О МЕДЛЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ГАРТМАНА

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Рассматриваются медленные стационарные течения проводящей жидкости при больших значениях числа Гартмана и малых значениях магнитного числа Рейнольдса в неоднородном магнитном поле. Для основной части (ядра) потока, где можно не учитывать силы инерции и вязкости получено общее решение в явном виде. Рассмотрены граничные условия, которым должно удовлетворять это решение на внешних границах пограничных слоев, возникающих на стенках. Рассмотрены возможные типы поверхностей разрыва и других особенностей в ядре потока. Получено точное решение задачи о течении проводящей жидкости в трубе произвольного сечения в неоднородном магнитном поле.

Содержание предлагаемой работы представляет собой обобщение некоторых результатов о течениях в однородном магнитном поле, полученных в работах [1-8], на случай произвольных течений в неоднородном магнитном поле. Внимание автора к вопросам, рассматриваемым в работе, было привлечено докладом, который сделал профессор Дж. А. Шерклиф в Институте механики МГУ в мае 1967 г. о работах английских ученых, посвященных течениям проводящей жидкости в сильном однородном магнитном поле.

1. Общее решение. Рассмотрим медленные движения электропроводной несжимаемой жидкости в сильном магнитном поле. Будем считать, что силами инерции и вязкости можно пренебречь всюду за исключением узких пограничных слоев, тогда уравнение импульсов для ядра потока примет вид уравнения магнитной статики

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{c}\,\mathbf{j} \times \mathbf{H} \qquad \left(\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right) \tag{1.1}$$

Будем рассматривать стационарные или квазистационарные явления такие, что можно полагать

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi \tag{1.2}$$

Если известно решение системы уравнений (1.1), то потенциал φ и перпендикулярная к магнитному полю составляющая $\mathbf{v}_\perp$ скорости могут быть найдены из закона Ома, проекции которого на направление магнитного поля и на плоскость, перпендикулярную к нему, имеют вид

$$j_{\parallel} = \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \qquad \mathbf{j}_\perp = \sigma\left[(\operatorname{grad}\varphi)_\perp + \frac{\mathbf{v}_\perp}{c} \times \mathbf{H}\right] \tag{1.3}$$

Здесь σ — электропроводность, а $\partial / \partial s$ означает производную, взятую в направлении магнитного поля. Интегрируя первое уравнение (1.3), получим выражение для φ, которое будет содержать слагаемым произвольную функцию координат, не меняющуюся вдоль магнитных силовых линий. После нахождения $\mathbf{v}_\perp$ из второго уравнения (1.3), найдем продольную составляющую $v_{\parallel}$ из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.4}$$

Полученное таким образом выражение для $v_{\|}$ содержит слагаемое fH, где f — произвольная функция, принимающая постоянные значения на магнитных силовых линиях. Таким образом, каждому решению уравнений магнитной статики (1.1) могут быть поставлены в соответствие явные выражения для φ и $\mathbf{v}$.

Будем рассматривать в дальнейшем случай $p \ll H^2$. Тогда из уравнений (1.1) следует, что магнитное поле в первом уравнении (1.1) можно считать безвихревым и определяющимся внешними источниками

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} a \quad (a \text{ — заданная функция}). \tag{1.5}$$

Второе уравнение (1.1) в этом случае заменяется уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{1.6}$$

При этом давление может быть задано как произвольная функция, не меняющаяся вдоль магнитных силовых линий. Из уравнения (1.1) найдем

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c\mathbf{H}}{H^2} \times \operatorname{grad} p \tag{1.7}$$

Подставляя в (1.6) выражение (1.7), после интегрирования получим

$$j_{\|} = H \int \frac{c}{H^2} (\mathbf{H} \times \operatorname{grad} H^{-2}) \cdot \operatorname{grad} p da + AH \tag{1.8}$$

Здесь интегрирование ведется вдоль магнитной силовой линии по величине a, определенной равенством (1.6), A — произвольная функция, постоянная на каждой из магнитных силовых линий.

