ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

НГУЕН ВАН ДЬЕП, А. Т. ЛИСТРОВ

(Воронеж)

Устойчивость течения слоя жидкости на наклонной плоскости с учетом спина молекул [1, 2] рассматривалась в [3] при условии отсутствия моментных напряжений внутри жидкости. В [3] было показано, что спин молекул оказывает дестабилизирующее влияние на течение. Ниже исследуется совместное влияние спина молекул и внутренних моментных напряжений на поведение трехмерных возмущений. Устанавливается справедливость теоремы Сквайра. Устойчивость течения слоя относительно длинноволновых возмущений исследуется методом последовательных приближений [4, 5] при предположении, что коэффициент вращательной вязкости η_r значительно меньше коэффициента ньютоновской вязкости η.

1. Воспользуемся уравнениями движения несжимаемой вязкости жидкости [1, 2] в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0,\quad \frac{dv_k}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_k}+\frac{1+\delta}{R}\Delta v_k+\frac{2\delta}{R}[\nabla\times\omega]_k+f_k \qquad (k,l=1,2,3)$$

$$\frac{d\omega_k}{dt}=\frac{ED}{R}\Delta\omega_k+\frac{ED_1}{R}\frac{\partial^2\omega_l}{\partial x_k\,\partial x_l}-\frac{2\delta E}{R}[2\omega_k-(\nabla\times v)_k]$$

$$\delta=\frac{\eta_r}{\eta},\quad E=\frac{h^2}{J}\quad R=\frac{Uh\rho}{\eta},\quad U=\frac{\rho g h^2\sin\gamma}{3\eta}$$

$$D=D_d+D_a$$

$$D_1=D_0+D_d-D_a,\quad D_0=\frac{c}{\eta h^2},\quad D_d=\frac{c_d}{\eta h^2},\quad D_a=\frac{c_a}{\eta h^2} \tag{1.1}$$

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right\},\quad \Delta=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^2},\frac{\partial}{\partial x_2^2},\frac{\partial}{\partial x_3^2}\right\}$$

$$f_1=\frac{3}{R},\quad f_2=\frac{3\operatorname{ctg}\gamma}{R},\quad f_3=0$$

Здесь f_1, f_2, f_3 — безразмерные проекции силы тяжести на оси безразмерных декартовых координатах x_1, x_2, x_3; проекции вектора угловой скорости отнесены к величине U/h, давление p, время t, координаты x_1, x_2, x_3 отнесены соответственно к величинам ρU^{-1}, hU^{-1}, h, v_k — проекции скорости, отнесенные к величине U, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, γ — угол наклона плоскости, по которой стекает жидкость, h — толщина слоя, J — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, C_0, C_d, C_a — коэффициенты моментной вязкости [1, 2].

Безразмерные компоненты тензора вязких напряжений τ_{kj} и компоненты тензора моментных напряжений μ_{kj} удовлетворяют соотношениям [1]

$$\tau_{kj}=-p\delta_{kj}+\pi_{kj}{}^d+\pi_{kj}{}^a,\quad \pi_{kj}{}^d=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)$$

$$\pi_{kj}{}^a = \frac{\delta}{R}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - 2\varepsilon_{kjl}\omega_l\right) \tag{1.2}$$

$$\mu_{kj} = \frac{D_0}{R}\frac{\partial \omega_k}{\partial x_k}\delta_{kj} + \frac{D_d}{R}\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}\right) + \frac{D_a}{R}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}\right)$$

$(k,\ j = 1,\ 2,\ 3)$

Здесь δ_{kj} — символы Кронекера, ε_{kjl} — единичный абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга [1].

Уравнения (1.1) имеют точное решение

$$v_1{}^\circ = -\frac{3}{2}x_2{}^2 + \frac{2\delta}{1+\delta}\left(a_1\frac{\operatorname{ch} mx_2}{m} + a_2\frac{\operatorname{sh} mx_2}{m}\right) - 2a_3x_2 + a_4 \tag{1.3}$$

$$\omega_3{}^\circ = \frac{3}{2}x_2 + a_1\operatorname{ch} mx_2 + a_2\operatorname{sh} mx_2 + a_3, \qquad m = 2\left[\frac{\delta}{D(1+\delta)}\right]^{1/2}$$

$$p^\circ = a_5 + 3R^{-1}x_2\operatorname{ctg}\gamma, \qquad v_2{}^\circ = v_3{}^\circ = \omega_1{}^\circ = \omega_2{}^\circ = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} m}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} m}{m} - 1\right) + \frac{3\delta}{2(1+\delta)m}\right], \qquad a_2 = -\frac{3}{2m}$$

$$a_3 = -\frac{3\delta}{2(1+\delta)m}, \quad a_4 = 3 + \frac{D}{4}\operatorname{sh} m - \frac{3}{4}\frac{\delta D}{1+\delta}, \quad a_5 = p_a$$

где p_a — безразмерное атмосферное давление.

