ДИФРАКЦИЯ ВОЛН КОРАБЕЛЬНОГО ВИДА

Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

(Москва)

Семейство прогрессивных волн, распространяющихся по поверхности тяжелой жидкости, содержит не только простые, обычно изучаемые волны, но имеет в своем составе волны весьма сложной структуры, напоминающие по форме своих гребней корабельные волны. Эти волны определяются формулами, содержащими произвольную функцию одного аргумента. В предлагаемой статье содержится исследование дифракции этих волн, вызванной присутствием погруженной вертикальной полуплоскости, преграждающей движение волн.

1. Рассмотрим бесконечно глубокую тяжелую жидкость, движение которой будем изучать по отношению к прямоугольной системе координат, направляя ось z вертикально вверх и располагая плоскость xy по среднему, не возмущенному волнами, уровню жидкости.

Рассмотрим волновые движения жидкости, определяемые следующими потенциалами скоростей:

$$\Phi_1(x,y,z;t)=\frac{gi}{c}\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\,e^{-i[mx+n(y+ct)]+kz}\frac{dn}{n}$$
$$\Phi_2(x,y,z;t)=\frac{gi}{c}\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\,e^{i[mx-n(y+ct)]+kz}\frac{dn}{n} \tag{1.1}$$

Здесь $N(n)$ — произвольная функция своего аргумента, а

$$m=(c^2n/g)\sqrt{n^2-g^2/c^4},\qquad k=n^2c^2/g,\qquad \varkappa=g/c^2$$

Этим потенциалам отвечают следующие прогрессивные волны общего вида, распространяющиеся по поверхности жидкости со скоростью c в отрицательном направлении оси y:

$$Z_1(x,y+ct)=\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\,e^{-i[mx+n(y+ct)]}\,dn \tag{1.2}$$

$$Z_2(x,y+ct)=\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\,e^{i[mx-n(y+ct)]}\,dn \tag{1.3}$$

При помощи этих волн можно составить новые прогрессивные волны следующего вида:

$$\zeta_1=\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\cos mx\sin n(y+ct)\,dn,\quad \zeta_2=\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\cos mx\cos n(y+ct)\,dn$$
$$\zeta_3=\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\sin mx\sin n(y+ct)\,dn,\quad \zeta_4=\int\limits_{\varkappa}^{\infty}N(n)\sin mx\cos n(y+ct)\,dn \tag{1.4}$$

Положим

$$x = \frac{c^2R}{g}\cos\vartheta, \quad y+ct = \frac{c^2R}{g}\sin\vartheta, \qquad R = \frac{g}{c^2}\sqrt{x^2+(y+ct)^2}$$

Рассмотрим угловые области D_1, D_2, D_3, D_4, определяемые следующими неравенствами:

$$^1/_2\pi - \operatorname{arctg} {}^1/_4\sqrt{2} < \vartheta < {}^1/_2\pi, \quad (D_1), \quad {}^3/_2\pi - \operatorname{arctg} {}^1/_4\sqrt{2} < \vartheta < {}^3/_2\pi, \quad (D_3)$$
$$^1/_2\pi < \vartheta < {}^1/_2\pi + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_4\sqrt{2}, \quad (D_2), \quad {}^3/_2\pi < \vartheta < {}^3/_2\pi + \operatorname{arc\,tg} {}^1/_4\sqrt{2}, \quad (D_4)$$

В этих областях возможно представить волны (1.4) следующими асимптотическими формулами при больших значениях числа R. В областях D_1 и D_3 имеем (1.5)

$$\zeta_1 = \pm\frac{M(\omega_1')}{2\sqrt{R}}\sin\left[\Omega(\omega_1')R+\frac{1}{4}\pi\right] \pm \frac{M(\omega_2')}{2\sqrt{R}}\sin\left[\Omega(\omega_2')R-\frac{1}{4}\pi\right]$$
$$\zeta_2 = \frac{M(\omega_1')}{2\sqrt{R}}\cos\left[\Omega(\omega_1')R+\frac{1}{4}\pi\right] + \frac{M(\omega_2')}{2\sqrt{R}}\cos\left[\Omega(\omega_2')R-\frac{1}{4}\pi\right]$$
$$\zeta_3 = \frac{M(\omega_1')}{2\sqrt{R}}\cos\left[\Omega(\omega_1')R+\frac{1}{4}\pi\right] + \frac{M(\omega_2')}{2\sqrt{R}}\cos\left[\Omega(\omega_2')R-\frac{1}{4}\pi\right]$$
$$\zeta_4 = \mp\frac{M(\omega_1')}{2\sqrt{R}}\sin\left[\Omega(\omega_1')R+\frac{1}{4}\pi\right] \mp \frac{M(\omega_2')}{2\sqrt{R}}\sin\left[\Omega(\omega_2')R-\frac{1}{4}\pi\right]$$