Из уравнения (1.3) получим

$$\sigma\varphi = c \int \int H^{-2} (\mathbf{H} \times \operatorname{grad} H^{-2}) \cdot \operatorname{grad} p da\, da + Aa + B \tag{1.9}$$

При этом интегрирование также производится вдоль магнитных силовых линий, а B — произвольная функция, не меняющаяся вдоль магнитных силовых линий. Проводимость σ предполагалась для простоты постоянной.

Из второго уравнения (1.3) получим

$$v_{\perp} = -\frac{c^2}{\sigma H^2} \operatorname{grad} p + \frac{c\mathbf{H}}{H^2} \times \operatorname{grad} \varphi \tag{1.10}$$

Используя выражение (1.10), из уравнения неразрывности (1.4) найдем

$$\begin{gathered} v_{\|} = H \int \left[\frac{c}{H^2} (\operatorname{grad} H^{-2} \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad} \varphi - \right. \\ \left. - \frac{c^2}{\sigma H^2} \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} H^{-2} - \frac{c^2}{\sigma H^4} \Delta p \right] da + CH \end{gathered} \tag{1.11}$$

Интегрирование ведется вдоль магнитных силовых линий, Δ — оператор Лапласа, а C — произвольная функция, постоянная на каждой из магнитных силовых линий.

Равенства (1.7) — (1.11) дают при заданном H общее решение системы уравнений (1.1), (1.3), (1.4), (1.6). Это решение содержит четыре произвольные функции p, A, B, C, принимающие постоянные значения на каждой из магнитных силовых линий. Решения типа (1.7) — (1.11) в случае однородного магнитного поля были получены ранее для некоторых частных видов течений в работах [1–5].

2. Граничные условия для ядра потока. Граничные условия для ядра потока представляют собой условия на внешней границе пограничного слоя, который возникает у стенки и преобразует граничные условия на стенке в граничные условия для ядра потока. В пристеночном пограничном слое, кроме магнитной силы и градиента давления, необходимо учитывать вязкость, а силами инерции по-прежнему можно пренебрегать. Пограничные слои подобного типа называются гартмановскими и для некоторых видов течений рассматривались ранее в работах [1, 5, 6]. Здесь будет рассмотрен пограничный слой при произвольной взаимной ориентации стенки, магнитного поля, градиента давления и градиента электрического потенциала в ядре потока, хотя это усложнение не приводит к каким-либо новым качественным выводам.

Уравнения, описывающие течение в пограничном слое, имеют вид

$$\mu\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial n^2} = \operatorname{grad} p + \frac{\sigma}{c}\mathbf{H}\times\operatorname{grad}\varphi + \frac{\sigma H^2}{c^2}\mathbf{v} - \frac{\sigma}{c^2}\mathbf{H}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{v})$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} - \frac{1}{c}\left(\mathbf{H}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right)_n = 0 \tag{2.1}$$

Здесь n — расстояние, отсчитываемое по нормали к поверхности стенки.

Первое уравнение получается подстановкой закона Ома в уравнение импульсов, а второе представляет собой уравнение неразрывности электрического тока.

Будем считать, что нормальная к поверхности составляющая магнитного поля H_n отлична от нуля. Будем считать также, что в пограничном слое нормальная к поверхности компонента скорости равна нулю, а касательные составляющие градиентов потенциала и давления совпадают с их значениями в ядре потока.

Обозначим, соответственно, через $\mathbf{u}$, Φ и P разности

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \qquad \Phi = \varphi - \varphi_0, \qquad P = p - p_0,$$

где $\mathbf{v}_0$, φ_0 и p_0 — значения скорости, потенциала и давления в ядре.

Интегрируя второе уравнение (2.1), считая, что $\mathbf{H}$ не меняется на толщине пограничного слоя, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{1}{c}(\mathbf{H}\times\mathbf{u})_n \tag{2.2}$$

Используя это выражение и уравнение (2.1), получим уравнение для $\mathbf{u}$:

$$\mu\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial n^2} = \operatorname{grad} P + \frac{\sigma}{c^2}H_n^2\mathbf{u} - \frac{\sigma}{c^2}H_n^2(\mathbf{H}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности.

