(t)$  — положение ударной волны в момент времени  $t$ , а  $r_2(t)$  — положение фронта горения. Тогда из простых геометрических соображений с точностью до членов порядка  $\tau^2$  можно получить следующую зависимость (фиг. 1):

$$r_1(t) - r_2(t) = [D_2(t) - u_1(t)]\tau(t) \quad (1.1)$$

Пусть теперь  $p$ ,  $\rho$  — давление и плотность газа,  $D_1$  — скорость ударной волны,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей газа, которое для простоты не меняется при переходе через поверхности разрывов. Индексы 0, 1, 2 относятся, соответственно, к параметрам газа перед ударной волной, перед фронтом горения и непосредственно за ним.

Ударная волна считается сильной и соотношения на ней имеют вид

$$p_1 = \rho_0 \frac{2D_1^2}{\gamma + 1}, \quad \rho_1 = \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad u_1 = \frac{2D_1}{\gamma + 1} \quad (1.2)$$

Условия на фронте горения можно записать в виде

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\gamma + 1} [\gamma + q - \sqrt{(q-1)^2 - D_J^2 (D_2 - u_1)^{-2}}]$$

$$D_2 - u_2 = \frac{D_2 - u_1}{\gamma + 1} [\gamma + q - \sqrt{(q-1)^2 - D_J^2 (D_2 - u_1)^{-2}}] \quad (1.3)$$

$$p_2 = \frac{p_1}{(\gamma + 1)q} [\gamma + q + \gamma \sqrt{(q-1)^2 - D_J^2 (D_2 - u_1)^{-2}}]$$

$$q = \frac{\gamma p_1}{\rho_1 (D_2 - u_1)^2}, \quad D_J^2 = 2(\gamma^2 - 1)Q$$

Здесь  $Q$  — тепловыделение в единице массы газа,  $D_J$  — скорость детонационной волны Чепмена — Жуге.

Рассмотрим распространение детонационной волны в том случае, когда ее интенсивность лишь немного превосходит интенсивность волны Чепмена — Жуге. За меру отклонения детонационной волны от волны Чепмена — Жуге введем два параметра  $D_1/D_J - 1 = \varepsilon$  и  $D_2/D_J - 1 = \delta$ , которые будут малыми одного порядка. Если окажется, что с течением времени  $\varepsilon$  и  $\delta$  одновременно стремятся к нулю, то это и будет означать, что детонационная волна асимптотически стремится к волне Чепмена — Жуге. В противном случае переход к режиму Чепмена — Жуге не осуществляется.

Используя эти параметры и соотношения (1.2), (1.3), можно получить с точностью до членов порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  включительно следующие выражения:

$$p_2 = \frac{\rho_0 D_J^2}{\gamma + 1} (1 + \sqrt{\omega}), \quad u_2 = D_J \frac{1 + \sqrt{\omega}}{\gamma + 1} \quad (1.4)$$

$$\rho_2 (D_2 - u_2) = \rho_0 D_J, \quad \rho_2 (D_2 - u_2)^2 - \gamma p_2 = -\rho_0 D_J^2 \sqrt{\omega}$$

$$\omega = 4 \frac{2\gamma - 1}{\gamma - 1} \varepsilon - 2 \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1} \delta \quad (1.5)$$

Как было показано в работах [1, 2] для детонационных волн, близких к волне Чепмена — Жуге, параметры газа за волной с точностью до членов порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  включительно удовлетворяют тем же соотношениям, что и в бегущей волне Римана. Предполагая, что при  $r \rightarrow \infty$  волна детонации стремится к волне Чепмена — Жуге и используя вывод о том, что течение за волной является течением с бегущей волной Римана, известным способом [5] получим уравнение

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dr_2} = -\frac{2}{r_2}$$

После интегрирования находим  $\omega = \omega_0 r_0^2 / r^2$ , или что то же самое

$$4 \frac{2\gamma - 1}{\gamma - 1} \varepsilon - 2 \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1} \delta = \frac{\omega_0 r_0^2}{r^2} \quad (1.6)$$

Для того чтобы получить уравнение для  $\varepsilon$ , обратимся к формуле (1.4), связывающей положение поверхностей разрывов. Для определенности возьмем формулу для времени индукции в виде

$$\tau = \frac{k}{p_1^{m-1}} \exp \frac{E}{RT_1} \quad (1.7)$$

Здесь  $E$  — энергия активации,  $R$  — газовая постоянная,  $m$  — порядок реакции.