Соотношения (1.3) описывают установившееся течение слоя жидкости на наклонной плоскости в системе координат x_1, x_2, x_3, начало которой расположено на плоской свободной поверхности слоя, ось x_1 направлена по линии наибольшего ската, ось x_2 — внутрь жидкости.

При определении a_i в (1.3) использовались условия равенства нулю моментных и касательных напряжений на поверхности слоя

$$\tau_{12}{}^\circ(0) = \mu_{23}{}^\circ(0) = 0, \qquad \tau_{22}{}^\circ(0) = -p_a \tag{1.4}$$

На твердой плоскости $x_2 = 1$ были использованы условия полного прилипания

$$v_1{}^\circ(1) = \omega_3{}^\circ(1) = 0 \tag{1.5}$$

Вместо последнего из равенств (1.5) можно принять условие обращения в нуль на твердой плоскости силового вектора, обусловленного антисимметричной частью силовых напряжений [2]

$$dv_1{}^\circ / dx_2 + 2\omega_3{}^\circ = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 1 \tag{1.6}$$

При использовании условия (1.6) течение слоя по-прежнему описывается соотношениями (1.3), в которых только a_1 и a_4, имеют другой вид

$$a_1 = \frac{3}{2m}\left(\operatorname{sh} m + \frac{\delta}{1+\delta}\operatorname{ch} m\right)\left(\operatorname{ch} m - \frac{\delta}{1+\delta}\operatorname{sh} m\right)^{-1}$$

$$a_4 = 3 + \frac{3D}{4}\operatorname{sh} m - \frac{3\delta}{m(1+\delta)} - \tag{1.7}$$

$$-\frac{3}{4}D\operatorname{ch} m\left(\operatorname{sh} m + \frac{\delta}{1+\delta}\operatorname{ch} m\right)\left(\operatorname{ch} m - \frac{\delta}{1+\delta}\operatorname{sh} m\right)^{-1}$$

2. Рассмотрим устойчивость течения (1.3) по отношению к трехмерным периодическим возмущениям. Такие возмущения представляют собой трехмерную цилиндрическую волну, распространяющуюся под углом θ к направлению течения [3]. Поэтому в системе координат xyz, в которой ось y направлена по оси x_2, а ось x ортогональна фронту волны, эти возмущения имеют форму

$$q_j' = q_j^*(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}, \qquad c = c_r + ic_i \qquad (j = x, y, z) \tag{2.1}$$

где q_j' — элементарные волновые возмущения проекций векторных характеристик основного течения (1.3), q_j^* — комплексные амплитуды, величины α, c_r, c_i — вещественные постоянные. В новой системе координат xyz решение (1.3) имеет вид

$$\begin{gathered}
v_x^\circ = v_1^\circ \cos\theta, \quad v_z^\circ = -v_1^\circ \sin\theta, \quad v_y^\circ = \omega_y^\circ = 0 \\
\omega_x^\circ = \omega_3^\circ \sin\theta, \quad \omega_z^\circ = \omega_3^\circ = \cos\theta \\
\tau_{xx}^\circ = \tau_{11}^\circ, \quad \tau_{yy}^\circ = \tau_{22}^\circ, \quad \tau_{yz}^\circ = -\tau_{21}^\circ \sin\theta, \quad \tau_{yx}^\circ = \tau_{21}^\circ \cos\theta \\
\mu_{xx}^\circ = \mu_{11}^\circ, \quad \mu_{yy}^\circ = \mu_{22}^\circ, \quad \mu_{yz}^\circ = -\mu_{21}^\circ \sin\theta, \quad \mu_{yx}^\circ = \mu_{21}^\circ \cos\theta
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Рассмотрим в системе координат xyz нестационарные трехмерные течения, близкие к основному течению (2.2). Параметры возмущенного движения представим в форме $q = q^\circ(y, t) + q'(x, y, t)$, где q' — малое возмущение параметра q° невозмущенного слоя.