Так как $u_n = 0$, то проектируя уравнение (2.3) на нормаль к поверхности, получим

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\sigma}{c^2}H_n(\mathbf{H}\cdot\mathbf{u}) \tag{2.4}$$

Проектируя уравнение (2.3) на касательную к стенке плоскость, получим уравнение

$$\mu\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial n^2} = \frac{\sigma}{c^2}H_n^2\mathbf{u} \tag{2.5}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющего граничным условиям на стенке и в бесконечности, имеет вид

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v}\exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}\frac{H_n}{c}n\right) \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{v}$ определяется равенством (1.10) и условием $v_n = 0$:

$$\mathbf{v} = -\frac{c^2}{\sigma H^2}\operatorname{grad} p + \frac{c\mathbf{H}}{H^2}\times\operatorname{grad}\varphi + \frac{c^2\mathbf{H}}{H_n H^2}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{1}{c}(\mathbf{H}\times\operatorname{grad}\varphi)_n\right] \tag{2.7}$$

Из равенства (2.6) следует, что отношение толщины пограничного слоя к характерному размеру течения L имеет порядок $1/M$, где $M = \sqrt{\sigma}HL / c\sqrt{\mu}$ — число Гартмана.

При $M \gg 1$ вдали от стенок образуется ядро потока, где справедливы формулы (1.7) — (1.11). Условие $M \gg 1$ будем в дальнейшем считать всегда выполненным.

Нетрудно при помощи закона Ома и уравнений (2.4), (2.2) вычислить полный ток $\mathbf{I}$, протекающий в пограничном слое, изменение давления δp и изменение потенциала $\delta\varphi$ поперек пограничного слоя

$$\mathbf{I} = \frac{\sigma}{c}\int(\mathbf{u}\times\mathbf{H})_\tau dn = \sqrt{\sigma\mu}(\mathbf{v}\times\mathbf{n}) \tag{2.8}$$

$$\delta p = \frac{\sigma}{c^2}H_n^2\int(\mathbf{H}\cdot\mathbf{u})dn = \frac{\sqrt{\sigma\mu}}{c}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}) \tag{2.9}$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{c}\int(\mathbf{H}\times\mathbf{u})_n dn = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\frac{1}{H_n}(\mathbf{H}\times\mathbf{v})_n \tag{2.10}$$

где индексом τ обозначены касательные к поверхности компоненты векторов.

Равенства (2.7) — (2.10) показывают, что величины $\mathbf{I}$, δp и $\delta\varphi$ имеют следующие порядки величины:

$$\mathbf{I} \sim \frac{c}{H_0}\delta p \sim \sigma\delta\varphi \sim \frac{1}{M}\max\left\{\frac{cp}{H_0}, \sigma L E_\perp\right\} \tag{2.11}$$

Здесь H_0, $E_\perp$ — характерные значения напряженности магнитного поля и поперечной составляющей электрического поля. Заметим, что изменение давления и потенциала в пограничных слоях не может привести к заметному изменению скорости в ядре потока. Действительно, изменения граничных значений потенциала и давления могут изменить градиенты этих величин в ядре потока на величины $\delta p / L$ и $\delta\varphi / L$, и, как нетрудно убедиться, соответствующие изменения скорости составят величину порядка $1/M$ от ее первоначального значения.

Поэтому на электродах величиной $\delta\varphi$ во многих случаях можно пренебрегать, и граничное условие для ядра потока записывать в виде

$$\varphi = \varphi_э \tag{2.12}$$

На непроводящей стенке нужно потребовать выполнение равенства

$$\operatorname{div}\mathbf{I} + j_n = 0$$

Здесь div берется в касательной плоскости к поверхности стенки, а j_n — нормальная к стенке составляющая плотности тока в ядре. Это равенство, которое, в силу (2.7), можно записать в виде

$$\sqrt{\sigma\mu}(\operatorname{rot}\mathbf{v})_n + j_n = 0 \tag{2.13}$$

представляет собой граничное условие для ядра потока на непроводящих стенках. Если $f_\parallel$ имеет тот же порядок величины, что и $f_\perp$, то величина I