Дифференцируя соотношение (1.4) и используя формулу (1.6), можно получить следующее уравнение для величины  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} D_J \left[ D_J \left( \frac{d\tau}{dD_1} \right)_{D_J} + \frac{4\gamma}{3\gamma-1} \tau(D_J) \right] \frac{d\varepsilon}{dr} + \kappa\varepsilon = \\ = \frac{\kappa}{2} \frac{\omega_0 r_0^2}{r^2} - D_J \tau(D_J) \kappa \frac{\omega_0 r_0^2}{r^3} \\ \left( \kappa = \frac{\gamma-1}{3\gamma-1} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из этого уравнения, в частности, вытекает, что если  $\tau \equiv 0$ , т. е. реакция происходит мгновенно, то для  $\varepsilon$  получается известная асимптотика в случае бесконечно тонкой волны детонации [1, 2].

При решении этого уравнения могут возникнуть два случая в зависимости от знака коэффициента при производной. Если коэффициент при производной положителен, то решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0 \exp[-\kappa\beta^2(r-r_0)] + \kappa\beta^2\omega_0 r_0^2 \exp(-\kappa\beta^2 r) \times \\ \times \int_{r_0}^r \left( \frac{1}{2x^2} - \frac{D_J \tau}{x^3} \right) \exp(\kappa\beta^2 x) dx \\ \beta^{-2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} D_J \left[ D_J \left( \frac{d\tau}{dD_1} \right)_{D_J} + \frac{4\gamma}{3\gamma-1} \tau(D_J) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

и величина  $\varepsilon$  в этом случае стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Асимптотика получается такой же, как и в случае распространения плоских нестационарных бесконечно тонких волн детонации [1, 2]

$$\varepsilon_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega_0 r_0^2}{2r^2}$$

При отрицательном коэффициенте решение содержит экспоненциально растущий множитель и имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = \exp(\kappa\alpha^2 r) \left[ \varepsilon_0 \exp(-\kappa\alpha^2 r_0) - \kappa\alpha^2 \omega_0 r_0^2 I(r_0, r) \right] \\ \alpha^{-2} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} D_J \left[ D_J \left( \frac{d\tau}{dD_1} \right)_{D_J} + \frac{4\gamma}{3\gamma-1} \tau(D_J) \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$I(r_0, r) = \int_{r_0}^r \left( \frac{1}{2x^2} - \frac{D_J \tau}{x^3} \right) \exp\left(-\frac{\gamma-1}{3\gamma-1} \alpha^2 x\right) dx$$

Из этой формулы следует, что при

$$\epsilon_0 > \kappa^2 \omega_0 r_0^2 \exp(\kappa^2 r_0) I(r_0, \infty) = \epsilon_*$$

решение неограниченно возрастает, а при выполнении обратного неравенства неограниченно убывает. При  $\epsilon_0 = \epsilon_*$  решение (1.10) можно записать в виде

$$\epsilon = \kappa^2 \omega_0 r_0^2 \exp(\kappa^2 r) \int_r^\infty \left( \frac{1}{2x^2} - \frac{D_J \tau}{x^3} \right) \exp(-\kappa^2 x) dx \quad (1.11)$$

В этом решении при  $r \rightarrow \infty$  величина  $\epsilon$  стремится к нулю, причем асимптотика такая же, как и в случае бесконечно тонкой детонации. Легко, однако, видеть, что это решение, вообще говоря, не может реализоваться, так как достаточно лишь немного изменить параметры  $\epsilon_0$  или  $r_0$ , чтобы получить неограниченное решение. Это, в свою очередь, означает, что переход к режиму Чепмена — Жуге при условии

$$D_J \left( \frac{d\tau}{dD_1} \right)_{D_J} + \frac{4\gamma}{3\gamma - 1} \tau(D_J) < 0 \quad (1.12)$$

невозможен. Подставив в это неравенство выражение для времени индукции (1.7), получим условие, при выполнении которого не осуществляется переход к режиму Чепмена — Жуге

$$1 - m + \frac{2\gamma}{3\gamma - 1} - \frac{E}{RT_1} < 0 \quad (1.13)$$

Для реакций второго порядка ( $m = 2$ ) и выше неравенство (1.13) автоматически выполняется даже при  $E = 0$ . Для реакций первого порядка это неравенство справедливо практически для всех газовых смесей. Полученный критерий очень похож на известный достаточный критерий неустойчивости волны Чепмена — Жуге [6–8].

