

К ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

На основе упрощенной системы уравнений исследуются процесс развития и устойчивость волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. Любое неустойчивое возмущение ламинарного течения растет и приводит к установлению волнового режима. Время установления при больших расходах меняется мало, а при уменьшении расхода резко возрастает. При одинаковых амплитудах начальных возмущений быстрее других развиваются оптимальные режимы, которые обеспечивают наибольший расход в слое с заданной средней толщиной. Все волновые режимы неустойчивы к возмущениям в виде бегущих волн. При умеренных расходах оптимальные режимы будут наиболее устойчивыми к близким возмущениям.

Расчет строго периодических волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести проведен в работе [1]. При заданном расходе жидкости теоретически могут устанавливаться различные волновые режимы течения, отличающиеся длинами волн. В частности, существует длина волны, при которой текущий слой имеет наименьшую среднюю толщину (а при заданной средней толщине — наибольший расход). Эти оптимальные режимы близко соответствуют экспериментальным данным [2], однако по способу расчета ничем не выделяются среди других. Ниже проводится сравнение волновых режимов по характеру их развития и устойчивости.

1. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(q - zh) &= 0 \\ h^2 \frac{\partial q}{\partial \tau} - (zh - \frac{12}{5}q)h \frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{6}{5}q^2 \frac{\partial h}{\partial \xi} - Gh^3 \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} - Hh^3 + Eq &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Она получена в результате определенных упрощений из полной системы уравнений и граничных условий, описывающих течение в слое жидкости; функции $h(\tau, \xi)$, $q(\tau, \xi)$ приближенно совпадают с толщиной текущего слоя и расходом жидкости. В этом смысле можно считать, что система (1.1) описывает течение вязкой жидкости в тонком слое, и рассматривать ее решения как режимы течения жидкости. Решение системы (1.1) определяется четырьмя параметрами

$$R_0 = ga_0^3\nu^{-2}, \quad R = 3V_0a_0\nu^{-1}, \quad n, \quad z$$

через которые коэффициенты уравнений выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} G &= \frac{9\gamma n^2 R_0^{1/3}}{R^2}, \quad H = \frac{9R_0}{R^2 n}, \quad E = \frac{9}{Rn} \\ \gamma &= \frac{\sigma}{\rho\nu^{1/3}g^{1/3}}, \quad \tau = \frac{nV_0 t}{a_0}, \quad \xi = \frac{(x - zV_0 t)n}{a_0} \end{aligned}$$

Здесь τ — безразмерная переменная, t — время, ξ — продольная координата в системе, перемещающейся с фазовой скоростью волн; a_0 , V_0 — сред-

няя толщина слоя и характерная скорость; g, ν, σ — ускорение тяжести, кинематический коэффициент вязкости и коэффициент поверхностного натяжения. Два из четырех параметров можно считать независимыми и задавать до определенной степени произвольно, а два другие находятся из решения.

Известны стационарные решения системы (1.1) двух типов

$$h = 1, \quad q = 1 \quad (R = R_0) \quad (1.2)$$

$$h = 1 + \rho \sin \xi + h_{20} \sin 2\xi + h_{21} \cos 2\xi + \dots, \quad q = 1 + z(h - 1) \quad (1.3)$$

Первое из них соответствует ламинарному течению в слое, а второе — чисто периодическому волновому течению. В [1] показано, что имеется двух-параметрическая область, в которой волновые решения (1.3) существуют. Если в качестве независимых параметров принять R_0 и n , то для случая течения воды при 15°C эта область в плоскости R_0, n будет заключена между осью $n = 0$ и линией 1 на фиг. 1. Уравнение этой линии легко получить, пользуясь предельной формой соотношений [1] для малых амплитуд

$$n^5 = R_0^{2/3} (\gamma A)^{-1}, \quad A^2 = 27 \gamma R_0^{-1/3} \quad (1.4)$$

Оптимальные режимы реализуются при значениях n_* , лежащих на линии 2 фиг. 1.