имеет по отношению к характерному току $j_\perp L$ в ядре потока следующий порядок величины:

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\left[1+\frac{\sigma H_0 L E_\perp}{p}\right] \tag{2.14}$$

Рассмотрим течения проводящей жидкости в некотором ограниченном объеме, когда каждая магнитная силовая пересекает две стенки, ограничивающие жидкость. Суммарный ток, притекающий из ядра потока к обоим пограничным слоям, определяется величиной $j_\perp$, а также формой стенок и магнитного поля. Если обе стенки — изоляторы, то этот ток вливается в токи, текущие по пограничным слоям. Как видно из (2.14), протекание значительных токов в пограничных слоях вызывает появление сильного электрического поля $E_\perp$.

В случае, когда одна из стенок — электрод, а другая — изолятор, возникновению сильного электрического поля в области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими электрод, препятствует наличие электрода с заданным потенциалом. Поэтому током в пограничном слое на непроводящей стенке можно пренебречь и равенство (2.13) примет вид

$$j_n = 0 \tag{2.15}$$

В этом случае ток из ядра потока протекает только к электроду, и условие (2.15) позволяет определить произвольную функцию в равенстве (1.8).

3. Поверхностные особенности в решении для ядра потока. Общее решение (1.7)—(1.11), описывающее ядро потока, допускает существование в нем поверхностей, на которых величины, представляющие решение, терпят разрыв или имеют другие особенности. Эти особенности определяются особенностями поведения произвольных функций p, A, B, C, входящих в решение. Равенства (1.7) — (1.11) показывают, что изменение всех величин в направлении магнитного поля происходит непрерывной, а особенности могут возникать на поверхностях, состоящих из магнитных силовых линий. Решения (1.7) — (1.11) с особеностями могут быть получены как предел последовательности решений, не содержащих особенностей. Они могут использоваться для приближенной замены решений с быстрым изменением величин в окрестности некоторой поверхности.

Выражения, содержащие главные особенности в узком слое с резким изменением величин можно получить, если сохранить в правых частях равенств (1.7)—(1.11) только члены, содержащие производные от p и φ по нормали к слою. Будем записывать полученные таким образом выражения в виде соответствующей величины в квадратных скобках

$$[\mathbf{j}_\perp] = \frac{c}{H}\frac{\partial p}{\partial n}\boldsymbol{\tau} \tag{3.1}$$

$$[j_\parallel] = H\int \frac{c}{H}\frac{\partial H^{-2}}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial n}\,da + AH \tag{3.2}$$

$$[\varphi] = \frac{c}{\sigma}\int\!\!\int \frac{c}{H}\frac{\partial H^{-2}}{\partial \tau}\frac{\partial p}{\partial n}\,da\,da + Aa + B \tag{3.3}$$

$$[\mathbf{v}_\perp] = -\frac{c^2}{\sigma H^2}\frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{n} + \frac{c}{H}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\boldsymbol{\tau} \tag{3.4}$$

$$[v_\parallel] = -\frac{c^2}{\sigma}H\int\left(\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}+\frac{1}{H}\frac{\partial H^{-2}}{\partial \tau}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)da + CH \tag{3.5}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль, а $\boldsymbol{\tau}$ — вектор, перпендикулярный к магнитному полю и лежащий в касательной плоскости к поверхности.

Эти равенства позволяют очевидным образом найти соотношения на поверхностях сильного и слабого разрывов, которые возникают, если претерпевают разрыв величины $\partial^2 p / \partial n^2$, $\partial\varphi / \partial n$ или их производные. Если же рвутся φ, $\partial p / \partial n$ или p, то решение будет содержать дельта-функции или производные от дельта-функций.