Если выполняется обратное неравенство  $E/RT_1 < 2\gamma/(3\gamma - 1)$ , то детонационная волна, ослабляясь волнами разрежения, асимптотически выходит на режим Чепмена — Жуге.

В этом отношении интересно сравнить численные расчеты, опубликованные в работе [9], с результатами, полученными выше. В этой работе рассматривалось стационарное движение плоской пересжатой волны детонации с более точным учетом кинетики реакции, которая ослабляется волной разрежения. Расчет производился для реакции первого порядка, описываемой уравнением для концентрации  $d\lambda/dt = A \exp(-E/RT)$ , и различных энергий активации  $E$ . Было сосчитано три случая  $E = 0, 18 \text{ ккал}, 54 \text{ ккал}$  для  $\gamma = 1.4$ , температуры перед волной  $T = 300^\circ \text{K}$  и числа  $M$  волны равно шести. Оказывается, что при  $E = 0$  волна асимптотически выходит на режим Чепмена — Жуге, а в остальных двух случаях скорость волны резко падает и становится значительно ниже скорости волны Чепмена — Жуге. Это находится в соответствии с результатами, полученными выше, несмотря на то, что кинетика реакции учитывалась в простейшем виде.

2. Рассмотрим плоскую детонационную волну, возникающую при стационарном обтекании тела бесконечного размаха детонирующей смесью газов.

Возникающая пересжатая волна детонации постепенно ослабляется подходящими к ней сзади волнами разрежения и при этом возможны два случая: первый, когда волна, ослабляясь, переходит в волну Чепмена — Жуге, и второй, когда волна распадается на ударную волну и фронт медленного горения. Для исследования возможности осуществления перехо-

да к режиму Чепмена — Жуге примем те же предположения, что и в нестационарном случае.

Соотношения на сильной ударной волне можно записать в виде

$$p_1 = \frac{2\rho_0 v_0^2}{\gamma + 1} \sin^2 \beta, \quad \rho_1 = \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

$$v_1 = v_0 \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \alpha)}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\gamma + \cos 2\beta} \quad (2.1)$$

Здесь  $\beta$  — угол наклона ударной волны к оси  $x$ , совпадающей с направлением набегающего потока, имеющего скорость  $v_0$ ,  $\alpha$  — угол наклона линии тока за ударной волной к оси  $x$ .

Условия на фронте пламени в разрешенном виде будут

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma + q - \sqrt{(q-1)^2 - 2\sigma(\gamma^2 - 1)}}{\gamma + 1}, \quad v_2 = v_1 \frac{\cos(\psi - \alpha)}{\cos(\psi - \theta)}$$

$$p_2 = p_1 + \rho_1 v_1 \sin^2(\psi - \alpha) \frac{1 - q + \sqrt{(q-1)^2 - 2\sigma(\gamma^2 - 1)}}{\gamma + 1}$$

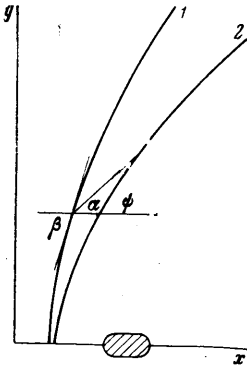
$$\operatorname{tg}(\psi - \theta) = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) \frac{\gamma + q - \sqrt{(q-1)^2 - 2\sigma(\gamma^2 - 1)}}{\gamma + 1} \quad (2.2)$$

$$q = \frac{a_1^2}{v_1^2 \sin^2(\psi - \alpha)}, \quad \sigma = \frac{Q}{v_1^2 \sin^2(\psi - \alpha)}$$

Здесь  $\psi$  — угол наклона фронта горения к оси  $x$ ,  $\theta$  — угол наклона линии тока сразу за фронтом пламени,  $Q$  — тепловыделение в единице массы газа.

Пусть  $x_1(y)$  — уравнение ударной волны, а  $x_2(y)$  — уравнение фронта пламени. Из геометрического рассмотрения (фиг. 2) можно получить с точностью до членов порядка  $\tau^2$  связь между положениями фронтов

$$x_2(y) = x_1(y) + v_1(y) \tau(y) \sin(\psi - \alpha) / \sin \psi \quad (2.3)$$



Фиг. 2

Для характеристики отклонения интенсивности волны детонации от волны Чепмена — Жуге введем параметры  $\beta - \beta_J = \delta\beta$ ,  $\psi - \beta_J = \delta\psi$ , где  $\beta_J$  — угол наклона волны Чепмена — Жуге. Если окажется, что при удалении от тела  $\delta\beta$  и  $\delta\psi$  одновременно стремятся к нулю, то это будет означать, что детонационная волна, ослабляясь, переходит в волну Чепмена — Жуге. В противном случае этот переход не осуществляется.

