О ЛИНЕЙНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Т. Ф. ИВАНОВ

(*Гурьев*)

Рассматривается фильтрация упругой жидкости в замкнутом пласте в условиях медленного его истощения, когда происходит падение давления с постоянной скоростью. Высвобождающийся при падении давления объем жидкости интерпретируется как распределенные источники, и распределение давления в пласте описывается уравнением Пуассона. Предполагается, что проницаемость в вертикальном и горизонтальном напряжениях различны, и по мощности пласта переменны. В таких условиях рассматривается задача о притоке к несовершенной скважине, вскрывающей часть пласта.

Формулируется краевая задача, отвечающая поставленной физической задаче; рассматривается разложение решения по собственным функциям; рассматривается связь между дебитом, темпом снижения давления и радиусом области питания скважины.

Указывается способ оценки полного упругого объема замкнутого нефтяного пласта с активной контурной водой и газовой шапкой, по данным изменения осредненного пластового давления в процессе квазистационарного отбора жидкости из пласта. Обосновано построение решения неоднородного уравнения радиальной фильтрации с установившимся отбором жидкости из замкнутой области фильтрации в несовершенную скважину.

Уравнения нестационарной фильтрации в неоднородной пористой среде при упругом режиме получены в линейном приближении. При установившейся скорости фильтрации в замкнутой области силовой потенциал определяется неоднородным уравнением (1.6). Приведен метод оценки полного объема замкнутого нефтяного пласта с активной контурной водой по данным изменения осредненного пластового давления в процессе квазистационарного отбора жидкости из пласта.

Обосновано построение решения неоднородного уравнения радиальной фильтрации с установившейся скоростью при отборе жидкости в несовершенную скважину. Показано, что дебит скважины зависит в большей мере от горизонтальной проницаемости пористой среды, чем от вертикальной.

1. Систему уравнений неразрывности и закона Дарси в теории ламинарной фильтрации запишем в виде

$$\frac{dm\sigma}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\sigma v_i)}{\partial x_i}=0,\qquad \sigma v_i+\frac{k_i}{\nu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}-\sigma g_i\right)=0 \tag{1.1}$$

Здесь σ — плотность жидкости, m — пористость среды, v_i — составляющие объемной скорости фильтрации, k_i — проницаемость среды в направлении координаты x_i, ν — кинематическая вязкость, p — давление, g_i — составляющие вектора силы тяжести. Полагается, что частные k_i / ν не зависят от давления, а зависимость произведения $m\sigma$ от давления линейна

$$\frac{dm\sigma}{dp}=\beta=\text{const} \tag{1.2}$$

При этом отношении β / σ будет аналогом коэффициента упругоемкости пласта, по Н. В. Щелкачеву [1].

Тогда из (1.1) получим уравнения ламинарной фильтрации в линейном приближении при упругом режиме

$$\frac{\partial p}{\partial t}=b^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_i\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}-\sigma_i g_i\right)\right],\qquad u_i=-\frac{k_i}{\nu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}-\sigma_0 g_i\right)\qquad\left(b^2=\frac{1}{\beta\nu}\right) \tag{1.3}$$

Здесь $u_i=\sigma v_i$ — составляющие массовой скорости фильтрации, σ_0 — осредненное значение плотности жидкости. В однородной и изотропной пористой среде линейная фильтрация при упругом режиме описывается уравнениями

$$\frac{\partial p}{\partial t}=a^2\nabla^2 p,\qquad u_i=-\frac{k_0}{\nu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}-\sigma_0 g_i\right) \tag{1.4}$$

Здесь $k_0=\text{const}$ — проницаемость, $a^2=b^2k_0$ — параметр, зависящий от свойств жидкости и пористой среды [1-3].

При исследовании задач, связанных с распределением давления жидкости в упругом пористом пласте с установившейся скоростью фильтрации, обычно принимается, что давление жидкости в однородном пласте определяется уравнением Лапласа [4–6].

Такое предположение, справедливое при бесконечной области фильтрации, неприемлемо в случае замкнутых пластов с непроницаемыми границами, так как уравнение Лапласа не допускает возможности установившегося отбора жидкости из замкнутого пласта.

