

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Н. В. ЗУБОВ

(Краснодар)

Рассматриваются частные решения задачи вытеснения нефти водой с учетом капиллярных сил для случая, когда доля воды в потоке предполагается зависящей только от насыщенности пористой среды водой. Поток предполагается линейным, одномерным. Дается анализ полученных решений, приводится пример расчета распределения насыщенности на ЭЦВМ.

1. Совместное движение двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде без учета сил гравитации для случая линейного одномерного потока описывается системой уравнений [1, 2]

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{k}{\mu_1} f_1(\rho) \frac{\partial p_1}{\partial x}, & \frac{\partial w_1}{\partial x} &= -m \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ w_2 &= -\frac{k}{\mu_2} f_2(\rho) \frac{\partial p_2}{\partial x}, & \frac{\partial w_2}{\partial x} &= m \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad p_c(\rho) = p_2 - p_1 \quad (1.1)$$

Здесь k — абсолютная проницаемость пористой среды, μ_1 и μ_2 — вязкости первой (вытесняющей) и второй (вытесняемой) фаз, w_1 и w_2 — скорости фильтрации соответствующих фаз, $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$ — давления в фазах, ρ — насыщенность среды первой фазой; $f_1(\rho)$ и $f_2(\rho)$ — относительные фазовые проницаемости, $p_c(\rho)$ — капиллярное давление, m — пористость, x — линейная координата, t — время.

Исключив $p_1(x, t)$, $p_2(x, t)$ и $w_2(x, t)$ из системы (1.1), получим

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -m \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad w_1 = w(t)F + \frac{k}{\mu_2} f_2(\rho) F p_c' \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (1.2)$$

где

$$F(\rho) = \frac{f_1(\rho)}{f_1(\rho) + \mu_0 f_2(\rho)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad w(t) = w_1(x, t) + w_2(x, t)$$

Система (1.2) равносильна уравнению Рапопорта — Лиса

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + w(t) F'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{k}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_2 F p_c' \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.3)$$

При пренебрежении влиянием капиллярного давления $p_c(\rho)$ уравнение (1.3) переходит в

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + w(t) F'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

которое рассматривалось Бакли и Левереттом [3].

Для решения Бакли — Леверетта функция $F(\rho)$ является долей первой (вытесняющей) фазы в потоке жидкостей

$$\frac{w_1(x, t)}{w(t)} = F(\rho)$$

Выясним, для каких частных случаев можно получить непрерывные решения уравнения (1.2), если принять долю первой фазы функцией, зависящей только от насыщенности

$$\frac{w_1(x, t)}{w(t)} = \varphi(\rho) \quad (1.5)$$

Подставив (1.5) в (1.2) и разрешив полученную систему относительно частных производных $\partial \rho / \partial x$ и $\partial \rho / \partial t$, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{w(t)(\varphi - F)}{(k/\mu_2) f_2 F p_c'} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{w^2(t) \varphi'(\varphi - F)}{m(k/\mu_2) f_2 F p_c'} \quad (1.6)$$

Если рассматривать (1.6) как систему из двух уравнений с одной неизвестной функцией $\rho(x, t)$, то для ее совместности должно иметь место тождественное выполнение равенства $\partial^2 \rho / \partial x \partial t = \partial^2 \rho / \partial t \partial x$ по переменным x, t, ρ [4].

Определив из (1.6) вторые смешанные частные производные и приравняв их, будем иметь

$$\frac{\varphi''(\varphi - F)}{f_2 F \rho c'} = - \frac{km w'(t)}{\mu_2 w^3(t)} \quad (1.7)$$

Следовательно, если функции $w(t)$ и $\varphi(\rho)$ удовлетворяют условию (1.7) тождественно по x, t, ρ , то система (1.6) имеет непрерывное вместе со своими частными производными решение $\rho = \rho(x, t)$.