Переход от одного стационарного решения к другому может происходить вследствие потери устойчивости. Исследуем вопрос об устойчивости этих стационарных решений, а также процесс перехода от одного решения к другому. Для исследования применим метод работы [1]. Будем строить решение системы уравнений (1.1) в виде

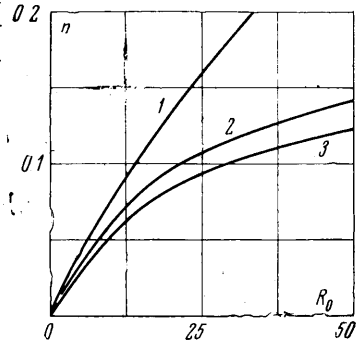
$$h = h_0 + h_{10} \sin \xi + h_{11} \cos \xi + \dots, \quad q = q_0 + q_{10} \sin \xi + q_{11} \cos \xi + \dots \quad (1.5)$$

где h_0, q_0, h_{lk}, q_{lk} могут зависеть от τ, ξ . Первое уравнение линейное, поэтому приравняв нулю коэффициенты гармоник из него легко получаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial \tau} - (q_0' - z h_0') &= 0 \\ \frac{\partial h_{10}}{\partial \tau} - [q_{10}' - l q_{11} - z (h_{10}' - l h_{11})] &= 0 \\ \frac{\partial h_{11}}{\partial \tau} - [q_{11}' + l q_{10} - z (h_{11}' + l h_{10})] &= 0 \quad (l = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Трудности связаны с решением второго нелинейного уравнения. Подставив в него (1.5), сгруппируем члены одинакового порядка относительно $\sin \xi, \cos \xi$ и приведем результат подстановки к виду ряда Фурье. Приравнявая нулю коэффициенты ряда, получим уравнения для h_{lk}, q_{lk} . В первом приближении, когда к нормальному виду приводятся первые три гармоники, будем иметь

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h_{10}^2 + h_{11}^2}{2}\right) \frac{\partial q_0}{\partial \tau} + h_{10} \frac{\partial q_{10}}{\partial \tau} + h_{11} \frac{\partial q_{11}}{\partial \tau} &= S_0 + \frac{S_{20} + S_{21}}{2} \\ (2h_{10} + h_{11} h_{20} - h_{10} h_{21}) \frac{\partial q_0}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{3h_{10}^2 + h_{11}^2}{4} - h_{21}\right) \frac{\partial q_{10}}{\partial \tau} + \end{aligned} \quad (1.7)$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
& + \frac{h_{10}h_{11} + 2h_{20}}{2} \frac{\partial q_{11}}{\partial \tau} - h_{10} \frac{\partial q_{21}}{\partial \tau} + h_{11} \frac{\partial q_{20}}{\partial \tau} = \frac{S_{30}}{4} + S_{10} \\
(2h_{11} + h_{10}h_{20} + h_{11}h_{21}) \frac{\partial q_0}{\partial \tau} & + \frac{h_{10}h_{11} + 2h_{20}}{2} \frac{\partial q_{10}}{\partial \tau} + h_{11} \frac{\partial q_{21}}{\partial \tau} + \\
& + \left(1 + \frac{h_{10}^2 + 3h_{11}^2}{4} + h_{21}\right) \frac{\partial q_{11}}{\partial \tau} + h_{10} \frac{\partial q_{20}}{\partial \tau} = \frac{S_{31}}{4} + S_{11} \\
(h_{10}h_{11} + 2h_{20}) \frac{\partial q_0}{\partial \tau} & + h_{11} \frac{\partial q_{10}}{\partial \tau} + h_{10} \frac{\partial q_{11}}{\partial \tau} + \frac{\partial q_{20}}{\partial \tau} = \frac{S_{22}}{2} \\
\left(\frac{h_{11}^2 - h_{10}^2}{2} + 2h_{21}\right) \frac{\partial q_0}{\partial \tau} & - h_{10} \frac{\partial q_{10}}{\partial \tau} + h_{11} \frac{\partial q_{11}}{\partial \tau} + \frac{\partial q_{21}}{\partial \tau} = \frac{S_{21} - S_{20}}{2}
\end{aligned}$$