Уравнения для малых трехмерных возмущений имеют вид [6]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_x'}{\partial i} + v_1^\circ \frac{\partial v_x'}{\partial x}\cos\theta + \frac{dv_1^\circ}{dy} v_y' \cos\theta = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1+\delta}{R}\Delta v_x' - \frac{2\delta}{R}\frac{\partial \omega_z'}{\partial y} \\
\frac{\partial v_y'}{\partial t} + v_1^\circ \frac{\partial v_y'}{\partial x}\cos\theta = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1+\delta}{R}\Delta v_y' - \frac{2\delta}{R}\frac{\partial \omega_z'}{\partial y} \\
\frac{\partial v_z'}{\partial t} + v_1^\circ \frac{\partial v_z'}{\partial x}\cos\theta - \frac{dv_1^\circ}{dy} v_y' \sin\theta = \\
= \frac{1+\delta}{R}\Delta v_z' + \frac{2\delta}{R}\left(\frac{\partial \omega_y'}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x'}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial \omega_x'}{\partial t} + v_1^\circ \frac{\partial \omega_x'}{\partial x}\cos\theta + \frac{d\omega_3^\circ}{dy} v_y' \sin\theta = \\
= \frac{ED}{R}\Delta\omega_x' + \frac{ED_1}{R}\left(\frac{\partial^2 \omega_x'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y'}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{2\delta E}{R}\left(\frac{\partial v_z'}{\partial y} - 2\omega_x'\right) \\
\frac{\partial \omega_y'}{\partial t} + v_1^\circ \frac{\partial \omega_y'}{\partial x}\cos\theta = \\
= \frac{ED}{R}\Delta\omega_y' + \frac{ED_1}{R}\left(\frac{\partial^2 \omega_x'}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 \omega_y'}{\partial y^2}\right) - \frac{2\delta E}{R}\left(\frac{\partial v_z'}{\partial x} + 2\omega_y'\right) \\
\frac{\partial \omega_z'}{\partial t} + v_1^\circ \frac{\partial \omega_z'}{\partial x}\cos\theta + \frac{d\omega_3^\circ}{dy} v_y' \cos\theta = \\
= \frac{ED}{R}\Delta\omega_z' + \frac{2\delta E}{R}\left(\frac{\partial v_y'}{\partial x} - \frac{\partial v_x'}{\partial y} - 2\omega_z'\right) \qquad \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} = 0 \\
\Delta = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь v_x', v_y', v_z', ω_x', ω_y', ω_z' — малые возмущения проекций вектора обычной скорости и угловой скорости спина молекул на оси x, y, z.

Решение уравнений (2.3) представим в форме

$$v_x' = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y' = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi = \varphi(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}, \quad v_z' = v_z^*(y)\,e^{i\alpha(x-ct)} \tag{2.4}$$

$$\omega_k' = \omega_k^*(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}, \qquad p' = p^*(y)\,e^{i\alpha(x-ct)} \qquad (k = x, y, z)$$

Из (2.3) и (2.4) находим соотношения, которым должны удовлетворять амплитуды φ, ω_k^*, v_z^*

$$\frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \alpha^4\varphi =$$

$$= \frac{i\alpha R}{1+\delta}\left[\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2\varphi\right)(v_1^\circ\cos\theta - c) - \varphi\frac{d^2v_1^\circ}{dy^2}\cos\theta\right] -$$

$$-\frac{2\delta}{1+\delta}\left(\frac{d^2\omega_z^*}{dy^2} - \alpha^2\omega_z^*\right)$$

$$\frac{d^2\omega_z^*}{dy^2} - \alpha^2\omega_z^* - \frac{4\delta}{D}\omega_z^* - \frac{i\alpha R}{ED}(v_1^\circ\cos\theta - c)\,\omega_z^* =$$

$$= \frac{2\delta}{D}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2\varphi\right) - \frac{i\alpha R}{ED}\varphi\frac{d\omega_3^\circ}{dy}\cos\theta$$

$$i\alpha v_z^*(v_1^\circ\cos\theta - c) + i\alpha\varphi\frac{dv_1^\circ}{dy}\sin\theta =$$