Верхние знаки берутся для области D_1, нижние — для области D_3. В этих формулах функции $\Omega(\omega)$ и $M(\omega)$ определяются выражениями:

$$\Omega(\omega) = \frac{1}{\sin\omega\sqrt{4-3\sin^2\omega}}, \qquad M(\omega) = \frac{g\sqrt{2\pi}}{c^2}N(\vartheta)\left(\frac{\sqrt{4-3\sin^2\omega}}{\sin\omega\,|2-\operatorname{tg}^2\omega|}\right)^{1/2}$$

Аргументы ω_1' и ω_2' — суть корни уравнения

$$(3+\cos 2\omega)\cos\vartheta - \sin 2\omega\sin\vartheta = 0$$

причем

$$0 < \omega_2' < \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} < \omega_1' < {}^1/_2\pi$$

Укажем затем, что $\nu = \operatorname{cosec}\omega$.

В областях D_2 и D_4 выражения ζ_1 и ζ_2 получаются из приведенных выше выражений (1.5) заменой ω_1' и ω_2', соответственно, на ω_1 и ω_2, причем ω_1 и ω_2 являются корнями уравнения

$$(3+\cos 2\omega)\cos\vartheta + \sin 2\omega\sin\vartheta = 0$$

Эти корни подчиняются неравенствам

$$0 < \omega_2 < \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} < \omega_1 < {}^1/_2\pi$$

Что же касается ζ_3 и ζ_4, то их выражения в областях D_2 и D_4 получаются из выражений (1.5) заменой ω_1' и ω_2', соответственно, на ω_1 и ω_2 и переменой знака перед всеми выражениями.

Из найденных асимптотических формул можно вывести различные заключения о виде волн.

Каждая из этих волн имеет в области D, ей отвечающей, продольные и поперечные гребни. Волна ζ_1 симметрична относительно оси y и антисимметрична относительно оси, проходящей через точку $y = -ct$ перпендикулярно к оси y. Волна ζ_2 симметрична относительно каждой из этих осей. Волна ζ_3 антисимметрична относительно каждой из этих двух осей. Наконец, волна ζ_4 антисимметрична относительно оси y и симметрична относительно оси перпендикулярной к оси y и проходящей через точку $y = -ct$.

Форма и размер угловых областей, в которых при больших значениях R величины волновых поднятий поверхности жидкости имеют наибольшие значения, а также наличие в этих областях двух систем гребней — продольных и поперечных,— позволяет назвать рассматриваемые прогрессивные волны общего вида волнами корабельного типа.

Подробное исследование волн общего вида содержится в статье [1] и в исследовании Хэвелока [2].

2. Обратимся теперь к задаче о дифракции волны ζ_2. Предположим, что на пути распространения волны ζ_2 находится стенка в виде вертикальной полуплоскости; требуется узнать, как этим препятствием будет разбиваться идущая на него волна ζ_2.

Предположим, что полуплоскость, преграждающая распространение волны, образовывает угол γ с осью x; назовем через θ и r полярные координаты какой-нибудь точки плоскости xy, причем угол θ отсчитывается от прямой пересечения преграждающей полуплоскости с плоскостью xy; имеем

$$x = r\cos(\theta+\gamma), \qquad y = r\sin(\theta+\gamma)$$

Положим, вместе с тем,

$$k = c^2n^2/g, \quad m = k\cos\delta, \quad n = k\sin\delta, \quad 0 < \delta < {}^1/_2\pi$$

Будем иметь

$$mx + ny = kr\cos(\theta+\gamma-\delta), \qquad mx - ny = kr\cos(\theta+\gamma+\delta)$$

Рассмотрим два потенциала скоростей

$$\varphi_1 = -\frac{g}{2cn}e^{-ikr\cos(\theta+\gamma-\delta)-icnt+kz} \tag{2.1}$$

$$\varphi_2 = -\frac{g}{2cn}e^{ikr\cos(\theta+\gamma+\delta)-icnt+kz} \tag{2.2}$$