Причина возникновения особенностей в решении связана с разрывами величин, задающих граничные условия на стенках. Рассмотрим пример. Пусть обе стенки, ограничивающие течение, представляют собой перфорированные электроды с заданным непрерывным распределением потенциала. Через отверстия в электродах осуществляется отсос или вдув жидкости и пусть при помощи отсоса и вдува создано распределение давления с разрывом на некоторой поверхности. Тогда, как это следует из равенств (3.1) — (3.5), на этой поверхности $\mathbf{j}$ и φ содержат дельта-функции, а $\mathbf{v}$ — производную от дельта-функции. Наличие таких особенностей у $j_\parallel$, φ и $\mathbf{v}_\perp$ связано с неоднородностью магнитного поля. В однородном поле эти функции будут содержать особенности более низкого порядка.

Другие примеры возникновения особенностей будут рассмотрены ниже при изучении течений проводящей жидкости в трубах. В частности, особенности образуются вдоль магнитных силовых линий, пересекающих угловые точки контура трубы.

При учете сил инерции и вязкости рассмотренные выше особенности «размажутся» и превратятся в узкие пограничные слои, расположенные внутри ядра потока. В случае однородного магнитного поля особенности, сосредоточенные на поверхностях, при переходе через которые рвется $\partial^2 p/\partial n^2$ и $v_\parallel$ или φ, а также соответствующие этим особенностям пограничные слои рассматривались в работах [3, 7, 8].

4. Течение проводящей жидкости с прямолинейными линиями тока в трубе произвольного поперечного сечения в неоднородном магнитном поле. В качестве примера рассмотрим течения с прямолинейными линиями тока в трубе постоянного сечения произвольной формы при больших числах Гартмана. В этом случае силы инерции точно равны нулю и, кроме того, решение сохраняет свой вид при любых значениях магнитного числа Рейнольдса.

Эта задача решалась ранее только в случае однородного внешнего поля [1, 2, 7, 8]. Равенства (1.7) — (1.11) позволяют выписать в явном виде решение для течения в трубе при произвольном магнитном поле.

В плоскости yz, перпендикулярной направлению течения, введем криволинейные координаты и будем характеризовать положение точки потенциалом a и функцией тока b для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. Координатные линии $b = \text{const}$ совпадают с магнитными силовыми линиями, а кривые $a = \text{const}$ ортогональны к ним. При этом переход от плоскости yz к плоскости ab задается аналитической функцией $a + ib$. Такое преобразование рассматривалось ранее для течений с конечными числами Гартмана в работе [9].

Введем функцию тока ψ для электрического тока, так что

$$j_\parallel = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial b}, \qquad j_\perp = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial a} \tag{4.1}$$

Тогда общее решение (1.7) — (1.11) можно записать в следующем виде:

$$\psi = -K\int H^{-2}\,da + A(b) \tag{4.2}$$

$$\sigma\varphi = -K\int\int\frac{\partial H^{-2}}{\partial b}\,da\,da + A'(b)a + B(b) \tag{4.3}$$

$$\frac{\sigma}{c}u = \frac{K}{H^2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial b} \qquad K = -c\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \tag{4.4}$$

Здесь $A(b)$ и $B(b)$ — произвольные функции, определяемые из граничных условий.

Пусть контур трубы задан уравнениями $a = a_1(b)$, $a = a_2(b)$, причем $a_1 < a_2$ при $b_1 < b < b_2$.

Обозначим через $F(a, b)$ какую-либо реализацию неопределенного интеграла

$$F(a,b) = \int\int H^{-2}\,da\,da$$

Через F_a и F_b будем обозначать частные производные по a и b, соответственно.

Тогда, используя равенство (2.13) найдем решение в области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими две непроводящие стенки

$$\psi = -KF_a(a,b) + \frac{1}{2}K[F_a(a_1,b) + F_a(a_2,b)] + \frac{Q}{2} \tag{4.5}$$

$$\varphi = \frac{K}{2c\sqrt{\sigma\mu}}\int[F_a(a_2,b) - F_a(a_1,b)]\,db - \frac{Q}{2c\sqrt{\sigma\mu}}b + \text{const} \tag{4.6}$$

$$u = -\frac{K}{2\sqrt{\sigma\mu}}[F_a(a_2,b) - F_a(a_1,b)] + \frac{Q}{2\sqrt{\sigma\mu}} \tag{4.7}$$