Здесь

$$S_0 = -E q_0 + L h_0 q_0' + {}^6/5 q_0^2 h_0' + M h_0^3$$

$$S_{1k} = (2F h_{1k} - {}^{12}/5 h_0 q_{1k}) q_0' + L h_0 (q_{1k}' - \varepsilon q_{1m}) - E q_{1k} + 3M h_0^2 h_{1k} + \\ + G h_0^3 (h_{1k}''' - 3\varepsilon h_{1m}'' - 3h_{1k}' + \varepsilon h_{1m}) + {}^6/5 q_0 [q_0 (h_{1k}' - \varepsilon h_{1m}) + 2q_{1k} h_0']$$

$$S_{2k} = (P_{1k} h_{1k} - 2\varepsilon F h_{21} + {}^{12}/5 \varepsilon h_0 q_{21}) q_0' - \varepsilon L h_0 (q_{21}' + 2q_{20}) + \\ + (2F h_{1k} - {}^{12}/5 h_0 q_{1k}) (q_{1k}' - \varepsilon q_{1m}) + 3M h_0 (h_{1k}^2 - \varepsilon h_0 h_{21}) + \\ + {}^6/5 [-\varepsilon q_0^2 (h_{21}' + 2h_{20}) + 2q_0 q_{1k} (h_{1k}' - \varepsilon h_{1m}) + (q_{1k}^2 - 2\varepsilon q_0 q_{21}) h_0] + \\ + 3G h_0^2 h_{1k} (h_{1k}''' - 3\varepsilon h_{1m}'' - 3h_{1k}' + \varepsilon h_{1m}) + \varepsilon E q_{21} - \\ - \varepsilon G h_0^3 (h_{21}''' + 6h_{20}'' - 12h_{21}' - 8h_{20})$$

$$S_{22} = (P_{10} h_{11} + P_{11} h_{10} + 4F h_{20} - {}^{24}/5 h_0 q_{20}) q_0' + 2(F h_{10} - {}^6/5 h_0 q_{10}) (q_{11}' + q_{10}) + \\ + (2F h_{11} - {}^{12}/5 h_0 q_{11}) (q_{10}' - q_{11}) + 2L h_0 (q_{20}' - 2q_{21}) - 2E q_{20} + \\ + {}^{12}/5 [q_0^2 (h_{20}' - 2h_{21}) + q_0 q_{10} (h_{11} + h_{10}) + q_0 q_{11} (h_{10}' - h_{11}) + \\ + (q_{10} q_{11} + 2q_0 q_{20}) h_0'] + 6M h_0 (h_{10} h_{11} + h_0 h_{20}) + \\ + 3G h_0^2 h_{10} (h_{11}''' + 3h_{10}'' - 3h_{11}' - h_{10}) + \\ + 3G h_0^2 h_{11} (h_{10}''' - 3h_{11}'' - 3h_{10}' + h_{11}) + 2G h_0^3 (h_{20}''' - 6h_{21}'' - \\ - 12h_{20}' + 8h_{21})$$