Согласно формулам Зоммерфельда, из теории дифракции света потенциал скоростей волнового движения, образовавшегося при дифракции волны (2.1), будет

$$\begin{gathered}\varphi_1' = -\frac{g}{2cn}[u(r,\theta+\gamma-\delta)+u(r,\theta-\gamma+\delta)]e^{-icnt+kz}\\ u(r,\sigma) = \frac{e^{-{}^1/_4\pi i}}{\sqrt{2}}e^{-ikr\cos\sigma}\int_{-\infty}^{\rho}e^{{}^1/_2\pi i\tau^2}d\tau, \qquad \rho = 2\left(\frac{gr}{\pi c^2}\right)^{1/2}\frac{\cos{}^1/_2\sigma}{\sin\delta}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Умножим потенциал скоростей φ_1 на какую-нибудь функцию $N(n)$ параметра n и результат проинтегрируем по n от $\varkappa$ до ∞. Получим тогда одну из комплексных прогрессивных волн общего вида. Потенциал скоростей Φ_1 этой волны, подвергшейся дифракции, будет иметь выражение:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

где

$$\Phi_{11} = -\frac{g}{2c}\int_{\varkappa}^{\infty}u(r,\theta-\gamma+\delta)e^{-icnt+kz}N(n)\frac{dn}{n}$$

$$\Phi_{12} = -\frac{g}{2c}\int_{\varkappa}^{\infty}u(r,\theta-\gamma+\delta)e^{-icnt+kz}N(n)\frac{dn}{n}$$

Возвышение поверхности жидкости представится также в виде двух слагаемых ζ_{11} и ζ_{12}, причем

$$\zeta_{11} = -\frac{1}{2i}\int_{\varkappa}^{\infty} u(r, \theta + \gamma - \delta) e^{-icntN}(n)\, dn \tag{2.4}$$

$$\zeta_{12} = -\frac{1}{2i}\int_{\varkappa}^{\infty} u(r, \theta - \gamma + \delta) e^{-icntN}(n)\, dn \tag{2.5}$$

Рассмотрим затем дифракцию волны, получаемой из потенциала скоростей (1.2) путем обобщения. Общее возвышение волны $\zeta_{21} + \zeta_{22}$ найдется из формул

$$\zeta_{21} = -\frac{1}{2i}\int_{\varkappa}^{\infty} u(r, \theta + \gamma + \delta - \pi) e^{-icntN}(n)\, dn \tag{2.6}$$

$$\zeta_{22} = -\frac{1}{2i}\int_{\varkappa}^{\infty} u(r, \theta - \gamma - \delta + \pi) e^{-icntN}(n)\, dn \tag{2.7}$$

После всех этих вычислений можно заключить, что формула

$$Z = \operatorname{Im}(\zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{21} + \zeta_{22}) \tag{2.8}$$

определяет ординаты поверхности жидкости, покрытой волнами, образовавшимися благодаря дифракции прогрессивной волны общего вида

$$\zeta_2 = \int_{\varkappa}^{\infty} N(n) \cos mx \cos n(y + ct)\, dn$$

3. Преобразуем формулы (2.4) — (2.7). Пользуясь выражением функции $U(r, \sigma)$, находим для ζ_{11} следующее выражение:

$$\zeta_{11} = \frac{e^{1/4\pi i}}{2\sqrt{2}} \int_{\varkappa}^{\infty} e^{-ikr\cos(\theta+\gamma-\delta) - cnti} N(n)\, dn \int_{-\infty}^{\rho'} e^{1/2\pi i\tau^2} d\tau$$

$$\rho' = 2\left(\frac{gr}{\pi c^2}\right)^{1/2} \frac{\cos {}^1/_2(\theta + \gamma - \delta)}{\sin \delta}$$

Преобразовывая правую часть этой формулы интегрированием по частям, получаем для ζ_{11} новое выражение

$$\zeta_{11} = J_{11} - \frac{e^{1/4\pi i}}{2\sqrt{2}} S_{11}$$

Здесь

$$S_{11} = \int_1^{\infty} d\chi \int_1^{\chi} \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\rho'}{\partial n} N(n)\right] \exp\left(-\frac{gt}{c}\xi i + \frac{gr}{c^2} iF_1(\chi, \xi)\right) d\xi, \qquad \psi' = \theta + \gamma$$

$$F_1(\chi, \xi) = \chi^2 + \chi\sqrt{\chi^2 - 1}\cos\psi' + \chi\sin\psi' - \xi\sqrt{\xi^2 - 1}\cos\psi' - \xi\sin\psi'$$

$$J_{11} = \frac{i}{2}\int_{\varkappa}^{\infty} N(n) e^{-iar\cos(\psi'-\Delta)} e^{-cvti}\, d\nu \qquad (0 < \theta < \pi - \gamma)$$