Как и в нестационарном случае, течение за волной детонации, близкой к волне Чепмена — Жуге, является «простой волной». Предполагая, что при удалении от тела волна детонации стремится к волне Чепмена — Жуге, и пристраивая сзади к фронту пламени течение разрежения с простой волной, можно получить связь между величинами  $\delta\beta$  и  $\delta\psi$ :

$$2(2\gamma - 1)\delta\beta - (3\gamma - 1)\delta\psi = b^2 y^{-2} \quad (2.4)$$

Для того чтобы получить уравнение относительно величины  $\delta\beta$ , обратимся к формуле (2.3). Дифференцируя это соотношение по  $y$  и используя связь между величинами  $\delta\beta$  и  $\delta\psi$  (2.4), получим уравнение:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_0 \left[ \left( \frac{d\tau}{d\beta} \right)_{\beta=\beta_J} + \frac{2\tau(\beta_J)}{(3\gamma - 1)\text{tg } \beta_J} \right] \frac{d\delta\beta}{dy} + \frac{(\gamma - 1)}{(3\gamma - 1)\sin^2 \beta_J} \delta\beta =$$

$$= \frac{b^2}{(3\gamma - 1)\sin^2 \beta_J y^2} - \frac{4v_0\tau(\beta_J)b^2}{(\gamma + 1)(3\gamma - 1)\text{tg } \beta_J y^3} \quad (2.5)$$

При  $\tau \equiv 0$  из этого уравнения следует, что при удалении от тела бесконечно тонкая волна детонации асимптотически стремится к волне Чепмена — Жуге, при этом асимптотическое выражение для формы детонационной волны имеет вид

$$x = x_0 + \frac{y}{\text{tg } \beta_J} \left( 1 + \frac{D}{y^2} \right) \quad (2.6)$$

При  $\tau \neq 0$ , как и в нестационарном случае, критерием того, что переход к режиму Чепмена — Жуге невозможен, служит неравенство

$$\left( \frac{d\tau}{d\beta} \right)_{\beta=\beta_J} + \frac{2\tau(\beta_J)}{(3\gamma - 1)\text{tg } \beta_J} < 0 \quad (2.7)$$

Подставив в него выражение для времени индукции (1.7), получим

$$1 - m + \frac{1}{3\gamma - 1} - \frac{E}{RT_1} < 0 \quad (2.8)$$

Это условие несколько отличается от условия, полученного для нестационарного распространения детонационной волны. Однако выводы остаются аналогичными. Для реакций второго порядка и выше переход к режиму Чепмена — Жуге невозможен. Это находит свое подтверждение в указанных выше экспериментах по простреливанию тел в водородо-воздушных, кислородо-водородных и некоторых других смесях.

Из всего вышесказанного следует, что создать стационарную детонационную волну Чепмена — Жуге с помощью плохообтекаемых тел, в рамках принятой модели, невозможно. Физической причиной этого, по-видимому, является неустойчивость детонационной волны, которая в данном случае, как показывает эксперимент, приводит к расщеплению ее на обычный скачок уплотнения и фронт медленного горения.

Поступило 28 XI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Асимптотический закон распространения плоской детонационной волны. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 3.
2. Левин В. А., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
3. A technique for studying supersonic combustion in the vicinity of a hypersonic missile. Nat. Bur. Stand. Techn. News Bull., 1960, vol. 44, No. 11.
4. Behrens H., Struth W., Wechen F. Studies of hypervelocity firings into mixtures of hydrogen with air or with oxygen. 10-th Symposium on Combustion. Pittsburgh, Pa, Combust. Inst., 1965, p. 245—252.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
6. Зайдель Р. М. Об устойчивости детонационных волн в газовых смесях. Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 5.
7. Войцеховский Б. В., Митрофанов В. В., Топчийн М. Е. Структура фронта детонации в газах. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1963.
8. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. Одномерная неустойчивость и затухание детонации. ПМТФ, 1963, № 6.
9. Strehlow R. A., Hartung W. E. On the Early Relaxation of an Overdriven Detonation Wave. Combustion and Flame, 1965, vol. 9, No. 4.