$$S_{3k} = 4[-\varepsilon N_{10} h_{2m} + N_{11} h_{2k} + {}^6/5 (\varepsilon h_{10} q_{2m} - h_{11} q_{2k})] q_0' + \\ + (P_{10} h_{11} + P_{11} h_{10} + 4F h_{20} - {}^{24}/5 h_0 q_{20}) (q_{1m}' + \varepsilon q_{1k}) + \\ + (P_{1m} h_{1m} - 4\varepsilon F h_{21} + {}^{24}/5 \varepsilon h_0 q_{21} + 3P_{1k} h_{1k}) (q_{1k}' - \varepsilon q_{1m}) + \\ + 4(F h_{11} - {}^6/5 q_{11} h_0) (q_{2k}' - 2\varepsilon q_{2m}) + 4\varepsilon (-F h_{10} + {}^6/5 h_0 q_{10}) (q_{2m}' + 2\varepsilon q_{2k}) + \\ + {}^6/5 [-4\varepsilon q_0 q_{10} (h_{2m}' + 2\varepsilon h_{2k}) + 4q_0 q_{11} (h_{2k}' - 2\varepsilon h_{2m}) - \\ - 4(\varepsilon q_{10} q_{2m} - q_{11} q_{2k}) h_0' + 2(h_{1m}' + \varepsilon h_{1k}) (q_{10} q_{11} + 2q_0 q_{20}) + \\ + (h_{1k}' - \varepsilon h_{1m}) (q_{1m}^2 + 3q_{1k}^2 - 4\varepsilon q_0 q_{21})] + \\ + M(3h_{1k}^3 + 3h_{1k} h_{1m}^2 - 12\varepsilon h_0 h_{10} h_{2m} + 12h_0 h_{11} h_{2k}) + \\ + 3G h_0 [2(h_{10} h_{11} + h_0 h_{20}) (h_{1m}''' + 3\varepsilon h_{1k}'' - 3h_{1m}' - \varepsilon h_{1k}) + \\ + (h_{1m}^2 + 3h_{1k}^2 - 2\varepsilon h_0 h_{21}) (h_{1k}''' - 3\varepsilon h_{1m}'' - 3h_{1k}' + \varepsilon h_{1m}) - \\ - 2\varepsilon h_0 h_{1k} (h_{21}''' + 6h_{20}'' - 12h_{21}' - 8h_{20}) + 2h_0 h_{1m} (h_{20}''' - 6h_{21}'' - \\ - 12h_{20}' + 8h_{21})]$$

$$F = z h_0 - {}^6/5 q_0, \quad L = z h_0 - {}^{12}/5 q_0, \quad M = G h_0''' + H$$

$$N_{1k} = z h_{1k} - {}^6/5 q_{1k}, \quad P_{1k} = z h_{1k} - {}^{12}/5 q_{1k}$$

В этих выражениях штрих означает частное дифференцирование по ξ , $\varepsilon = (-1)^k$, индекс k может принимать значения нуля и единицы, а индекс m , соответственно этому, единицы и нуля.

Уравнения (1.6) (1.7) образуют замкнутую систему для десяти неизвестных коэффициентов разложений (1.5). Если принять $h_{1k} = \text{const}$, $q_{1k} = \text{const}$, то (1.5) будет соответствовать стационарному волновому решению, а система (1.6), (1.7) определит это решение в первом приближении. Сравнение со вторым приближением и точными численными расчетами показывает, что при каждом R_0 существует интервал n , включающий n_* , в котором первое приближение оказывается достаточно точным. Ограничимся рассмотрением таких n , причем в случаях, когда h_{1k} , q_{1k} могут зависеть от τ , ξ , будем предполагать, что они не превосходят существенно соответствующие величины для стационарных решений.

2. Пусть в момент $\tau = 0$ возникло периодическое по ξ возмущение стационарного решения (1.2); тогда его можно считать периодическим во все последующее время развития и описать при помощи системы (1.6), (1.7), в которой h_{ik}, q_{ik} зависят только от времени.

Параметры возмущения можно найти на основе линейной теории. Примем для удобства $q_0 = 1$ и положим

$$h = 1 + \rho_0 e^{i\omega\tau} \sin \xi, \quad q = 1 + \rho_0 e^{i\omega\tau} (z \sin \xi + \omega \cos \xi) \quad (2.1)$$

Подставим (2.1) в линеаризованные уравнения (1.1) и, приравняв нулю выражения при $\sin \xi, \cos \xi$, получим

$$\begin{aligned} \omega^2 + H\omega - (z^2 - 12/5z + 6/5 - G) &= 0 \\ H(3 - z) - 2(z - 6/5)\omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отсюда найдем показатель роста амплитуды возмущения ω и отношение z фазовой скорости к характерной. Области растущих и затухающих возмущений разделяет линия $\omega = 0$, на которой, в соответствии с (2.2), $z = 3$ и $G = 3$. Отсюда следует, что рассматриваемое стационарное решение всегда неустойчиво [3, 4], причем возмущение (2.1) будет растущим при $n < n_+$, где

$$n_+^2 = R_0^{5/3} / 3\gamma \quad (2.3)$$

Легко видеть, что (2.3) совпадает с уравнением граничной кривой (1.4), отделяющей область существования волновых решений на фиг. 1. Следовательно, волновые режимы существуют, когда имеет место неустойчивость ламинарного течения.