$$J_{11} = 0 \qquad (\pi - \gamma < \theta < 2\pi)$$

Кроме того,

$$\alpha = \frac{c^2}{g}\nu^2, \qquad \sin\Delta = \frac{g}{c^2\nu}$$

Преобразовывая таким же приемом выражения ζ_{12}, ζ_{21}, ζ_{22}, находим

$$\zeta_{12} = J_{12} - \frac{e^{1/4\pi i}}{2\sqrt{2}} S_{12}$$

$$S_{12} = \int_1^\infty d\chi \int_1 \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\rho''}{\partial n} N(\nu)\right] \exp\left(-\frac{gt}{c}\xi i + \frac{gr}{c^2} F_2(\chi,\xi) i\right) d\xi$$

$$\rho'' = 2\left(\frac{gr}{\pi c^2}\right)^{1/2} \frac{\cos^{1}/_{2}(\psi'' + \delta)}{\sin\delta} \qquad (\psi'' = \theta - \gamma)$$

$$F_2(\chi,\xi) = \chi^2 + \chi\sqrt{\chi^2 - 1}\cos\psi'' - \chi\sin\psi'' - \xi\sqrt{\xi^2 - 1}\cos\psi'' + \xi\sin\psi''$$

$$J_{12} = \frac{i}{2}\int_\varkappa^\infty N(n) e^{-i\alpha r\cos(\theta-\gamma+\Delta)} e^{-c\nu t i} d\nu \qquad (0 < \theta < \pi + \gamma)$$

$$J_{12} = 0 \qquad (\pi + \gamma < \theta < 2\pi) \qquad (\varkappa = g / c^2)$$

Затем

$$\zeta_{21} = J_{21} - \frac{e^{1/4\pi i}}{2\sqrt{2}} S_{21}$$

$$S_{21} = \int_1^\infty d\chi \int_1^\chi \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\sigma'}{\partial n} N(\nu)\right] \exp\left(-\frac{gt}{c}\xi i + \frac{gr}{c^2} F_3(\chi,\xi) i\right) d\xi$$

$$\sigma' = 2\left(\frac{gr}{\pi c^2}\right)^{1/2} \frac{\sin^{1}/_{2}(\psi' + \delta)}{\sin\delta}$$

$$F_3(\chi,\xi) = \chi^2 - \chi\sqrt{\chi^2 - 1}\cos\psi' + \chi\sin\psi' + \xi\sqrt{\xi^2 - 1}\cos\psi' - \xi\sin\psi'$$

$$J_{21} = \frac{i}{2}\int_\varkappa^\infty N(\nu) e^{i\alpha r\cos(\theta+\gamma+\Delta)} e^{-c\nu t i} d\nu \qquad (0 < \theta < 2\pi - \gamma)$$

$$J_{21} = 0 \qquad (2\pi - \gamma < \theta < 2\pi) \qquad (\varkappa = g / c^2)$$

Наконец имеем

$$\zeta_{22} = J_{22} - \frac{e^{1/4\pi i}}{2\sqrt{2}} S_{22}$$

$$S_{22} = \int_1^\infty d\chi \int_1^\chi \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\sigma''}{\partial n} N(\nu)\right] \exp\left(-\frac{gt}{c}\xi i + \frac{gr}{c^2} F_4(\chi,\xi)\right) d\xi$$

$$\sigma'' = -2\left(\frac{gr}{\pi c^2}\right)^{1/2} \frac{\sin^{1}/_{2}(\psi'' - \delta)}{\sin\delta}$$

$$F_4(\chi,\xi) = \chi^2 - \chi\sqrt{\chi^2 - 1}\cos\psi'' - \chi\sin\psi'' + \xi\sqrt{\xi^2 - 1}\cos\psi'' + \xi\sin\psi''$$

$$J_{22} = \frac{i}{2}\int_\varkappa^\infty N(\nu) e^{i\alpha r\cos(\theta-\gamma-\Delta)} e^{-c\nu t i} d\nu \qquad (0 < \theta < \gamma)$$

$$J_{22} = 0 \quad (\gamma < \theta < 2\pi) \quad (\varkappa = g / c^2)$$

Указывая во всех этих формулах неравенства для углов θ, можно предполагать, что $\gamma > 0$. Если угол γ будет отрицательным, $\gamma = -\lambda$, то интегралы J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22} будут отличны от нуля, если будут удовлетворяться, соответственно, следующие неравенства:

$$0 < \theta < \pi + \lambda, \quad 0 < \theta < \pi - \lambda, \quad \lambda < \theta < 2\pi, \quad 2\pi - \lambda < \theta < 2\pi$$