$$= \frac{1+\delta}{R}\left(\frac{d^2v_z^*}{dy^2} - \alpha^2v_z^*\right) + \frac{2\delta}{R}\left(i\alpha\omega_y^* - \frac{d\omega_x^*}{dy}\right)$$

$$i\alpha\omega_x^*(v_1^\circ\cos\theta - c) - i\alpha\varphi\frac{d\omega_3^\circ}{dy}\sin\theta = \frac{i\alpha ED_1}{R}\left(i\alpha\omega_x^* + \frac{d\omega_y^*}{dy}\right) +$$

$$+\frac{ED}{R}\left(\frac{d^2\omega_x^*}{dy^2} - \alpha^2\omega_x^*\right) + \frac{2\delta E}{R}\left(\frac{dv_z^*}{dy} - 2\omega_x^*\right) \tag{2.5}$$

$$i\alpha\omega_y^*(v_1^\circ\cos\theta - c) = \frac{ED_1}{R}\left(i\alpha\frac{d\omega_x^*}{dy} + \frac{d^2\omega_y^*}{dy^2}\right) +$$

$$+\frac{ED}{R}\left(\frac{d^2\omega_y^*}{dy^2} - \alpha\omega_y^*\right) - \frac{2\delta E}{R}(i\alpha v_z^* - 2\omega_y^*)$$

Поставим граничные условия для φ, v_z^*, ω_x^*, ω_y^*, ω_z^*.

На твердой поверхности $y = 1$ возмущения v_x', v_y', v_z' обращаются в нуль. Поэтому для φ и v_z^* имеем условия

$$\varphi(y) = d\varphi(y)\,/\,dy = v_z^*(y) = 0, \qquad \text{при } y \neq 1 \tag{2.6}$$

Для возмущений скорости вращения молекул следует принять условия

$$\omega_x^*(1) = \omega_y^*(1) = \omega_z^*(1) = 0 \tag{2.7}$$

если при определении решения (1.3) использовалось условие полного прилипания жидкости к твердой стенке.

Если в (1.3) вместо последнего из условий (1.5) использовалось условие (1.6), то вместо (2.7) следует принять на плоскости $y = 1$ условия

$$\alpha^2\varphi - \frac{d^2\varphi}{dy^2} - 2\omega_z^* = i\alpha v_z^* + 2\omega_y^* = \frac{dv_z^*}{dy} - 2\omega_z^* = 0 \quad \text{при } y = 1 \tag{2.8}$$

Соотношения (2.8) следуют из равенств нулю компонент антисимметричного тензора возмущений силовых напряжений на твердой плоскости.

Будем считать, что на возмущенную поверхность слоя действует только нормальное давление атмосферы и давление, обусловленное поверхностным натяжением. Линеаризируя обычным образом динамические условия на поверхности слоя, получим соотношения для напряжений

$$\begin{gathered}\frac{d\tau_{yx}^\circ}{dy}y' + \tau_{yz}' = 0, \quad \frac{d\tau_{yy}^\circ}{dy}y' + \tau_{yy}' + S\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} = 0 \quad \left(S = \frac{T}{\rho U^2 h}\right)\\ \frac{d\tau_{yz}^\circ}{dy}y' + \tau_{yz}' = 0, \quad \frac{d\mu_{yx}^\circ}{dy}y' + \mu_{yz}' = 0 \quad \text{при } y = 0\\ \frac{d\mu_{yy}^\circ}{dy}y' + \mu_{yy}' = 0, \quad \frac{d\mu_{yz}^\circ}{dy}y' + \mu_{yz}' = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения τ_{yx}°, τ_{yz}°, τ_{yy}° вычисляются при помощи (1.2), (1.3), (2.2), а их возмущения τ_{yx}', τ_{yz}', τ_{yy}' могут быть выражены через φ, v_z^*, ω_k^* при помощи соотношений (1.2) и (2.4). В (2.9) $y' = y'(x, t)$ — уравнение возмущенной поверхности слоя.

