

**ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР ШАРА, ПОЛУПОГРУЖЕННОГО
В ЖИДКОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

Л. С. ВОРОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача влияния дна при горизонтальном гидродинамическом ударе сферического твердого тела диаметром $2a$, наполовину погруженного в слой жидкости конечной глубины. Шар подвергается действию ударного импульса, вследствие чего приобретает начальную поступательную скорость u , направленную вдоль оси x .

Первые влияние сферического дна на явление удара шаров изучено Н. Е. Жуковским [1]. Вертикальный удар в слое конечной глубины рассмотрен в [2], горизонтальный удар в полупространстве — в [3].

1. Поставленная механическая задача в безразмерных параметрах

$$x = \frac{x_1}{h_1}, \quad y = \frac{y_1}{h_1}, \quad z = \frac{z_1}{h_1}, \quad \lambda = \frac{a}{h_1}, \quad \varphi = \frac{\Phi_1}{h_1 u} \quad (1.1)$$

сводится к отысканию гармонической в области Ω_1 функции φ по условиям

$$\varphi = 0, \quad \text{если } |\theta| = 1/2\pi, \quad r > \lambda$$

$$\partial\varphi / \partial y = 0, \quad \text{если } y = 1$$

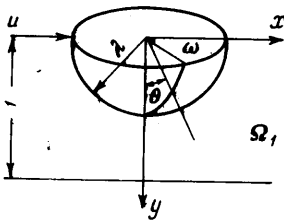
$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{если } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$$

$$\partial\varphi / \partial r = \cos \omega \sin \theta, \quad \text{если } r = \lambda, \quad |\theta| \leq 1/2\pi$$

Здесь h_1 — глубина жидкости

$$|\theta| \leq 1/2\pi, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

Область Ω_1 есть слой $0 \leq y_1 \leq 1$, из которого



Фиг. 1

удален полусфер

$$|\theta| \leq 1/2\pi, \quad 0 \leq r_1 \leq \lambda \quad (\text{фиг. 1})$$

2. Для построения решения задачи используем метод отражений [2].

При этом приходим к определению гармонической в области Ω_2 функции φ , удовлетворяющей на каждой сфере ω_n граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_n} = \cos \omega (-1)^n \sqrt{1 - x_n^2} \text{sign } x_n, \quad x_n = \frac{y - 2n}{r_n} = \cos \theta_n \quad (2.1)$$

$$r_n = \sqrt{r^2 - 4rn \cos \theta + 4n^2} = \sqrt{\rho^2 + (y - 2n)^2}$$

и исчезающей при $\rho \rightarrow \infty$. Здесь область Ω_2 — внешность решетки сфер ω_n , представленных на фиг. 2.

3. Для отыскания φ введем систему функций φ_k посредством соотношений

$$\varphi_k(x, y, z) = \cos \omega \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{P_k^1(\cos \theta_n)}{r^{k+1}} \quad (3.1)$$

где P_k^1 — присоединенная функция Лежандра 1-го рода, определяемая по формуле

$$P_k^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{1/2m} \frac{d^m P_k}{dx^m} \quad (3.2)$$

Можно показать, что любую периодическую гармоническую функцию можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{k=0,2,\dots} M_k \varphi_k \quad (3.3)$$

при этом будут удовлетворены все граничные условия (1.1), кроме последнего. Доказательство этого факта в случае вертикального удара дано в [2]. Этот же метод

без каких-либо изменений можно использовать и в данном случае.

M_k надо подобрать так, чтобы удовлетворилось последнее условие (1.1)

$$\sum_{k=0,2,\dots} M_k \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} = \sqrt{1-x^2} \operatorname{sign} x$$

$$\psi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{P_k^1(x_n)}{r^{k+1}} \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) эквивалентно бесконечной системе относительно M_k .

$$\sum_{k=0,2,\dots} C_{pk} M_k = b_p \quad (p=2, 4, \dots) \quad (3.5)$$

$$C_{pk} = \int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} P_p^1(x) dx, \quad b_p = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \operatorname{sign} x P_p^1(x) dx \quad (3.6)$$

Произведя вычисления по последней формуле (3.6), получим

$$b_p = -2J_p, \quad J_{2p} = (-1)^{p+1} \frac{2p}{2p-1} \frac{(2p+1)!!}{(2p+2)!!} \quad (3.7)$$

($p=1, 2, \dots$)

Исследование этой бесконечной системы можно произвести так же, как это сделано в [2].

Для вычисления C_{pk} разложим ψ_k и $d\psi_k/dr$ по присоединенным функциям Лежандра 1-го рода.