4. Составим формулу (2.8), учитывая в выражениях функций $\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{22}$ лишь интегралы $J_{11}, \ldots, J_{22}$. Тогда найдем неполное выражение для возвышения поверхности жидкости в следующем виде:

$$Z' = \mathrm{Im}\,(J_{11} + J_{12} + J_{21} + J_{22})$$

Пользуясь данными выше значениями интегралов $J_{11}, \ldots, J_{22}$, находим для Z' следующие выражения при $\gamma > 0$:

$$Z' = \zeta_2 + \zeta_2' \qquad (0 < \theta < \gamma)$$
$$Z' = \zeta_2 + {}^1/_2\zeta_2' + {}^1/_2\zeta_3' \qquad (\gamma < \theta < \pi - \gamma)$$
$$Z' = {}^1/_2\,\zeta_2 + {}^1/_2\zeta_2' + {}^1/_2\zeta_3 + {}^1/_2\zeta_3' \qquad (\pi - \gamma < \theta < \pi + \gamma)$$
$$Z' = {}^1/_2\zeta_2 + {}^1/_2\zeta_3 \qquad (\pi + \gamma < \theta < 2\pi - \gamma)$$
$$Z' = 0 \qquad (2\pi - \gamma < \theta < 2\pi)$$

Для $\gamma = -\lambda < 0$ имеем

$$Z' = {}^1/_2\zeta_3 + {}^1/_2\zeta_2' - {}^1/_2\zeta_3 + {}^1/_2\zeta_3' \qquad (0 < \theta < \lambda)$$
$$Z' = \zeta_2 + {}^1/_2\zeta_2' + {}^1/_2\zeta_3 \qquad (\lambda < \theta < \pi - \lambda)$$
$$Z' = \zeta_2 \qquad (\pi - \lambda < \theta < \pi + \lambda)$$
$$Z' = {}^1/_2\zeta_2 + {}^1/_2\zeta_3 \qquad (\pi + \lambda < \theta < 2\pi - \lambda)$$
$$Z' = {}^1/_2\zeta_2 + {}^1/_2\zeta_3 + {}^1/_2\zeta_2' - {}^1/_2\zeta_3' \qquad (2\pi - \lambda < \theta < 2\pi)$$

Функции ζ_1', ζ_2', ζ_3' получаются из функций ζ_1, ζ_2, ζ_3 п. 1 заменой x и y на

$$x' = r\cos(\theta - \gamma), \qquad y' = r\sin(\theta - \gamma)$$

соответственно, и изменением знака у t на обратный.

5. Укажем теперь некоторые асимптотические формулы для двойных интегралов $S_{11}, \ldots, S_{22}$. Возьмем интеграл S_{11} и перепишем его выражение так:

$$S_{11} = \int_1^\infty d\chi \int_1^\chi \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\rho'}{\partial n}N(n)\right]\exp\left(-\frac{gt}{c}if_1(\chi,\xi)\right)d\xi$$

$$f_1(\chi, \xi) = \xi - pF_1(\chi, \xi), \; p = r/ct$$

Установим асимптотическую формулу для S_{11} при больших значениях параметра gt/c при условии ограниченности снизу параметра $p > p_0 > 0$. Для этого найдем корни уравнений, принадлежащие области интегрирования

$$\partial f_1/\partial\chi = -p\partial F_1/\partial\chi = 0, \qquad \partial f_1/\partial\xi = 1 - p\partial F_1/\partial\xi = 0 \qquad (5.1)$$

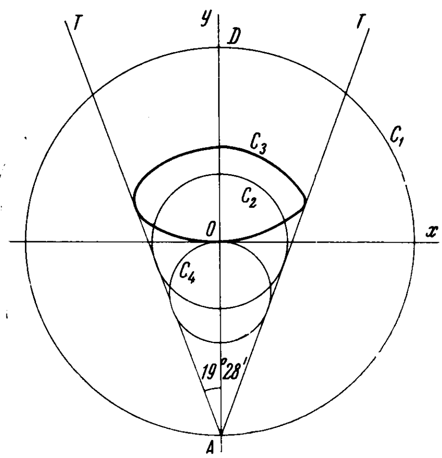
Анализ этих уравнений приводит к следующим заключениям, которые представим геометрически (фиг. 1).

Опишем из начала координат две окружности (C_1) радиуса 1 и (C_2) радиуса ${}^1/_3$. Проведем через точку $A(0, -1)$ пересечения оси y с окружностью (C_1) прямую (T), касательную к окружности (C_2) в области отрицательных x.

Прямая (T) наклонена к оси y под углом $19°28' = \operatorname{arctg} {}^1/_2\sqrt{2}$. Построим овал (C_3) с уравнениями

$$x = -\frac{p(1-p^2)}{1-3p^2}\sqrt{1-4p^2}, \qquad y = \frac{2p^4}{1-3p^2}$$

Здесь p — радиус-вектор точки на овале. Этот овал касается в начале координат оси x, проходит через точку $(0, {}^1/_2)$ и касается прямой (T).