По линейной теории наиболее растущими являются возмущения, изображаемые точками линии 3 на фиг. 1. Соответствующие им значения n сильно отличаются от n_* для оптимальных режимов. Поэтому с точки зрения линейной теории оптимальные режимы по скорости развития не выделяются среди других.

Обратимся теперь к нелинейному развитию возмущения (2.1) с малой начальной амплитудой ρ_0 . Примем выражения (2.1) в качестве начальных условий для h, q и рассмотрим развитие этого возмущения с течением времени при помощи системы (1.6), (1.7). Такие расчеты проделаны при различных ρ_0, R_0, n и показали следующее.

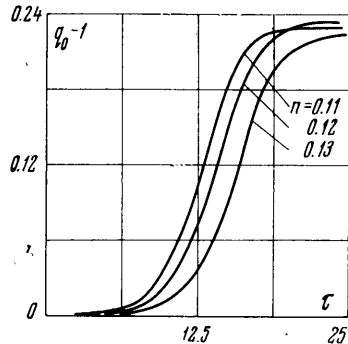
При любом ρ_0 (достаточно малом для того, чтобы в процессе развития h_{ik}, q_{ik} сильно не превосходили стационарные значения) возмущение (2.1) возрастает и приводит к переходу первого стационарного решения во второе (волновое). Характер развития показан на фиг. 2, на которой в зависимости от безразмерного времени τ изображено приращение расхода $q - 1$ для $R_0 = 32.56; \rho_0 = 10^{-2}$, и трех значений n , из которых среднее равно n_* , а два другие отличаются от него на $\Delta n = \pm 0.01$. Кривые роста возмущений по времени имеют два участка. До некоторого значения τ возмущение мало, а затем резко возрастает и выходит на волновой режим. С изменением начальной амплитуды ρ_0 меняется лишь участок медленного роста, но в целом характер развития сохраняется.

Поведение кривых на фиг. 2 таково, что можно достаточно определенно найти время установления T_* . Зависимость времени установления оптимальных режимов от R_0 изображена на фиг. 3. Оно мало меняется при больших значениях R_0 и резко возрастает при значениях, меньших $R_0 \approx 15$.

Вследствие этого при малых расходах в течение длительного времени не будет наблюдаться заметных изменений, связанных с развитием возникшего возмущения. К подобному выводу о развитии малых возмущений приводит также линейная теория [5]. Резкое замедление процесса установления волнового режима при малых расходах наблюдалось и в экспериментах. В работе [6] измерялось расстояние от входа жидкости до формирования волнового течения. Кривая зависимости этого расстояния от расхода имеет такой же вид, как на фиг. 2.

В работе [2] волновые режимы при малых расходах не наблюдались вовсе.

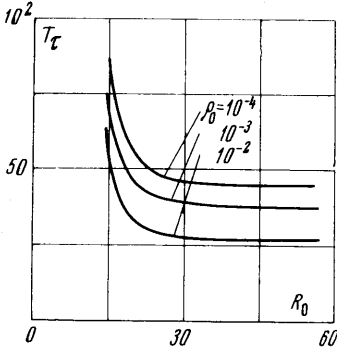
На фиг. 4 изображены кривые развития тех же возмущений, что и на фиг. 2, в зависимости от физического времени t . На участке медленных изменений сохраня-



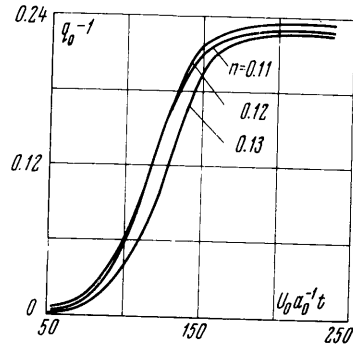
Фиг. 2

ются выводы линейной теории и возмущение с $n < n_*$ растет быстрее, а с $n > n_*$ — медленнее, чем с $n = n_*$.

