

Согласно (2.12), при заданных параметрах пласта k_r , k_z , r_0 , r_1 , H постоянная a_0 характеризует характер и степень несовершенства скважины. Так как $\Phi_1 > a_0 \geq 0$ и Φ_1 не зависит от проницаемости пласта, то из (2.13) следует, что дебит скважины в общем больше зависит от горизонтальной проницаемости пласта, чем от вертикальной. Методы определения постоянных c_n , b_n практически не отличаются от методов, использованных ранее при определении подобных постоянных для бесконечной области фильтрации [7], и здесь не приводятся.

В случае однородного пласта и совершенной скважины (плоскорadiaльная фильтрация) давление в пласте, согласно (2.1), (2.5), определяется известной [10] формулой

$$p = p_0 - \frac{Q_0 \nu}{2\pi r_0 H k_0} \left(\ln \frac{r_1}{r} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_1^2} - \frac{1}{2} + 2a^2 t \right)$$

Следует отметить, что значение эффективного радиуса области фильтрации к скважине в пористом пласте обусловлено в основном упругой энергией пласта.

Поступило 24 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Основные уравнения фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.
2. Jacob C. E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer. Trans. Americ. Geophys. Union Repts. and papers. Hydrology, 1940.
3. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упругопластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОН, 1955, № 2.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1965.
5. Пирвердян А. М. Приближенное решение задачи о фильтрации при упругом режиме. Нефтяная подземная гидравлика. Азнефтеиздат, 1956.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР ОН, 1954, № 9.
7. Иванов Т. Ф. О притоке жидкости к несовершенной скважине в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1958.
9. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд. иностр. лит., 1958.
10. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ДАВЛЕНИЙ ПРИ ЗАКАЧКЕ В ПЛАСТ В УПРУГОМ РЕЖИМЕ

А. Г. ГОРЕЛИК, Н. М. КУЧУКОВА

(Москва)

Рассматривается распределение давлений в системе пластов при закачке жидкости в центральный пласт с высокой пьезопроводностью. Кровля и подошва предполагаются слабопроницаемыми с различными коэффициентами пьезопроводности по радиусу и по вертикали.

Задача решается при помощи интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля. Получены аналитические решения для пластов конечного и бесконечного радиуса.

Рассматривается нестационарное распределение давлений в пласте закачки, кровле и подошве при анизотропии слабопроницаемых изолирующих пластов. Существующие решения [1-3] ограничиваются рассмотрением либо одного пласта, либо введением мало реальных допущений о постоянстве давления и изотропности изолирующих пластов. В данной работе получены аналитические выражения распределения давлений для случая пластов конечного и бесконечного радиуса при постоянном дебите на скважине. Решения позволяют рассчитать поле давлений во всех трех пластах в условиях их взаимного влияния и оценить, таким образом, интенсивность перетекания закачиваемой жидкости в верхний и нижний изолирующие пласты в любой момент времени.

1. Задача ставится для следующей системы: в пласт 1 толщиной 2δ (фиг. 1) по всей его высоте на радиусе скважины r_0 производится закачка жидкости с постоянным дебитом Q_y . Пласты 2 и 3 слабопроницаемы и анизотропны, они изолируют пласт 1; физические свойства этих пластов одинаковы (пьезопроводность $a_2 = a_3$ вдоль оси r ; пьезопроводность по вертикали $b_2 = b_3$; здесь индексы относятся к номеру пласта). В направлении оси z пласты 2 и 3 представляют собой полубесконечные массивы. Такое рассмотрение допустимо при значительной мощности этих пластов.

Вначале рассматриваются все три пласта, имеющие внешний конечный достаточно большой радиус r^* , на котором отсутствует влияние закачки в течение исследуемого периода времени. Для упрощения предполагается также, что скважина продолжается симметрично и в пласте 3, что не вносит существенных погрешностей, особенно вследствие идеальной изоляции дна скважины на границе пластов 1 и 3.

Гидростатическое давление в пластах не влияет на закачку и может быть учтено в результатах расчета

$$P_i(r, z, \tau) = p_i(r, z, \tau) + p_r(z) \quad (1.1)$$

Здесь p_i — давление закачки; P_i — общее давление; p_r — гидростатическое давление в пластах; $i = 1, 2, 3$ — номер пласта.

Данная постановка задачи для p_i вследствие симметрии относительно плоскости $z = 0$ эквивалентна полной изоляции снизу (на уровне $z = 0$) пласта 1 толщиной δ .

Таким образом, достаточно рассмотреть пласт 1 толщиной δ и полубесконечный пласт 2.

Задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right) \quad \left(\begin{array}{l} r_0 < r < r^* \\ 0 < z < \delta \end{array} \right) \quad (\tau > 0) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} = a_2 \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) + b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} \quad \left(\begin{array}{l} r_0 < r < r^* \\ \delta < z < +\infty \end{array} \right) \quad (\tau > 0) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p_1(r_0, z, \tau)}{\partial r} = D, \quad \frac{\partial p_2(r_0, z, \tau)}{\partial r} = 0 \quad \left(D = \frac{Q_y \mu_b}{2\pi r_0 \delta k_0} \right)$$

$$p_1(r, z, 0) = p_2(r, z, 0) = 0, \quad p_1(r^*, z, \tau) = p_2(r^*, z, \tau) = 0 \quad (1.4)$$

$$p_2(r, +\infty, \tau) = 0, \quad p_1(r, \delta, \tau) = p_2(r, \delta, \tau)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial p_1(r, \delta, \tau)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial p_2(r, \delta, \tau)}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_1(r, 0, \tau)}{\partial z} = 0$$

Здесь λ_1 и λ_2 — соответственно, проводимости пластов; k_0 — проницаемость пласта 1, μ_b — вязкость жидкости.

2. Для решения уравнений (1.2) и (1.3) используем интегральное преобразование Лапласа по переменной τ и конечное интегральное преобразование Ханкеля по переменной r .

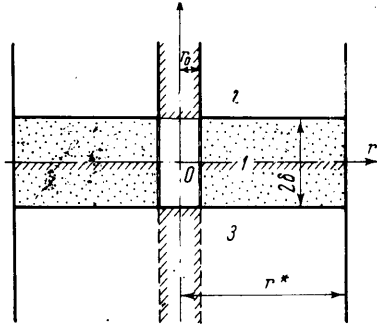
Введем преобразование Лапласа от функции

$$T_i(r, z, s) = \int_0^{\infty} p_i(r, z, \tau) \exp(-s\tau) d\tau \quad (2.1)$$

где s — комплексный параметр преобразования. Преобразованные по Лапласу уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{sT_1}{a_1} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{b_2}{a_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{sT_2}{a_2} = 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 1

После преобразования по Лапласу граничные условия получим в виде:

$$-\frac{\partial T_1(r_0, z, s)}{\partial r} = \frac{D}{s}, \quad \frac{\partial T_2(r_0, z, s)}{\partial r} = 0 \quad (2.4)$$

$$T_1(r^*, z, s) = T_2(r^*, z, s) = 0, \quad T_1(r, \delta, s) = T_2(r, \delta, s), \quad T_2(r, +\infty, s) = 0$$

$$\frac{\partial T_1(r, 0, s)}{\partial z} = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, \delta, s)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, \delta, s)}{\partial z}$$

Далее используем интегральное преобразование Ханкеля [4]

$$T_i^* = \int_{r_0}^{r^*} r T_i B_0(\mu \rho) dr, \quad \rho = \frac{r}{r_0} \quad (2.5)$$

с ядром

$$B_0(\mu \rho) = Y_1(\mu) J_0(\mu \rho) - J_1(\mu) Y_0(\mu \rho) \quad (2.6)$$

где μ — корни характеристического уравнения

$$Y_1(\mu) J_0(\mu R) - J_1(\mu) Y_0(\mu R) = 0, \quad R = \frac{r^*}{r_0} \quad (2.7)$$

Преобразованные по Ханкелю уравнения и граничные условия запишутся

$$\frac{d^2 T_1^*}{dz^2} - \left(\frac{s}{a_1} + \frac{\mu^2}{r_0^2} \right) T_1^* - \frac{2Dr_0}{\pi \mu s} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 T_2^*}{dz^2} - \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{s}{a_2} + \frac{\mu^2}{r_0^2} \right) T_2^* = 0 \quad (2.9)$$

$$T_2^*(\mu, +\infty, s) = 0, \quad T_1^*(\mu, \delta, s) = T_2^*(\mu, \delta, s)$$

$$\frac{dT_1^*(\mu, 0, s)}{dz} = 0, \quad k_\lambda \frac{dT_1^*(\mu, \delta, s)}{dz} = \frac{dT_2^*(\mu, \delta, s)}{dz}, \quad k_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (2.10)$$

Решение уравнений (2.8) и (2.9) получаем в виде

$$T_1^* = \frac{2r_0 D \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 z}{\pi \mu s \beta_1^2 (k_\lambda \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \delta + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 \delta)} - \frac{2r_0 D}{\pi \mu s \beta_1^2} \quad (2.11)$$

$$T_2^* = - \frac{2r_0 D \beta_1 k_\lambda \operatorname{sh} \beta_1 \delta \exp[-\beta_2(z - \delta)]}{\pi \mu s \rho_1^2 (k_\lambda \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \delta + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 \delta)} \quad (2.12)$$