Фиг. 1

Построим затем окружность (C_4)

$$x^2 + y^2 = {}^1/_2\, y$$

Эта окружность касается прямой (T).

Система уравнений (5.1) имеет решение (χ, ξ), принадлежащее области интегрирования лишь в том случае, если точка с координатами (ψ', p) лежит или внутри овала (C_3), или внутри окружности (C_4). При соблюдении этого условия система уравнений (5.1) имеет лишь одну пару чисел, удовлетворяющих этой системе. Этот результат относится к положительным значениям p. Для отрицательных p значения χ и ξ, удовлетворяющие системе уравнений (5.1), не будут принадлежать области интегрирования.

Возьмем интеграл S_{12} и запишем его так:

$$S_{12} = \int_1^\infty d\chi \int_1^\chi \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\rho''}{\partial n} N(n)\right] \exp\left(-\frac{gt}{c} if_2(\chi, \xi)\right) d\xi$$

$$(f_2(\chi, \xi) = \xi - pF_2(\chi, \xi))$$

Исследование корней системы уравнений

$$\partial f_2 / \partial\chi = 0, \qquad \partial f_2 / \partial\xi = 0 \tag{5.2}$$

приводит к следующим результатам. Сделаем чертеж (фиг. 2), симметричный предыдущему относительно оси x; обозначим на новой фигуре углы через ψ''. Если точка (ψ'', p) будет находиться или внутри овала

$$x = -\frac{p(1-p^2)}{1-3p^2}\sqrt{1-4p^2}, \qquad y = -\frac{2p^4}{1-3p^2}$$

или внутри окружности

$$x^2 + y^2 = {}^1/_2 y$$

с условием $x < 0$, то уравнения (5.2) имеют одну пару решений. При других положениях точки (ψ'', p) уравнения (5.2) не имеют решений в области интеграции.

Рассмотрим интеграл

$$S_{21} = \int_1^\infty d\chi \int_1^\chi \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\sigma'}{\partial n} N(n)\right] \exp\left(-\frac{gt}{c} if_3(\chi, \xi)\right) d\xi$$

$$f_3(\chi, \xi) = \xi - pF_3(\chi, \xi)$$

Система уравнений, служащая для установления асимптотических формул

$$\partial f_3 / \partial \chi = 0, \qquad \partial f_3 / \partial \xi = 0 \tag{5.3}$$

имеет одну пару решений (χ, ξ), принадлежащую области интегрирования, если точка (ψ, ξ) будет лежать или в правой половине овала

$$x = \frac{p(1-p^2)}{1-3p^2}\sqrt{1-4p^2}, \qquad y = \frac{2p^4}{1-3p^2}$$

$$x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}y$$

или в правой половине окружности.

Рассмотрим, наконец, интеграл

$$S_{22} = \int_1^\infty d\chi \int_1^\chi \left[\frac{g^2}{c^4}\frac{\partial\sigma''}{\partial n}N(n)\right]' \exp\left(-\frac{gt}{c}if_4(\chi,\xi)\right)d\xi$$

$$f_4(\chi, \xi) = \xi - pF_4(\chi, \xi)$$

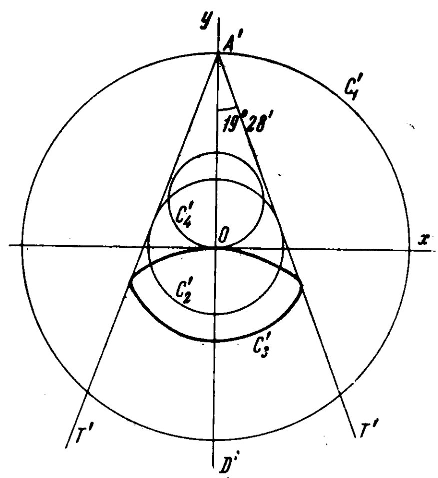
Система уравнений

$$\partial f_4 / \partial \chi = 0, \qquad \partial f_4 / \partial \xi = 0 \tag{5.4}$$

удовлетворяется значениями (χ, ξ), принадлежащими области интеграции лишь в том случае, если точка (Ψ'', p) будет находиться в правых частях овала или окружности

$$x = \frac{p(1-p^2)}{1-3p^2}\sqrt{1-4p^2}$$

$$y = -\frac{2p^4}{1-3p^2}, \qquad x^2 + y^2 = {}^1/_2 y$$



Фиг. 2

Каждой точке внутри этих кривых будет соответствовать лишь одно решение системы уравнений (5.4).