Однако на участке выхода, где резко возрастают амплитуды возмущений, быстрее других начинает развиваться возмущение, соответствующее оптимальному режиму. Поэтому при заданной средней толщине слоя и одинаковых начальных амплитудах возмущений быстрее других будет устанавливаться оптимальный режим. Это свойство является следствием нелинейного характера развития; оно сохраняется при всех R_0 .



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Исследование устойчивости волновых течений связано с громоздкими вычислениями. Ограничимся описанием последовательности решения и окончательных результатов, не приводя промежуточные выкладки. Заданное волновое течение удобно характеризовать числами R и n . Развитие малого возмущения волнового режима можно описать в виде (1.5), где h_{lk} , q_{lk} — функции τ и ξ , определяемые системой (1.6), (1.7). Представим такое решение в виде

$$h_{lk} = h_{0lk} + h_{1lk}, \quad q_{lk} = q_{0lk} + q_{1lk} \quad (3.1)$$

где h_{0lk} , q_{0lk} — волновое решение, а h_{1lk} , q_{1lk} — малые возмущения.

Подставим (3.1) в уравнения (1.6), (1.7) и отбросим члены второго порядка относительно h_{1lk} , q_{1lk} , в результате получим однородную систему десяти уравнений с постоянными коэффициентами для h_{1lk} , q_{1lk} . Рассмотрим частные решения этой системы в виде бегущих волн

$$f_{1lk} = a_{1lk} e^{i(b\xi - i\omega_r \tau)} \quad (3.2)$$

Здесь f_{1lk} обозначает любую из неизвестных величин h_{1lk} , q_{1lk} ; при этом a_{1lk} — соответствующая начальная амплитуда. Величина b считается заданной, она характеризует отношение длин волн: при $b < 1$ длина волны возмущения больше, а при $b > 1$ — меньше, чем длина волны исходного течения. Для определения a_{1lk} из линейаризованной системы получаем систему алгебраических уравнений десятого порядка; в случае нетривиального решения определитель ее должен обращаться в нуль. Это приводит к характеристическому уравнению для ω_i , которое имеет десять возможных решений. Мнимая часть ω_i каждого корня определяет частоту возмущения, а действительная ω_r — скорость роста амплитуды; возмущение будет расти, если $\omega_r > 0$, и затухать, если $\omega_r < 0$. Используя определение τ и ξ , преобразуем выражение (3.2) к виду

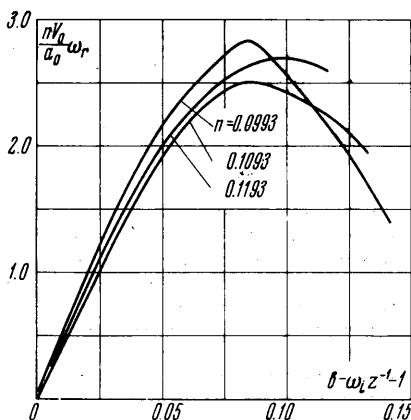
$$f_{1lk} = a_{1lk} \exp\left(\frac{n}{a_0} V_0 \omega_r t\right) \exp\left\{i \left[bx - \left(b - \frac{\omega_i}{z} \right) V_0 z t \right] \frac{n}{a_0} \right\} \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что скорость роста возмущения по времени есть $(nV_0/a_0)\omega_r$, а отношение частоты возмущения к частоте исходного течения равно $b - \omega_i/z$.