Метод получения таких разложений указан в [2], поэтому приведем только окончательные результаты

$$\psi_{2k} = \frac{P_{2k}^1(x)}{r^{2k+1}} - \sum_{p=1}^{\infty} P_{2p}^1 b_{2p, 2k} r^{2p} \frac{B_{2p+2k+1}}{2^{2p+2k+1}} \quad \left(B_l = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^l} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \psi_{2k}}{\partial r} \Big|_{r=\lambda} = -\frac{2k+1}{\lambda^{2k+2}} P_{2k}^1 - \sum_{p=1}^{\infty} p P_{2p}^1 b_{2p, 2k} \lambda^{2p-1} \frac{B_{2p+2k+1}}{2^{2p+2k}} \quad (3.9)$$

Здесь $b_{2p, 2k}$ — числовой коэффициент при r^{2p} в разложении ψ_{2k} по полиномам Лежандра.

Вот несколько первых разложений, которые будут использованы в дальнейшем

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{P_2^1}{r^3} - \frac{B_5}{2^5} r^2 8 P_2^1 - \frac{B_7}{2^7} r^4 12 P_4^1 - \frac{B_9}{2^9} r^6 16 P_6^1 - \dots \\ \psi_4 &= \frac{P_4^1}{r^5} - \frac{B_7}{2^7} r^2 40 P_2^1 - \frac{B_9}{2^9} r^4 112 P_4^1 - \frac{B_{11}}{2^{11}} r^6 240 P_6^1 - \dots \\ \psi_6 &= \frac{P_6^1}{r^7} - \frac{B_9}{2^9} r^2 112 P_2^1 - \frac{B_{11}}{2^{11}} r^4 504 P_4^1 - \dots \\ \psi_8 &= \frac{P_8^1}{r^9} - \frac{B_{11}}{2^{11}} r^2 240 P_2^1 - \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя разложения (3.10) в формулу (3.6) и принимая во внимание ортогональность функций Лежандра в интервале $-1 \leq x \leq 1$, получаем

$$C_{2p, 2k} = - \left[(2p+1) \delta_{pk} + 2p \lambda^{4p+1} b_{2p, 2k} \frac{b_{2p+2k+1}}{2^{2p+2k+1}} \right] \frac{2(2p+1)!}{(2p-1)!(4p+1)\lambda^{2p+2}} \quad (3.11)$$

Здесь δ_{pk} — символ Кронекера.

На основе (3.11) систему (3.5) представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_{pk} (2p+1) + \frac{B_{2p+2k+1}}{2^{2p+2k+1}} 2p b_{2p, 2k} \lambda^{4p+1} \right] M_{2k} &= \\ = - \frac{(2p-1)!(4p+1)}{2(2p+1)!} b_{2p} \lambda^{2p+2} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Систему (3.12) решаем разложением M_h в ряды по степеням λ . Для M_k получаем разложения

$$M_{2k} = \lambda^{2k+2} J_{2k} \frac{(4k+1)(2k-1)!}{(2k+1)!(2k+1)} + \lambda^{2k+2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2k+3} l_{2k} \quad (3.13)$$

$$l_{2k} = - \sum_t J_{2t} \frac{(4t+1)(2t-1)!}{(2t+1)!(2t+1)} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2t-2} B_{2t+2k+1} b_{2k, 2t} f(n, \lambda)$$

$$f(n, \lambda) = 1 - \frac{2}{3} \frac{B_5}{2^5} b_{2,2} \lambda^5 + \frac{2}{3} \frac{B_5}{2^5} b_{2,2} b_{2,13} \lambda^8 \frac{B_{13}}{2^{13}} + \dots$$

$$M_2 = \frac{5}{24} \lambda^4 + \frac{\lambda^9}{2^5} l_2, \quad l_2 = - \frac{10}{9} B_5 + B_7 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 - B_9 \frac{13}{12} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^4 +$$

$$+ B_5 \frac{2^{160}}{2^7} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^5 + B_{11} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^8 \frac{85}{72} - \dots$$

$$M_4 = -\lambda^6 \frac{3}{80} + \frac{\lambda^{13}}{2^7} l_4, \quad l_4 = -2B_7 + B_9 \frac{84}{25} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - B_{11} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \frac{117}{20} + \dots$$

$$M_6 = \frac{13}{896} \lambda^8 + \frac{\lambda^{17}}{2^9} l_6, \quad l_6 = -B_9 \frac{20}{7}$$

$$M_8 = -\frac{17}{9 \cdot 2^8} \lambda^{10} + \frac{\lambda^{21}}{2^{11}} l_8, \quad M_{10} = \frac{49}{11 \cdot 2^{10}} \lambda^{12} + \frac{\lambda^{25}}{2^{13}} l_{10}, \quad l_8 = l_{10} = \dots = 0$$

Удержанное количество членов в разложениях (3.13) обеспечивает достаточную точность решения задачи. Условие на сфере будет выполнено с максимальной погрешностью в 3% для весьма неблагоприятного случая $\lambda = 0.9$. С уменьшением λ погрешность в удовлетворении условия на сфере резко падает.