6. После этого исследования корней уравнений (2.1) — (2.4) можно составить асимптотические формулы для двойных интегралов S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}. Применяя правила составления асимптотических выражений двойных интегралов

$$\iint\limits_{(D)} g(x, y)\, e^{-\omega\varphi(x,y)i} dx\, dy$$

для больших значений параметра, после обширных вычислений приходим к следующим заключениям.

Для точек (ψ', p) и (ψ'', p), принадлежащих внутренним частям окружностей, имеем

$$S_{11} = -u(\Psi')\frac{c}{gtp}\exp\left(-\frac{gt}{c}f_1(\chi,\xi)i\right) + \ldots, \qquad \pi < \Psi' < \frac{3}{2}\pi$$

$$S_{12} = u(\Psi'')\frac{c}{gtp}\exp\left(-\frac{gt}{c}f_2(\chi,\xi)i\right) + \ldots, \qquad \frac{1}{2}\pi < \Psi'' < \pi$$

$$S_{21} = u(\Psi')\frac{c}{gtp}\exp\left(-\frac{gt}{c}f_3(\chi,\xi)i\right) + \ldots, \qquad \frac{3}{2}\pi < \Psi' < 2\pi$$

$$S_{22} = -u(\Psi'')\frac{c}{gtp}\exp\left(-\frac{gt}{c}f_4(\chi,\xi)i\right) + \ldots, \qquad 0 < \Psi'' < \frac{1}{2}\pi$$

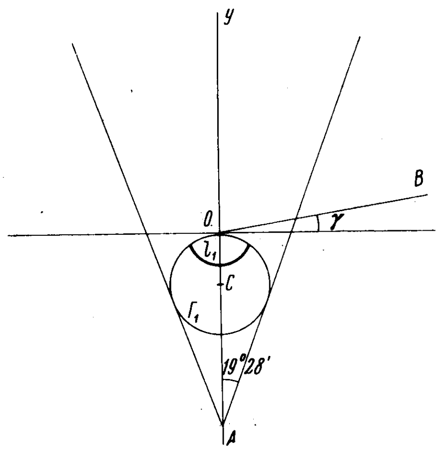
В выражениях для $S_{11}, \ldots, S_{22}$ положено

$$u(\Psi) = \frac{2\pi g}{c^2}\left(\frac{gr}{\pi c^2}\right)^{1/2}\left(\frac{(\xi^2-1)^{3/2}}{\xi(3-2\xi^2)}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{|\cos\Psi|}}N\left(\frac{g\chi}{c^2}\right)$$

Здесь χ и ξ — корни систем уравнений (5.1), ..., (5.4). При этом обозначено

$$\chi = -\operatorname{cosec}\Psi' \quad \text{или} \quad \tau = -\operatorname{cosec}\Psi''$$

Эти формулы пригодны для вычисления двойных интегралов при больших значениях gt/c и при значениях параметра p, больших чем произвольно малое число $p_0 > 0$.



Фиг. 3

Для точек овалов рассматриваемые двойные интегралы имеют по отношению к gt/c больший порядок малости, чем первый; поэтому точки, принадлежащие внутренностям овалов, не учитываются.

Возьмем теперь формулу (2.8). Часть этой формулы, связанная с интегралами J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}, была уже составлена в п. 4. Рассмотрим теперь ту часть этой же формулы, но связанную с двойными интегралами. Положим

$$Z'' = -{}^1/_4\sqrt{2}\,\mathrm{Im}[e^{1/4\pi i}(S_{11} + S_{12} + S_{21} + S_{22})] \tag{6.1}$$

Установим из асимптотических формул вид поверхности жидкости при больших значениях параметра gt/c и при значениях p, лежащих между двумя положительными числами.

Возьмем на отрицательной части оси y точку A на расстоянии ct от начала координат, и проведем через эту точку две прямые линии, наклоненные к оси y под углом $\alpha \approx 19°28$; опишем из точки $C(0, -{}^1/_4ct)$ окружность (Γ_1), проходящую через начало координат (фиг. 3); эта окружность будет касаться оси x. На основании предыдущих рассмотрений можно сказать, что в точках левой половины этой окружности будет иметь значение лишь первый член формулы (6.1); в точках правой части окружности (Γ_2) будет иметь значение лишь третий член этой формулы. Порядок этих членов будет равен единице по отношению к gt/c. Итак

$$Z'' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}u(\Psi')\frac{c}{gtp}\sin\left[\frac{gt}{c}f_1(\chi,\xi) - \frac{1}{4}\pi\right] \qquad \left(\pi < \Psi < \frac{3}{2}\pi\right)$$