Воспользуемся формулой Лаверетта [4]

$$\rho_c(\theta) = \sigma \cos \theta \sqrt{m/k} J(\rho)$$

Здесь σ — поверхностное натяжение, θ — краевой угол, $J(\rho)$ — безразмерная функция насыщенности. Выражение (1.7) и частные производные $\partial \rho / \partial x$, $\partial \rho / \partial t$ можно представить в форме

$$\frac{\varphi''(\varphi - F)}{f_2 F J'} = - m^2 a^2 \frac{w'(t)}{w^3(t)} \quad \left(a^2 = \frac{\sigma \cos \theta}{\mu_2} \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{w(t)(\varphi - F)}{m a^2 f_2 F J'}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{w^2(t) \varphi'(\varphi - F)}{m^2 a^2 f_2 F J'} \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим вначале случай

$$\frac{\varphi''(\varphi - F)}{f_2 F J'} = - m^2 a^2 \frac{w'(t)}{w^3(t)} \equiv 0 \quad (2.1)$$

Отсюда $w(t) = w = \text{const}$ и

$$\frac{\varphi''(\varphi - F)}{f_2 F J'} = 0 \quad (2.2)$$

Для однозначного определения $\varphi(\rho)$ из обыкновенного дифференциального уравнения (2.2) необходимо задать граничные условия.

Обычно на входе образца задают либо условие $w_2|_{x=0} = 0$ при $x = 0$, либо условие $\rho|_{x=0} = \rho_*$ при $x = 0$, здесь ρ_* — предельная насыщенность среды вытесняющей фазой. Если рассматривать полубесконечный образец, то в качестве второго условия естественно принять условие конечности истинной скорости вытесняющей фазы при $\rho = \rho_0$ [5, 6], здесь ρ_0 — насыщенность среды неподвижной связанной первой фазой.

Будем считать, что к моменту $t = t_0$ на входе ($x = 0$) образца установлена предельная насыщенность $\rho = \rho_*$ и при этом $\varphi(\rho_*) = 1$. Из условия конечности истинной скорости вытесняющей фазы на фронте

$$\frac{w_1}{m(\rho \rightarrow \rho_0)} = \frac{w \varphi(\rho)}{m(\rho - \rho_0)} < \infty, \quad \rho \rightarrow \rho_0$$

следует $\varphi(\rho_0) = 0$.

Таким образом, для (2.2) граничными условиями принимаем

$$\varphi(\rho_0) = 0, \quad \varphi(\rho_*) = 1 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) формально может иметь два решения:

$$(1) \quad \varphi(\rho) \equiv F(\rho), \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \rho_*)$$

$$(2) \quad \varphi(\rho) = A\rho + B \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \rho_*)$$

Так как учитывается влияние капиллярных сил, то функция $\varphi(\rho)$ не может тождественно равняться $F(\rho)$ на всем интервале изменения ρ .

Второе решение также не подходит для всего диапазона изменения ρ . Из фиг. 1 видно, что в этом случае, начиная с какого-то значения $\rho < \rho_*$, функция $\varphi(\rho)$ становится меньше $F(\rho)$. Но если ρ — насыщенность вытесняющей фазы, то $J'(\rho) < 0$ и из уравнений (1.9), (1.10) для значений ρ , при которых $\varphi < F$, следует $\partial \rho / \partial x > 0$ и $\partial \rho / \partial t < 0$, что противоречит физической картине.

Проведем из точки $\rho = \rho_0$ (фиг. 1) касательную к кривой $F(\rho)$. При этом точка касания будет соответствовать значению насыщенности ρ_c для скачка в решении Бакли — Леверетта. Тогда решение $\varphi(\rho) = A\rho + B$ существует для $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_c$ и постоянные A и B определяются из условий $\varphi(\rho_0) = 0$, $\varphi(\rho_c) = F(\rho_c)$, а для $\rho_c \leq \rho \leq \rho_*$ имеет место решение Бакли — Леверетта.