Большинство же нефтяных месторождений вместе с их контурными водами и газовыми шапками целесообразно представлять замкнутыми областями фильтрации с поверхностными стоками (эксплуатационные скважины), поверхностными источниками (нагнетательные скважины) и распределенными объемными источниками (упругие силы пласта).

Целесообразность такого представления обусловливается тем, что при упругом режиме фильтрации и установившемся отборе жидкости из пласта пластовое давление изменяется в большинстве случаев практически пропорционально времени разработки.

Пусть в пласте или отдельном его участке, окружающем одну или несколько скважин, давление зависит от времени линейно и коэффициент пропорциональности не зависит от координат. Тогда распределение давления и скорости фильтрации в пласте формально определяется равенствами

$$p = \Phi(x_1, x_2, x_3) - \sigma_0 g_i x_i - 2b^2 Bt, \qquad u_i = -\frac{k_i}{\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi(x_i)$ — потенциал.

Подставляя первое уравнение (1.5) в первое уравнение (1.3), получим уравнение ламинарной фильтрации с установившейся скоростью в замкнутой области неоднородного пласта

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) = -2B \tag{1.6}$$

Если пористая среда однородна и изотропна, то уравнение (1.6) преобразуется в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -2B / k_0 \tag{1.7}$$

Определим коэффициент B в уравнении (1.5) из условия неразрывности жидкости в интегральной форме. Количество жидкости V, вытекающее в единицу времени из области V, заключенной внутри поверхности S, и масса жидкости, заключенная в объеме V, соответственно равны

$$Q_0 = -\oint_S u n d S, \qquad \int_V m\sigma dV$$

Из этих двух выражений с учетом отсутствия посторонних источников внутри поверхности S получается

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V m\sigma dV = \int_V \frac{\partial (m\sigma)}{\partial t} dV = \oint_S u n d S = -Q_0 \tag{1.8}$$

Согласно (1.8) получается

$$2BV = Q_0 \nu \tag{1.9}$$

Здесь V — объем пласта, S — замыкающая его поверхность.

Из (1.2), (1.3) и (1.9) следует, что коэффициент пропорциональности $2b^2B$ в равенстве (1.5), характеризующий изменение давления в замкнутом пласте в единицу времени, определяется при однородном пласте равенством

$$2b^2 B = Q_0 \beta^{-1} V^{-1} \tag{1.10}$$

Равенство (1.10) можно использовать для оценки осредненного значения β по замкнутому пласту, если известен общий объем пласта и почти установившийся, длительное время, дебит скважин.

Для этого достаточно оценить осредненный коэффициент падения средневзвешенного, приведенного к одному уровню пластового давления в процессе разработки. Во многих случаях весьма важной оказывается задача определения общего объема пласта V, если параметр β определен каким-либо другим методом.

Обычно при подсчете запасов определяется объем нефтенасыщенной части пласта и объем, занятый газовой шапкой. Объем же пласта, насыщенного активными контурными водами, входящий в единую гидродинамическую систему нефтяного горизонта, во многих случаях неизвестен. Определение общего объема пласта V в процессе пробной эксплуатации поможет правильно оценить упругую энергию пласта и в некоторых случаях избежать излишних расходов средств.

Например, известны случаи, когда при разработке небольших нефтяных месторождений из-за отсутствия данных об общем объеме пласта на контуре нефтеносности бурились нагнетательные скважины, которые впоследствии не использовались, так как поддержание пластового давления обеспечивало напор контурных вод.

С помощью равенства (1.10) общий объем пласта V можно оценить уже в процессе пробной эксплуатации.

2. Уравнения (1.5), (1.6) при радиальной фильтрации с установившейся скоростью в замкнутом z — неоднородном пласте [7], в цилиндрической системе координат (z, r, θ) преобразуются к виду

$$p = \Phi(r, z) - \sigma_0 gz - 2B^2Bt, \quad u_r = -\frac{k_r}{\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_z = -\frac{k_z}{\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{2.1}$$

$$k_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{dk_z}{dz}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + k_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{k_r}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2B \tag{2.2}$$

Здесь $k_z = k_z(z)$, $k_r = k_r(z)$ — вертикальная и горизонтальная проницаемость.