4. Исследуем распределение давлений при ударе. Для этого, используя разложения φ_k , представим φ_1 в виде ряда по степеням λ

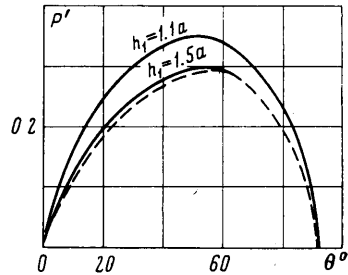
$$\varphi_1 = \varphi_\infty + u h_1 \cos \omega \lambda^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\lambda^{4k+1} + (2k+1)r^{4k+1}}{2kr^{2k+1}2^{2k+3}} l_{2k} P_{2k}^1 \quad (4.1)$$

$$\varphi_\infty = -ua \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k-1)!}{(2k+1)(2k+1)!} J_{2k} P_{2k}^1 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+1} \quad (4.2)$$

Здесь формула (4.2) — значение потенциала скоростей при бесконечной глубине.

Формулой (4.1) удобно пользоваться для расчета давлений в области, прилегающей к сфере. В частности, на самой сфере получаем

$$P = \rho u a \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k-1)!}{(2k+1)(2k+1)!} J_{2k} P_{2k}^1 - \rho u a \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^1 l_{2k} \frac{4k+1}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+3} \quad (4.3)$$



Фиг. 3

Распределение импульсивных давлений, отнесенных к $\rho u a$ для $\omega = 0$, показано на фиг. 3, 4.

На фиг. 3 пунктирной линией изображен график давлений для случая бесконечной глубины. Из фиг. 3, 4 видно, что уже при $h_1 \geq 1.5a$ влияние дна малосущественно и не может изменить давление более чем на 5%.

5. Присоединенную массу при ударе можно найти по формуле

$$m_+ = -\frac{\rho}{u^2} \iint_s \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds$$

$$m_+ = m_{+\infty} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho a^3 \pi \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+3} l_{2k} J_{2k} \quad (5.1)$$

Для $m_{+\infty}$, согласно [3], имеем

$$m_{+\infty} = 0.27322 \frac{2}{3} \rho a^3 \pi \quad (5.2)$$

Здесь $m_{+\infty}$ — присоединенная масса в случае бесконечной глубины.

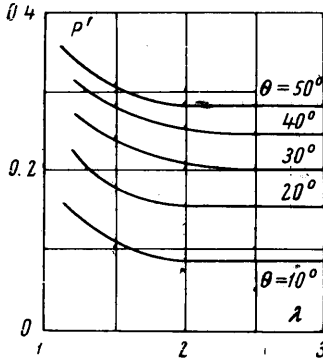
Значения отношений присоединенной массы в случае конечной и бесконечной глубины даны ниже

$\lambda = 0$	0.2	$2/7$	$1/3$	0.4	0.5	$2/3$	$9/10$
$\frac{m_+}{m_{+\infty}} = 1$	1.00011	1.00064	1.00136	1.00332	1.00981	1.03933	1.17646

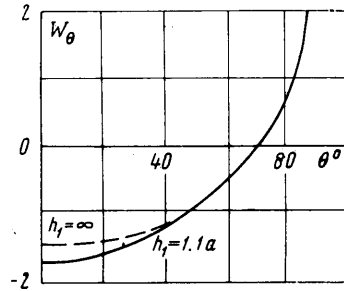
6. Относительная тангенциальная составляющая скорости жидкости на поверхности сферы определяется равенством [3]

$$w_{\theta} = w_{\theta\infty} + \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} l_{2k} \frac{4k+1}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+3} (P_{2k}^2 + P_{2k}^1 \operatorname{ctg} \theta) \quad (6.1)$$

$w_{\theta\infty}$ — относительная тангенциальная составляющая скорости жидкости на поверхности сферы при бесконечной глубине.