Из уравнения (1.4) для $\rho = \text{const}$ следует:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{wF'(\rho)}{m} \quad (\rho_c \leq \rho \leq \rho_*) \quad (2.4)$$

Аналогично для $\rho = \text{const}$ из системы (1.2) будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w\varphi'(\rho)}{m} = \frac{wA}{m} \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \rho_c) \quad (2.5)$$

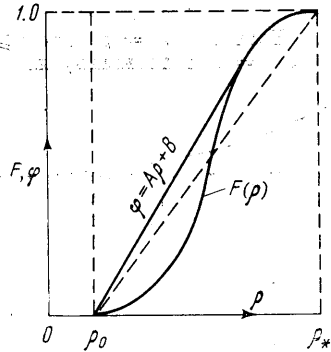
и дополнительное условие (1.9). Таким образом, для $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_c$ имеем так называемую стабилизированную зону [2, 5, 7].

Интегрируя (1.9), можно вычислить длину стабилизированной зоны

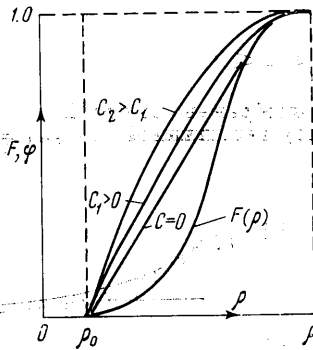
$$\int_{\rho_0}^{\rho_c} \frac{f_2 F J'}{A_0 + B - F} d\rho = (x - x_0) \frac{w}{ma^2} \quad (2.6)$$

где x_0 выбирается произвольно, чтобы определить начало счета.

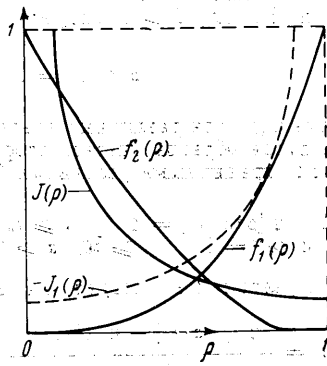
Из (2.6) следует, что значение $\rho = \rho_c$ достигается асимптотически при $x \rightarrow -\infty$, т. е. стабилизированная зона охватывает бесконечную область и вследствие конечности скорости вытеснения (2.5) образуется через бесконечное время после начала вытеснения.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Смыкание решения в стабилизированной зоне с решением Бакли — Леверетта, таким образом, теоретически возможно только на бесконечности.

3. Рассмотрим случай

$$\frac{\varphi''(\varphi - F)}{f_2 F J'} = -m^2 a^2 \frac{w'(t)}{w^3(t)} \equiv C = \text{const} \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует

$$w(t) = \left(\frac{2C}{m^2 a^2} t + C_0 \right)^{-1/2} \quad (3.2)$$

Здесь C_0 — произвольная постоянная. Задав для (3.1) граничные условия (2.3), можно найти $\varphi(\rho)$ и $\varphi'(\rho)$; например, численными методами.

Из (3.1) с учетом (1.9) следует:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = -m \frac{w'(t)}{w^2(t)} = \frac{C}{ma^2} w(t) \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3), получим

$$\varphi'[\rho(x, t)] = \varphi'[\rho(0, t)] + \frac{C}{ma^2} w(t)x \quad (t \geq t_0) \quad (3.4)$$

Если $\rho(0, t) = \rho_*$ для $t \geq t_0$, то $\varphi'[\rho(0, t)] = \varphi'(\rho_*) = 0$. Действительно, обычно $F'(\rho_*) = 0$, а поскольку из (1.9) и (1.10) следует $\varphi(\rho) \geq F(\rho)$ при $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_*$, то и $\varphi'(\rho_*) = 0$.