Пусть начало координат находится в точке пересечения оси скважины радиуса r_0 и кровли пласта мощностью H. Скважина вскрывает пласт в интервале (z_1, z_2). Уравнение (2.2) нужно решить при граничных условиях вне интервала вскрытия пласта скважиной

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0,H} = 0 \quad (r_0 \leqslant r \leqslant r_1), \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_1} = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant H)$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0 \quad (0 \leqslant z < z_1, \quad z_2 < z \leqslant H) \tag{2.3}$$

Здесь r_0 — радиус скважины, r_1 — радиус области фильтрации. На стенках скважины в интервале вскрытия заданы или значения потенциала Φ, или значения радиальной составляющей скорости фильтрации

$$\Phi = \Phi_0(z) \text{ при } r = r_0 \quad (z_1 \leqslant z \leqslant z_2) \qquad (a) \tag{2.4}$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} = \eta(z) \quad (z_1 < z < z_2) \quad (в)$$

Уравнение (2.2) имеет формальное решение, удовлетворяющее двум первым граничным условиям (2.3)

$$\Phi = \Phi_1 - A\left(\ln\frac{r_1}{r} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} - \frac{1}{2}\right) + \varphi(z) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[K_0(c_n r) + \frac{K_1(c_n, r_1)}{I_1(c_n, r_1)} I_0(c_n r)\right] \psi_n(z) \tag{2.5}$$

Здесь c_n, b_n — произвольные вещественные постоянные. Функция $\varphi(z)$ — есть решение краевой задачи

$$k_z\varphi''(z) + \frac{dk_z}{dz}\varphi'(z) = -2B + \frac{2Ak_z}{r_1^2}, \quad \varphi'(0) = \varphi'(H) = 0 \tag{2.6}$$

Производная $\varphi'(z)$ и постоянная A определяются равенствами

$$\varphi'(z) = -\frac{2Bz}{k_z} + \frac{2A}{r_1^2 k_z}\int_0^z k_r dz, \qquad A\int_0^H k_r dz = BHr_1^2 \tag{2.7}$$

Здесь $K_0(x)$, $K_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ — бесселевы функции мнимого аргумента x.

Функции $\psi_n(z)$ будут решениями самосопряженной краевой задачи

$$[k_z(z)\psi_n'(z)]' + c_n^2 k_r(z)\psi_n(z) = 0, \qquad \psi_n'(0) = \psi_n'(H) = 0 \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует

$$\int_0^H k_r(z)\psi_n(z)\,dz = 0 \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{2.9}$$

Полагается, что в области фильтрации горизонтальная проницаемость k_r непрерывна, а вертикальная проницаемость пласта k_z имеет непрерывную первую производную. Тогда краевая задача (2.8) есть частный случай самосопряженной краевой задачи Штурма, и на основании известных теорем [8] нетрудно убедиться, что ее решения удовлетворяют следующим условиям. Существует бесконечная возрастающая последовательность действительных собственных значений параметра c_n^2, причем все значения параметра c_n^2 положительны и минимальное из них равно нулю. Каждому собственному значению параметра c_n^2 соответствует, с точностью до постоянного множителя, одна собственная функция $\psi_n(z)$. Все собственные функции взаимно ортогональны, и их можно нормировать

$$\int_0^H k_r\psi_p\psi_q dz = \delta_{pq}, \qquad \delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases} \tag{2.10}$$

Нормированные собственные функции $\psi_n(z)$ образуют полную систему функций, и если $\Phi_0(z)$ — непрерывная в промежутке $(0, H)$ кусочно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\Phi_0'(0) = \Phi_0'(H) = 0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $(0, H)$ ряд

$$\Phi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n, \qquad a_n = \int_0^H k_r(z)\Phi_0(z)\psi_n(z)\,dz \tag{2.11}$$