Здесь a_1, a_2 — заданные функции b; Q — постоянная, равная полному току, текущему в поперечном сечении трубы перпендикулярно магнитному полю. В выражениях (4.5) — (4.7) отброшены члены, имеющие порядок $1/M$ по отношению к оставленным. Величина Q может быть задана (при отсутствии электродов $Q = 0$) или может определяться по разности $\varphi^* - \varphi^{**}$ значений потенциала на электродах, ближе всего расположенных к рассматриваемой области. В последнем случае величина Q находится из уравнения

$$\varphi(b^*) - \varphi(b^{**}) = \varphi^* - \varphi^{**}$$

Здесь $\varphi(b)$ — функция, определенная равенством (4.6), b^* и b^{**} — нижняя граница ближайшего верхнего электрода и верхняя граница ближайшего нижнего электрода.

В области, занятой магнитными силовыми линиями, пересекающими два электрода с заданной постоянной разностью потенциалов N, функция электрического тока и потенциал выражаются следующим образом:

$$\psi = -KF_a(a,b) + \int\frac{\sigma N + K[F_b(a_2,b) - F_b(a_1,b)]}{a_2 - a_1}\,db \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\sigma\varphi = -KF_b(a,b) + \sigma N\frac{a - a_1}{a_2 - a_1} + \\ + K\frac{[F_b(a_2,b) - F_b(a_1,b)]\,a - [F_b(a_1,b)\,a_2 - F_b(a_2,b)\,a_1]}{a_2 - a_1}\end{aligned} \tag{4.9}$$

И, наконец, в области между электродом $a = a_1(b)$ с постоянным значением потенциала и изолятором $a = a_2(b)$ решение имеет вид

$$\psi = K[F_a(a_2,b) - F_a(a_1,b)] \tag{4.10}$$

$$\sigma\varphi = -K[F_b(a,b) - F_b(a_1,b)] + (a - a_1)K\frac{dF_a(a_2,b)}{db} \tag{4.11}$$

Отметим следующие характерные черты полученных решений. При $\mu \to 0$ скорость и потенциал в области между изолирующими стенками стремятся к бесконечности, в то время как в остальной части трубы остаются конечными. Если производная функции, задающей уравнение электрода, терпит разрыв, то, как следует из равенств (4.9), (4.11) и (4.4), в потоке образуется поверхность разрыва скорости. Если рвется производная функции, задающей уравнение стенки-изолятора, то, как следует из (4.11), возникает поверхность, на которой рвется потенциал, а выражение для скорости содержит дельта-функцию. Границы между областями различных типов представляют собой поверхности, на которых сосредоточены особенности решения. Тип особенностей определяется поведением потенциала.

В случае однородного магнитного поля a и b представляют собой декартовы координаты в сечении трубы, $\Phi(a, b) = a^2 / 2H^2$, и решение переходит в известные решения [1, 2].

Поступило 22 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1953, vol. 49, p. 136.
2. Брагинский С. И. К магнитной гидродинамике слабо проводящих жидкостей. ЖЭТФ, 1959, т. 37, № 5.
3. Ludford G. S. S. The Effeckt of a very strong magnetic crossfield on a steady motion through a slightly conducting fluid. J. Fluid Mech. 1961, vol. 10, No 1, p. 141.
4. Ludford G. S. S., Singh M. P. Motion of a nonconducting sphere through a conducting fluid in a magnetic field. Proc. Camb. Phil. Soc. 1963, vol. 59, p. 615.
5. Hunt J. C. R., Leibovich S. Magnetohydrodynamic flow in chanuels of variable cross-section with strong transverse magnetic field. J. Fluid Mech. 1967, vol. 28, p. 241.
6. Hunt J. C. R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 4, p. 577.
7. Moffatt H. K. Electrically driven steady flows in magnetohydrodynamics. Proc. 11th Inst. Cong. Appl. Mech. Munich, 1964, Springer — Verlag, 1966.
8. Alty C. J. N. Magnetohydrodynamic duct flow. Ph. D. Thesis Cambridge University, 1966.
9. Якубенко А. Е. Стационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости по трубам в однородном и неоднородном магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.