Тогда из (3.4) для $\rho = \text{const}$ следует:

$$x(\rho, t) = \frac{ma^2}{C} \frac{\varphi'(\rho)}{w(t)} \quad (t \geq t_0) \quad (3.5)$$

Легко убедиться, что решение (3.5) удовлетворяет системе (1.6).

Так как $\varphi(\rho)$ — функция возрастающая, а $w(t)$ — неотрицательна, то из (3.5) следует $C > 0$, а следовательно, согласно (3.1), выпуклость функции $\varphi(\rho)$ ($\varphi'' \leq 0$).

Для $C = 0$, согласно (3.2), будем иметь

$$w(t) = \text{const}$$

т. е. приходим к случаю, рассмотренному в п. 2.

Для $C_0 = 0$ выражение (3.2) принимает вид

$$w(t) = A_* / \sqrt{t} \quad (A_* = \sqrt{a^2 m^2 / 2C}) \quad (3.6)$$

встречающийся обычно в известных [5] автомодельных решениях уравнения (1.2).

Из (3.5) и (3.6) для $C > 0$ следует

$$x(\rho, 0) = 0 \quad (\rho_0 \leq \rho \leq \rho_*) \quad (3.7)$$

Поведение $\varphi(\rho)$ для различных значений C изображено на фиг. 2.

Если на входе образца считать вторую фазу неподвижной ($w_2|_{x=0} = 0$), то для уравнения (3.1) граничными условиями будут

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varphi[\rho(0, t)] = 1 \quad (t \geq t_0), \\ (2) \quad & \varphi(\rho_0) = 0 \quad (t \geq t_0, x > 0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.1) с учетом (1.9) следует (3.4) и

$$x(\rho, t) = \frac{\varphi'[\rho(x, t)] - \varphi'[\rho(0, t)]}{Cw(t)} ma^2 \quad (3.9)$$

Аналогично из (3.1) и (1.10) следует

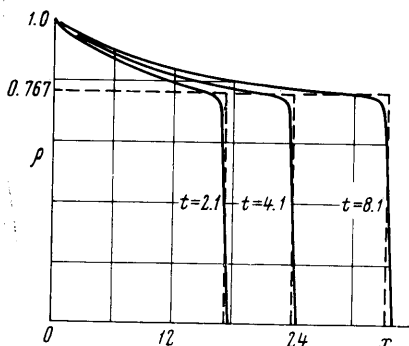
$$\varphi'[\rho(0, t)] = \frac{w(t)}{w(t_0)} \varphi'[\rho(0, t_0)] \quad (3.10)$$

Нетрудно проверить, что (3.9) или (3.4) с учетом (3.10) удовлетворяет системе (1.9), (1.10).

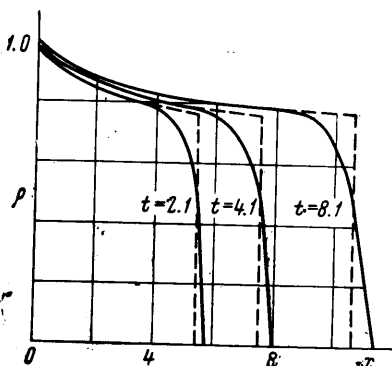
Для полного описания процесса распределения насыщенности в области $x \geq 0$, $t \geq t_0$ с помощью уравнений (3.9) и (3.10) достаточно задать в момент времени $t = t_0$ значение величины насыщенности $\rho_0 < \rho(0, t_0) \leq \rho_*$ (при $\rho(0, t_0) = \rho_*$ имеем предыдущий случай).

По заданному значению насыщенности $\rho = \rho(0, t_0)$, решая (численно) (3.1) с граничными условиями (3.8), определяем $\varphi'[\rho(x, t_0)]$ для $x \geq 0$, а затем из (3.9) и распределение насыщенности $x = x(\rho, t_0)$ для момента $t = t_0$.