Здесь

$$\beta_1 = \left(\frac{s}{a_1} + \frac{\mu^2}{r_0^2} \right)^{1/2}, \quad \beta_2 = \left[\frac{a_2}{b_2} \left(\frac{s}{a_2} + \frac{\mu^2}{r_0^2} \right) \right]^{1/2} = \left\{ k_b \left[k_a \beta_1^2 - (k_a - 1) \frac{\mu^2}{r_0^2} \right] \right\}^{1/2}$$

$$k_b = a_2 / b_2, \quad k_a = a_1 / a_2$$

3. С целью получения решения для T_1 и T_2 используется формула обращения по Ханкелю для ядра (2.6)

$$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 \mu_n^2 J_0^2(\mu_n R)}{2r_0^2 [J_1^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n R)]} B_0(\mu_n \rho) T_i^* \quad (3.1)$$

Получим после преобразований

$$T_1(r, z, s) = \frac{\pi D}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_0^2(\mu_n R) B_0(\mu_n \rho)}{J_1^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n R)} \left[\frac{\beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 z}{s \beta_1^2 (k_\lambda \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \delta + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 \delta)} - \frac{1}{s \beta_1^2} \right] \quad (3.2)$$

$$T_2(r, z, s) = - \frac{\pi D}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_0^2(\mu_n R) B_0(\mu_n \rho) k_\lambda}{[J_1^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n R)]} \times \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \delta \exp[-\beta_2(z - \delta)]}{s \beta_1 (k_\lambda \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \delta + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 \delta)} \quad (3.3)$$

4. При обратном преобразовании Лапласа используется формула обращения

$$p_i(r, z, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\tau} T_i(r, z, s) ds \quad (4.1)$$

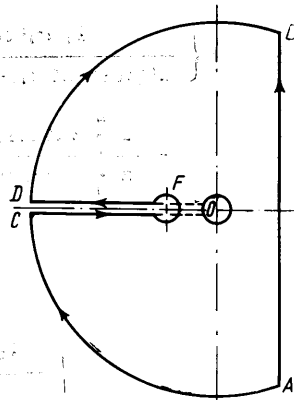
где интегрирование ведется вдоль прямой, параллельной мнимой оси комплексной плоскости s , так что эта прямая проходит правее всех особых точек подынтегральной функции. Анализ n -членов рядов (3.2) и (3.3) показывает, что они имеют точку ветвления, расположенную в отрицательной части действительной оси; ее координата $-a_2\mu_n^2/r_0^2$.

Анализ уравнения

$$k_\lambda \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \delta + \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 \delta = 0 \quad (4.2)$$

проведенный аналогично исследованию корней в работе [5], показал, что это уравнение вообще не имеет корней (комплексных, чисто мнимых, действительных).

Функции (3.2) и (3.3) имеют простой полюс в точке 0. Следовательно, для n -х членов рядов интеграл вдоль прямой AB (фиг. 2) сводится к интегралу по контуру $ACFDDB$ и произведению $2\pi i$ на вычет в точке $s = 0$. Особенность от β_1 лежит вне контура. Так как интегралы вдоль CA и DB при радиусе окружности $r \rightarrow \infty$ равны нулю, то искомые функции складываются из интегралов вдоль верхнего и нижнего берегов разреза, интеграла вдоль окружности вокруг точки ветвления и вычета в точке $s = 0$, умноженного на $2\pi i$. Продолжение разреза до точки $s = 0$ позволяет исключить интеграл вдоль малой окружности. После преобразований, переходя от интеграла в области комплексного переменного к интегралу в области вещественного переменного, получим окончательно, используя для величины $\exp[-\beta_2(z - \delta)]$ разложение в ряд, выражения для давлений закачки в пластах



Фиг. 2

$$p_1(r, z, \tau) = \frac{\pi D}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_0^2(\mu_n R) B_0(\mu_n \rho)}{J_1^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n R)} \times \quad (4.3)$$

$$\times \left\{ \frac{k_b^{1/2} r_0^2 \operatorname{ch}(\mu_n z / r_0)}{\mu_n^2 [k_\lambda \operatorname{sh}(\mu_n \delta / r_0) + k_b^{1/2} \operatorname{ch}(\mu_n \delta / r_0)]} - \frac{r_0^2}{\mu_n^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{a_1 \mu_n^2 \tau}{r_0^2}\right) \right] \right\} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k_\lambda A_n \cos(vz/\delta) \sin v \exp[-a_1(v^2/\delta^2 + \mu_n^2/r_0^2)\tau] dv}{(v^2/\delta^2 + \mu_n^2/r_0^2) \delta (A_n^2 \cos^2 v + k_\lambda^2 v^2 \sin^2 v/\delta^2)}$$