Из (2.9) с учетом кинематического условия [3] находим

$$\left[(1+\delta)\frac{d^2 v_1^\circ}{dy^2} + 2\delta\frac{d\omega_3^\circ}{dy}\right]\frac{\varphi\cos\theta}{c - v_1^\circ\cos\theta} + (1+\delta)\frac{d^2\varphi}{dy^2} + (1-\delta)\alpha^2\varphi + 2\delta\omega_z^* = 0$$

$$(3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2)\frac{\varphi}{c - v_1^\circ\cos\theta} + Rp^* + 2i\alpha\frac{d\varphi}{dy} = 0$$

при $y = 0$ $\quad (S' = SR)$

$$\frac{d^2\omega_3^\circ}{dy^2}\frac{\varphi\cos\theta}{c - v_1^\circ\cos\theta} + \frac{d\omega_z^*}{dy} = 0 \tag{2.10}$$

$$\left[(1+\delta)\frac{d^2 v_1^\circ}{dy^2}\sin\theta + 2\delta\frac{d\omega_3^\circ}{dy}\right]\frac{\varphi}{c - v_1^\circ\cos\theta} - (1+\delta)\frac{dv_z^*}{dy} + 2\delta\omega_z^* = 0$$

$$D\frac{d^2\omega_3^\circ}{dy^2}\frac{\varphi\sin\theta}{c - v_1^\circ\cos\theta} + D\frac{d\omega_x^*}{dy} + (D_d - D_d)i\alpha\omega_y^* = 0$$

$$i\alpha D_0\omega_x^* + (D_0 + 2D_d)\frac{d\omega_y^*}{dy} = 0, \qquad y' = \frac{\varphi}{c - v_1^\circ\cos\theta}e^{i\alpha(x-ct)}$$

Система уравнений (2.5) и граничные условия (2.6)—(2.8) и (2.10) могут быть разделены на две группы, одна из которых содержит только φ, ω_z^* и c. При этом уравнения и граничные условия для φ, ω_z^*, c соответствуют плоской задаче устойчивости течения с профилем скорости $v_1^\circ\cos\theta$. Таким образом, теорема Сквайра имеет место и при исследовании устойчивости параллельного течения жидкости с моментными напряжениями достаточно ограничиться рассмотрением поведения плоских возмущений.

В дальнейшем рассмотрим только случай плоских возмущений, которому соответствуют следующие уравнения и граничные условия:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^4\varphi}{dy^4}-2\alpha^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\alpha^4\varphi=\\
=\frac{i\alpha R}{1+\delta}\left[\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\alpha^2\varphi\right)(v_1{}^\circ-c)-\varphi\frac{d^2v_1{}^\circ}{dy^2}\right]-\frac{2\delta}{1+\delta}\left(\frac{d^2f}{dy^2}-\alpha^2f\right)\\
\frac{d^2f}{dy^2}-\alpha^2f-\frac{4\delta}{D}f-\frac{i\alpha R}{ED}(v_1{}^\circ-c)f=\frac{2\delta}{D}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\alpha^2\varphi\right)-\frac{i\alpha R}{ED}\varphi\frac{d\omega_3{}^\circ}{dy}\\
\left[(1+\delta)\frac{d^2v_1{}^\circ}{dy^2}+2\delta\frac{d\omega_3{}^\circ(0)}{dy}\right]\frac{\varphi(0)}{c-v_1{}^\circ(0)}+\\
+(1+\delta)\frac{d^2\varphi(0)}{dy^2}+(1-\delta)\alpha^2\varphi(0)+2\delta f(0)=0\\
(1+\delta)\left[\frac{d^3\varphi(0)}{dy^3}-\alpha^2\frac{d\varphi(0)}{dy}\right]+2\delta\frac{df(0)}{dy}+\\
+i\alpha\varphi(0)\left[R\frac{dv_1{}^\circ(0)}{dy}+\frac{3\operatorname{ctg}\gamma+S'\alpha^2}{c-v_1{}^\circ(0)}\right]+\\
+i\alpha R[c-v_1{}^\circ(0)]\frac{d\varphi(0)}{dy}-2\alpha^2\frac{d\varphi(0)}{dy}=0\\
\frac{d^2\omega_3{}^\circ(0)}{dy^2}\frac{\varphi(0)}{c-v_1{}^\circ(0)}+\frac{df(0)}{dy}=0,\qquad \varphi(1)=d\varphi(1)/dy=0
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Здесь введено новое обозначение $\omega_z{}^*=f$ и в (2.10) исключено p^* при помощи (2.3) и (2.4).