Для любого момента времени $t > t_0$ сначала из (3.10) определяем величину $\varphi'[\rho(0, t)]$, затем, используя эту величину, решаем задачу (3.1), (3.8). В результате получим значения насыщенности $\rho = \rho(0, t)$ на входе и производных $\varphi'[\rho(x, t)]$ от функции φ для $x \geq 0$. Распределение насыщенности определяем из (3.9).



Фиг. 4



Фиг. 5

4. *Пример.* Функции $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$, $J(\rho)$ были заданы в виде (фиг. 3)

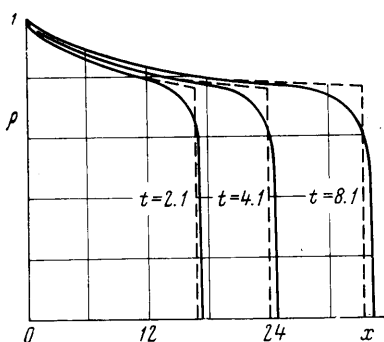
$$f_1(\rho) = \rho^3, \quad f_2(\rho) = (1 - \rho)^{2.5}(1 + \rho)$$

$$J(\rho) = \frac{0.1}{\rho} \quad (\text{вытеснение смачивающей жидкостью}).$$

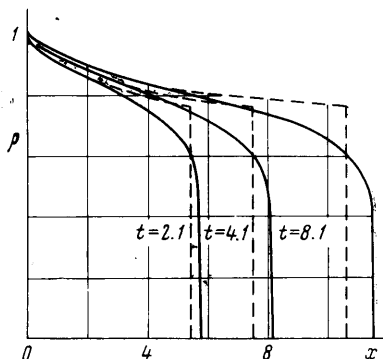
$$J_1(\rho) = -\frac{0.1}{1 - \rho} \quad (\text{вытеснение несмачивающей жидкостью}).$$

Граничные условия для уравнения (3.1) принимались в форме (2.3), а распределение насыщенности определялось из (3.5).

На фиг. 4 и 7 приводятся графики распределения насыщенности при вытеснении смачивающей жидкостью для случаев $C = 0.2$ и 2.0 , а на фиг. 5 и 6 — аналогичные графики для случая вытеснения несмачивающей жидкостью. Пунктирные линии соответствуют решению Бакли — Лаверетта без учета капиллярных сил. Координаты безразмерные.



Фиг. 6



Фиг. 7

Расчеты показывают, что фронт вытеснения несмачивающей жидкостью несколько опережает фронт вытеснения смачивающей жидкостью.

Малые значения C ($C = 0.2$) соответствуют большим скоростям закачки и естественно, что при этом распределение насыщенности мало отклоняется от распределения по Бакли — Лаверетту. С увеличением C ($C = 2.0$), т. е. с уменьшением скорости закачки, отклонения от решения Бакли — Лаверетта возрастают.

В расчетах использованы данные: $a^2 = 10$, $m = 0.2$, $\mu_0 = 1$, $C_0 = 0$.

Поступило 26 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжик В. М. О капиллярной пропитке водой нефтенасыщенного гидрофильного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
2. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостехиздат, 1962.
3. Buckley J., Leverett M. C. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. Trans. AIME, 1942, vol. 146.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, М., 1959.
5. Рыжик В. М. Некоторые задачи взаимного вытеснения несмешивающихся жидкостей из пористой среды. Автореферат диссертации. М., 1962.
6. Fayers F. J., Sheldon J. W. The Effect of Capillary Pressure and Gravity on Two-Phase Fluid Flow in a Porous Medium. Trans. AIME, 1959, vol. 126.
7. Terwilliger P. L. a. o. An Experimental and Theoretical Investigation of Gravity Drainage Performance. Trans. AIME, 1951, vol. 192.
8. Пилатовский В. П. Аналитическое решение задачи о вытеснении нефти водой с образованием водонефтяной смеси в тонком наклонном пласте при постоянном перепаде давления. ПМТФ, 1962, № 1.