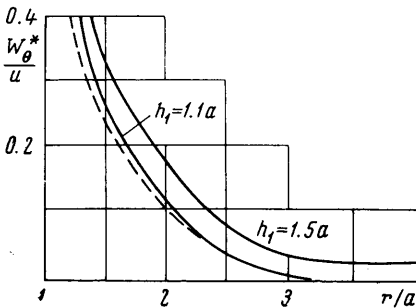


Фиг. 4

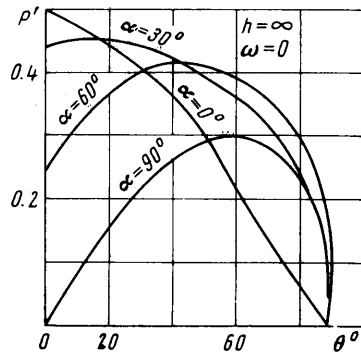


Фиг. 5

Распределение скоростей w_{θ} при $\omega = 0$ показано на фиг. 5. Пунктирной линией показан график $w_{\theta\infty}$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Вертикальная составляющая скорости на свободной поверхности определяется равенством

$$\frac{w_{\theta}^*}{u} = \frac{w_{\theta\infty}}{u} + \frac{a}{r} \cos \omega \sum_{k=1}^{\infty} l_{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k+3} \frac{(4k+1)(2k+1)!!(-1)^{k+3}}{2k(2k-2)!} \quad (6.2)$$

Распределение скоростей w_{θ}^* / u вдоль свободной поверхности показано на фиг. 6, где соответствующий график при бесконечной глубине изображен пунктирной линией.

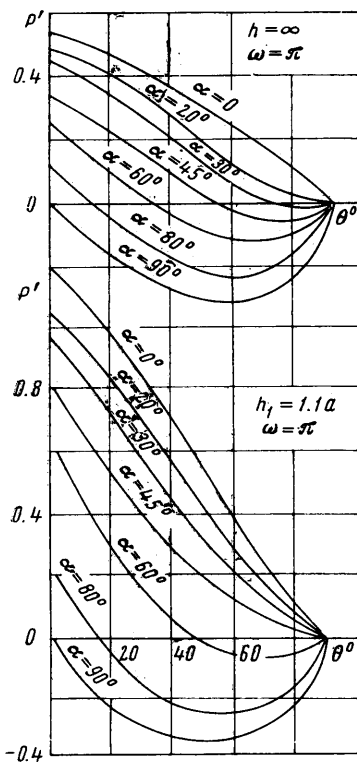
7. Рассмотрим косой удар сферы, погруженной в жидкость конечной глубины. Пусть сфера приходит во внезапное поступательное движение со скоростью v , образуя угол α с вертикалью. Тогда граничное условие на сфере в безразмерных координатах примет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=\lambda} = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \omega$$

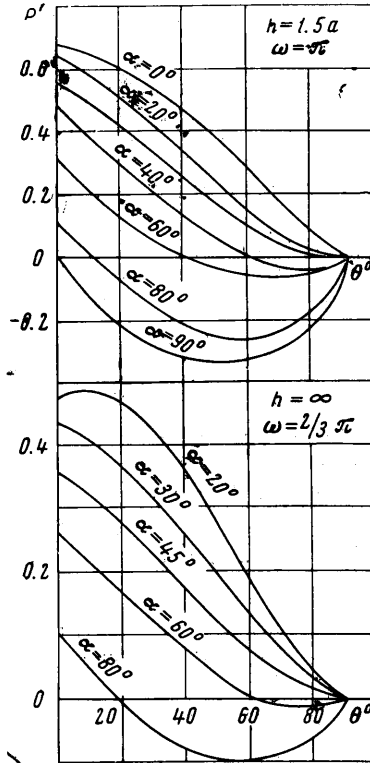
Решение уравнения Лапласа будем искать в виде

$$\varphi = \cos \alpha \varphi^{(1)} + \sin \alpha \varphi^{(2)}$$

где $\varphi^{(1)}$ — потенциал скоростей в случае вертикального удара, рассмотренного в [1],
 $\varphi^{(2)}$ — потенциал скоростей в случае горизонтального удара, рассмотренного выше.



Фиг. 8



Фиг. 9

На фиг. 7 дано распределение давлений на поверхности сферы для различных углов α при бесконечной глубине и $\omega = 0$.

На фиг. 8, 9 дано распределение давлений на поверхности сферы при $\omega = \pi$ и $\omega = 2/3\pi$ для различных глубин и углов α .

Из фигур видно, что в случае бесконечной глубины лишь удар при углах α порядка 30° и меньше не приводит к отрыву жидкости от поверхности сферы.

В случае конечной глубины область значений α , соответствующих безотрывному удару, несколько расширяется.

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 6 XII 1967

1. Жуковский Н. Е. Об ударе двух шаров, из которых один плавает в жидкости. Собрание сочинений, т. II. Госиздат, 1949.
2. Ворovich Л. С. Вертикальный удар шара, полупогруженного в жидкость конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
3. Блох Э. Л. Горизонтальный гидродинамический удар сферы при наличии свободной поверхности. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.