Решение характеристического уравнения проводилось для различных расходов, причем для каждого расхода рассматривался оптимальный режим ($n = n_*$) и два близких к нему режима ($n = n_* \pm 0.01$). При любом b в каждом из рассмотренных вариантов среди корней характеристического уравнения имеются корни с положительной действительной частью ω_r . Это означает, что волновое течение, как и ламинарное, неустойчиво к возмущениям в виде бегущих волн, и периодическое по x возмущение, наложенное на волновое течение, всегда будет расти. Одновременно с этим оно сносится вниз по потоку со скоростью $(z - \omega_i b^{-1})V_0$. Число растущих воз-

мущений с одинаковым b в проведенных расчетах достигало пяти в соответствии с количеством дискретно расположенных корней ω_1 характеристического уравнения. Параметры этих возмущений (скорость распространения и длина волны) отличаются от параметров исходного волнового течения на конечные величины. При заданной длине волны наиболее растущим оказывается возмущение, которое значительно всех отличается от волнового. Для примера в таблице приведены корни характеристического уравнения с $\omega_r > 0$ для $R = 30$ (ω_r — верхнее число, ω_i — нижнее). Подобное распределение корней имеет место и для других значений R ; оно сохраняется также при больших b , однако прежде всего имеется в виду интервал $1/2 < b < 2$, в котором наиболее обоснованы принятые предположения.

При $b \rightarrow 1$ среди корней характеристического уравнения появляется убывающий корень, для которого $|\omega_i| \rightarrow 0$. Он описывает возмущение, близкое к исходному волновому течению по своим параметрам. Такое возмущение представляет особый интерес с точки зрения реализации волнового течения в эксперименте. Как показывают расчеты, близкое возмущение убывает, если $b < 1$, и растет, если $b > 1$. На фиг. 5 приведены показатели роста близких возмущений для $R = 30$. Медленнее всего растут возмущения оптимального режима, который оказывается наиболее устойчивым к близким возмущениям. Это свойство ярко выражено при средних расходах и ослабляется в сторону малых и больших расходов. При $R \geq 50$ оптимальные режимы свойством наибольшей устойчивости уже не обладают. Можно отметить, что в опытах [2] четко выраженные волновые течения рассмотренного типа наблюдались лишь до $R \approx 55$.



Фиг. 5

Значения корней характеристического уравнения, соответствующие растущим возмущениям волнового течения при $R = 30$ ($n = n_* = 0.1093$)

$b = 0.6$	$b = 0.75$	$b = 1.0005$	$b = 1.25$	$b = 1.40$	$b = 1.55$
0.5601	0.4784	$0.6287 \cdot 10^{-3}$	0.3466	0.4196	0.4709
$-0.3856 \cdot 10^{-1}$	-0.1663	$-0.5868 \cdot 10^{-3}$	0.1590	0.1572	0.1079
0.5049	0.5250	0.3690	0.3389	0.4052	0.5473
0.1974	$-0.4034 \cdot 10^{-1}$	-0.4412	-0.6874	-0.8570	-1.030
$0.3518 \cdot 10^{-1}$	0.2930	0.2920	2.133	2.793	3.498
-0.7825	-0.9277	$0.6529 \cdot 10^{-1}$	-1.524	-1.751	-1.965
4.197	4.955	1.114	7.843	8.813	9.830
-2.255	-2.512	-1.135	-3.313	-3.542	-3.767
		6.335			
		-2.922			

Таким образом, оптимальные режимы волнового течения жидкости выделяются среди других возможных режимов тем, что они быстрее развиваются из малых возмущений ламинарного течения и в определенном интервале расходов более устойчивы к близким возмущениям. Эти свойства, по-видимому, должны сказываться при их реализации в экспериментах.

НИИ механики МГУ

Поступило 12 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

- Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
- Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ж. эксперим. и теорет. физ., 1949, т. 19, вып. 2, стр. 105.
- Андреев А. Ф. Об устойчивости ламинарного течения тонких слоев жидкости. Ж. эксперим. и теорет. физ., 1963, т. 45, вып. 9.
- Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. ПМТФ, 1962, № 4.
- Benjamin T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined Plane. J. Fluid. Mech., 1957, vol. 2, pt. 6, p. 554.
- Stainthorpe F. P., Allen J. M. The development of ripples on the surface of a liquid film flowing inside a vertical tube. Trans. of the Inst. of Chem. Eng., 1965, vol. 43, № 3.