Граничные условия (2.7) и (2.8) в этом случае заменяются соответственно соотношениями

$$
f(1)=0,\qquad [d^2\varphi/dy^2]_{y=1}+2f(1)=0 \tag{2.12}
$$

3. Для случая длинноволновых плоских возмущений представим φ, f, c в виде бесконечных рядов по малому параметру α [4, 5]. Ограничиваясь в рядах двумя членами, получим

$$
\varphi=\varphi^\circ+\alpha\varphi',\qquad f=f^\circ+\alpha f',\qquad c=c^\circ+\alpha c' \tag{3.1}
$$

Обратимся к исследованию устойчивости течения слоя при условии полного прилипания жидкости к твердой плоскости. Этому случаю соответствуют соотношения (1.3), уравнения (2.11) и первое из условий (2.12).

Подставляя (3.1) в (2.11), (2.12), получим уравнения для φ°, f°, c°.

$$
\frac{d^4\varphi^\circ}{dy^4}=-\frac{2\delta}{1+\delta}\frac{d^2f^\circ}{dy^2},\qquad \frac{d^2f^\circ}{dy^2}-\frac{4\delta}{D}f^\circ=\frac{2\delta}{D}\frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} \tag{3.2}
$$

$$
\begin{gathered}
(1+\delta)\frac{d^2\varphi^\circ(0)}{dy^2}+\left[(1+\delta)\frac{d^2v_1{}^\circ(0)}{dy^2}+2\delta\frac{d\omega_3{}^\circ(0)}{dy}\right]\frac{\varphi^\circ(0)}{c^\circ-v_1{}^\circ(0)}+2\delta f^\circ(0)=0\\
(1+\delta)\frac{d^3\varphi^\circ(0)}{dy^3}+2\delta\frac{df^\circ(0)}{dy}=0,\qquad \frac{d^2w_3{}^\circ(0)}{dy^2}\frac{\varphi^\circ(0)}{c^\circ-v_1{}^\circ(0)}\frac{df^\circ(0)}{dy}=0\\
\varphi^\circ(1)=d\varphi^\circ/dy=f^\circ(1)=0
\end{gathered}
$$

Предполагая δ малым, представим φ°, f° и c° в виде бесконечных рядов по малому параметру

$$\varphi^\circ = \varphi_H^\circ + \delta\varphi_M^\circ + \ldots, \qquad f^\circ = f_H^\circ + \delta f_M^\circ + \ldots, \qquad c^\circ = c_H^\circ + \delta c_M^\circ \quad (3.3)$$

В дальнейшем ограничимся вычислениями первых двух членов рядов (3.3).

Параметры основного течения v_1° и ω_3° также представим в виде рядов. Сохраняя только линейные по δ члены разложений, получим

$$v_1^\circ = \frac{3}{2}(1-y^2) + \delta\left[\frac{3}{2}(1-y^2) + \frac{2-y}{D}\right], \qquad \omega_3^\circ = \frac{\delta}{D}(1-y^3) \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), получим системы уравнений для последовательного определения φ_H°, f_H°, c_H°, и φ_M°, f_M°, c_M°. Интегрируя полученные уравнения, находим

$$\varphi^\circ = (1+\delta)(1-y)^2, \quad f^\circ = 2\delta D^{-1}(y^2-1), \quad c^\circ = 3 + \delta({}^{13}/_6 + 2D^{-1}) \quad (3.5)$$

Для величин φ', f', c' имеем соотношения

$$\frac{d^4\varphi'}{dy^4} = -\frac{2\delta}{1+\delta}\frac{d^2f'}{dy^2} + \frac{iR}{1+\delta}\left[(v_1^\circ - c^\circ)\frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} - \frac{d^2v_1^\circ}{dy^2}\varphi^\circ\right]$$

$$\frac{d^2f'}{dy^2} - \frac{4\delta}{D}f' = \frac{2\delta}{D}\frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{iR}{ED}(v_1^\circ - c^\circ)f^\circ - \frac{iR}{ED}\frac{d\omega_3^\circ}{dy}\varphi^\circ$$

$$\left[(1+\delta)\frac{d^2v_1^\circ(0)}{dy^2} + 2\delta\frac{d\omega_3^\circ(0)}{dy}\right]\frac{\varphi'(0)}{c^\circ - v_1^\circ(0)} + (1+\delta)\frac{d^2\varphi'(0)}{dy^2} + 2\delta f'(0) =$$
$$= \left[(1+\delta)\frac{d^2v_1^\circ(0)}{dy^2} + 2\delta\frac{d\omega_3^\circ(0)}{dy}\right]\frac{\varphi^\circ c'}{[c^\circ - v_1^\circ(0)]^2} \quad (3.6)$$