$$p_2(r, z, \tau) = \frac{\pi D}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_0^2(\mu_n R) B_c(\mu_n \rho)}{J_1^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n R)} \left\{ \frac{-k_\lambda \operatorname{sh}(\mu_n \delta / r_0) r_0^2 \exp[k_b^{1/2} \mu_n (z - \delta) / r_0]}{\mu_n^2 [k_\lambda \operatorname{sh}(\mu_n \delta / r_0) + k_b^{1/2} \operatorname{ch}(\mu_n \delta / r_0)]} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k_\lambda \sin v \{A_n \cos v \cos[A_n(z - \delta)] - k_\lambda v \sin v \sin[A_n(z - \delta)] / \delta\}}{(v^2/\delta^2 + \mu_n^2/r_0^2) \delta (A_n^2 \cos^2 v + k_\lambda^2 v^2 \sin^2 v/\delta^2)} \times \exp\left[-a_1 \left(\frac{v^2}{\delta^2} + \frac{\mu_n^2}{r_0^2}\right) \tau\right] dv \right\} \quad (4.4)$$

Здесь

$$A_n = \left\{ k_b \left[(k_a - 1) \frac{\mu_n^2}{r_0^2} + k_a \frac{v^2}{\delta^2} \right] \right\}^{1/2}$$

Практически требуется знать распределение давлений при больших значениях времени τ (порядка нескольких лет и даже десятков лет). В этом случае можно ограничиться одними первыми членами рядов в уравнениях (4.3) и (4.4), так как все последующие члены пренебрежимо малы по сравнению с первыми. Это связано с тем, что корни уравнения (2.7) действительны [5] и монотонно возрастают [6].

В случае необходимости могут быть рассмотрены пласты бесконечного радиуса. Тогда решения для давления закачки запишутся

$$p_1(r, z, \tau) = \int_0^{\infty} \frac{2r_0 B_0(\mu \rho) D}{\pi} \times \quad (4.5)$$

$$\times \left\{ \frac{k_b^{1/2} r_0^2 \operatorname{ch}(\mu z / r_0)}{\mu^2 [k_\lambda \operatorname{sh}(\mu \delta / r_0) + k_b^{1/2} \operatorname{ch}(\mu \delta / r_0)]} - \frac{r_0^2}{\mu^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{a_1 \mu^2 \tau}{r_0^2}\right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_\lambda A \cos(vz/\delta) \sin v \exp[-a_1(v^2/\delta^2 + \mu^2/r_0^2)\tau] dv}{(v^2/\delta^2 + \mu^2/r_0^2) \delta (A^2 \cos^2 v + k_\lambda^2 v^2 \sin^2 v/\delta^2)} d\mu$$

$$p_2(r, z, \tau) = \int_0^{\infty} \frac{2r_0 B_0(\mu \rho) D}{\pi} \times \quad (4.6)$$

$$\times \left\{ -\frac{k_\lambda \operatorname{sh}(\mu \delta / r_0) r_0^2 \exp[-k_b^{1/2} \mu (z - \delta) / r_0]}{\mu^2 [k_\lambda \operatorname{sh}(\mu \delta / r_0) + k_b^{1/2} \operatorname{ch}(\mu \delta / r_0)]} + \right.$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_\lambda \sin v \{A \cos v \cos [A(z - \delta)] - k_\lambda v \sin v \sin [A(z - \delta)] / \delta\}}{(v^2/\delta^2 + \mu^2/r_0^2) \delta (A^2 \cos^2 v + k_\lambda^2 v^2 \sin^2 v/\delta^2)} \times$$

$$\left. \times \exp\left[-a_1 \left(\frac{v^2}{\delta^2} + \frac{\mu^2}{r_0^2}\right) \tau\right] dv \right\} d\mu$$

Полученные решения могут быть использованы также для расчета количества жидкости, перетекающей из пласта 1 в пласты 2 и 3.

В заключение авторы благодарят О. Э. Лифшица и Э. Э. Вайно за участие в постановке задачи и обсуждении результатов.

Поступило 10 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Everdingen A. F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. Journal of Petroleum Technology, 1949, vol. 1, No. 12.
2. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостехиздат, 1959.
3. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. Изд-во «Недра», 1965.
4. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехтеоретиздат, 1956.
5. Карслоу Г. Теория теплопроводности. Гостехтеоретиздат, 1947.
6. Юшков П. П. Функции Бесселя и их приложения к задачам об охлаждении цилиндра. Изд-во АН БССР, 1962.