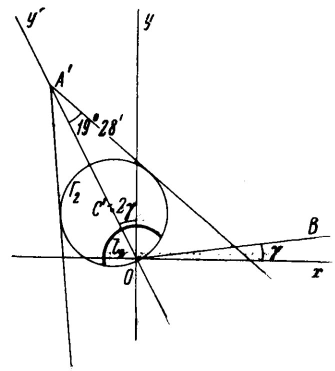
$$Z'' = \frac{1}{2\sqrt{2}}u(\Psi')\frac{c}{gtp}\sin\left[\frac{gt}{c}f_3(\chi,\xi) - \frac{1}{4}\pi\right] \qquad \left(\frac{3}{2}\pi < \Psi' < 2\pi\right) \tag{6.2}$$

Исследование функций f_1 и f_3 показывает, что волны внутри окружности (Γ_1) имеют вид поперечных волн.

Проведем затем через точку O ось y', наклоненную (фиг. 4) к оси y под углом 2γ. Возьмем на положительной части этой оси точку A' на расстоянии ct от начала координат и проведем через эту точку две прямые линии, наклоненные к оси y' под углом $\alpha \approx 19°28$. Построим затем внутри этого угла окружность (Γ_2) с центром в точке $C'(O, {}^1/_4\, ct)$ и проходящую через начало координат; эта окружность будет касаться сторон угла в 38°56. Из предыдущих рассмотрений вытекает, что в левой половине окружности (Γ_2) главное значение имеет второй член формулы (6.1), а в правой половине окружности — последний член этой формулы. Итак

$$Z'' = \frac{1}{2\sqrt{2}} u(\Psi'') \frac{c}{gtp} \sin\left[\frac{gt}{c} f_2(\chi, \xi) - \frac{1}{4}\pi\right]$$
$$({}^1/_2\pi < \Psi'' < \pi)$$

$$Z'' = -\frac{1}{2\sqrt{2}} u(\Psi'') \frac{c}{gtp} \sin\left[\frac{gt}{c} f_4(\chi, \xi) - \frac{1}{4}\pi\right] \tag{6.3}$$
$$(0 < \Psi'' < {}^1/_2\pi)$$



Фиг. 4

Эти волны имеют вид поперечных волн.

Надо отметить, что формулы (6.2) дают, в силу требования $p > p_0 > 0$, указанные значения для Z'' вне окружности, радиус которой изменяется с течением времени как p_0ct. Такое же замечание относится и к формулам (6.3), которые имеют место внутри окружности (Γ_2) радиуса ${}^1/_4\, ct$, из которой вырезана круговая луночка l_2 с центром в точке O, и радиуса p_0ct.

Волны, находившиеся внутри окружности (Γ_1), распространяются в направлении движения основной волны ζ_2, подвергшейся дифракции. Волны, заключенные внутри окружности (Γ_2), распространяются в противоположном направлении. Эти волновые движения, имеющие место внутри окружностей (Γ_1) и (Γ_2), накладываются на волновые движения, описываемые формулами п. 4. Каждое слагаемое, входящее в правые части этих формул, имеет простое значение ординат тех или иных прогрессивных волн общего вида. Внутри соответствующего угла в 38°56′ каждое слагаемое определяет систему поперечных и продольных волн. Вне этих углов будут более слабые возвышения поверхности жидкости, имеющие вид простых синусоидальных волн с неограниченно уменьшающимися ординатами вдоль своих гребней.

Таким образом, вся дифракционная картина может быть описана следующим образом. В отрицательном направлении оси y перемещаются две системы общих прогрессивных волн ζ_2 и ζ_3; в положительном направлении оси y', наклоненной к оси y под углом 2γ, распространяются две системы прогрессивных волн общего вида ζ_2' и ζ_3'. В каждой из пяти областей изменения угла θ, приведенных в п. 4, берутся от этих волн ζ_2, ζ_3, ζ_2', ζ_3' части, указанные в группе формул п. 4, и из этих частей составляются значения Z' неполных ординат поверхности жидкости. Чтобы получить полные ординаты, надо прибавить слагаемые, зависящие от двойных интегралов. Найденные асимптотические формулы (6.2) и (6.3) для двойных интегралов дают представление о том, какой вид имеют ординаты поверхности жидкости внутри равномерно расширяющихся кругов (Γ_1) и (Γ_2), вписанных в угловые волновые области волн ζ_2, ζ_3 и ζ_2', ζ_3'.

Поступило 27 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Поверхностные прогрессивные волны общего вида. Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, 1966, № 1, стр. 90—97.
2. Havelock T. H. Wave patterns and wave resistance. The Collected Papers, 1963, p. 377—389.