$$(1+\delta)\frac{d^3\varphi'(0)}{dy^3} + 2\delta\frac{df'(0)}{dy} + i\left[R\frac{dv_1^\circ(0)}{dy} + \frac{3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2}{c^\circ - v_1^\circ(0)}\right]\varphi^\circ(0) +$$
$$+ iR[c^\circ - v_1^\circ]\frac{d\varphi^\circ}{dy} = 0$$

$$\frac{d^2\omega_3^\circ(0)}{dy^2}\frac{\varphi'(0)}{c^\circ - v_1^\circ(0)} + \frac{df'(0)}{dy} = \frac{d^2\omega_3^\circ(0)}{dy^2}\frac{c'}{[c^\circ - v_1^\circ(0)]^2}$$

$$\varphi'(1) = d\varphi'(1)/dy = f'(1) = 0$$

Интегрируя (3.6) методом рядов по малому параметру δ с учетом соотношений (3.4) и (3.5), получим для c' выражение

$$c' = {}^6/_5 iR[1 + \delta(16.5 + {}^1/_2 D^{-1})] - {}^1/_3 i(3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2)(1 + {}^4/_3\delta) \quad (3.7)$$

Учитывая (3.1) и (3.7), находим, что в области малых значений волнового числа величина c_i имеет вид

$$c_i = \alpha\{{}^6/_5 R[1 + \delta(16.5 + {}^1/_2 D^{-1})] - {}^1/_3(3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2)(1 + {}^4/_3\delta)\} \quad (3.8)$$

Из (3.8) видно, что в координатной плоскости α, R кривая нейтральных возмущений состоит из оси $\alpha = 0$ и кривой

$$^5/_6 R[1 + \delta(16.5 + {}^1/_2 D^{-1})] - {}^1/_3(3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2)(1 + {}^4/_3\delta) = 0 \qquad (3.9)$$

В точке разветвления нейтральной кривой имеем

$$R^* = R_{\min}^*[1 - \delta(16.5 + {}^1/_2 D^{-1})], \qquad R_{\min}^* = {}^5/_6 \operatorname{ctg}\gamma \qquad (D > 0,\ \delta \geqslant 0) \qquad (3.10)$$

где $R_{\min}^*$ — минимальное критическое число Рейнольдса течения ньютоновской жидкости.

Из (3.3) и (3.10) видно, что как вращение молекул, так и моментные напряжения оказывают всегда дестабилизирующее влияние на течение слоя, если выполняется условие полного прилипания жидкости к твердой плоскости.

Аналогичным способом исследуется устойчивость течения слоя при условии обращения в нуль на твердой поверхности антисимметричной части тензора силовых напряжений. В этом случае находим

$$c_r = 3 + \delta\left(7.5 - \frac{12}{D}\right), \quad R^* = R_{\min}^*\left[1 - \delta\left(\frac{13}{4} + \frac{1}{ED} - \frac{44}{3D}\right)\right]$$
$$(E > 0,\ D > 0,\ \delta \geqslant 0) \qquad (3.11)$$
$$c_i = \alpha\left\{\frac{6}{5}R\left[1 + \delta\left(3 + \frac{1}{ED} - \frac{16}{D}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}(3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2)\left[1 + \delta\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3D}\right)\right]\right\}$$

Из (3.10) видно, что в зависимости от соотношений между величинами E и D течение жидкости с моментными напряжениями и несимметричным тензором силовых напряжений может быть устойчивее или неустойчивее, чем течение ньютоновской жидкости.

Таким образом, влияние моментных напряжений на устойчивость течения слоя зависит от вида граничных условий на твердой плоскости.

Поступило 25 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with Arbitrary Number of Integrals Conm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
2. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметричная гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Листров А. Т. Об устойчивости течения слоя жидкости модели Грэда по наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
4. Иванилов Ю. П. Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном. ПММ, 1960, т. 14, вып. 2.
5. Chia-Shun Yih. Stability of liquid flow down an inelined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. Русск. пер. «Механика». Период. сб. перев. ин. статей, 1963, № 5.
6. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.