В рассматриваемой задаче потенциал на стенках скважины $\Phi_0(z)$ есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция от z (производная $d\Phi_0 / dz$ при $r = r_0$ может испытывать разрыв при $z = z_1, z_2$). Полагается, что постоянная Φ_1 и коэффициенты b_n в (2.5) определяются соответственно равенствами

$$\Phi_1 = a_0 + \ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{r_1^2} - \frac{1}{2} \tag{2.12}$$

$$b_n = a_n\left[K_0(c_n r_0) + \frac{K_1(c_n r_1)}{I_1(c_n r_1)} I_0(c_n r_0)\right]^{-1}$$

В результате подстановки в (2.5) вместо b_n и Φ_1 их выражения из (2.12) с учетом (2.11) получается разложение потенциала $\Phi_0(z)$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\psi_n(z)$, и ряд в правой части (2.5) равномерно сходится к потенциалу $\Phi(z, r)$ во всей области фильтрации. Последнее верно в силу выполнения неравенства:

$$0 \leqslant K_0(c_n r) + \frac{K_1(c_n r_1)}{I_1(c_n r_1)} I_0(c_n r) \leqslant K_0(c_n r_0) + \frac{K_1(c_n r_1)}{I_1(c_n r_1)} I_0(c_n r_0)$$

Итак, если горизонтальная проницаемость $k_r(z)$ непрерывна, а вертикальная проницаемость $k_z(z)$ имеет и непрерывную первую производную, то граничная задача (2.2)—(2.4) имеет равномерно сходящееся решение (2.5) и это решение единственно [9].

Согласно (2.1), (2.5), (2.6), (2.9) дебит скважины в единицу времени определяется равенством

$$Q_0 = \frac{2\pi r_0}{\nu}\int_0^H k_r\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} dz = \frac{2\pi}{\nu} A\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)\int_0^H k_r dz \tag{2.13}$$

Отсюда и из второго равенства (2.7) получается выражение для дебита, являющееся частным случаем уравнения (1.9)

$$Q_0\nu = 2\pi BH(r_1^2 - r_0^2)$$

Согласно (2.12), при заданных параметрах пласта k_r, k_z, r_0, r_1, H постоянная a_0 характеризует характер и степень несовершенства скважины. Так как $\Phi_1 > a_0 \geqslant 0$ и Φ_1 не зависит от проницаемости пласта, то из (2.13) следует, что дебит скважины в общем больше зависит от горизонтальной проницаемости пласта, чем от вертикальной. Методы определения постоянных $c_n b_n$ практически не отличаются от методов, использованных ранее при определении подобных постоянных для бесконечной области фильтрации [7], и здесь не приводятся.

В случае однородного пласта и совершенной скважины (плоскорадиальная фильтрация) давление в пласте, согласно (2.1), (2.5), определяется известной [10] формулой

$$p = p_0 - \frac{Q_0\nu}{2\pi r_0 H k_0}\left(\ln\frac{r_1}{r} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} - \frac{1}{2} + 2a^2 t\right)$$

Следует отметить, что значение эффективного радиуса области фильтрации к скважине в пористом пласте обусловлено в основном упругой энергией пласта.

Поступило 24 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Основные уравнения фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.
2. Jacob C. E. On the flow of water in an elastic artesian aguife. Trans. Americ. Geophys. Union Reprts. and pepers. Hydrology, 1940.
3. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упругопластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1965.
5. Пирвердян А. М. Приближенное решение задачи о фильтрации при упругом режиме. Нефтяная подземная гидравлика. Азнефтеиздат, 1956.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР ОТН, 1954, № 9.
7. Иванов Т. Ф. О притоке жидкости к несовершенной скважине в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1958.
9. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд. иностр. лит., 1958.
10. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ДАВЛЕНИЙ ПРИ ЗАКАЧКЕ В ПЛАСТ В УПРУГОМ РЕЖИМЕ

А. Г. ГОРЕЛИК, Н. М. КУЧУКОВА

(Москва)

Рассматривается распределение давлений в системе пластов при закачке жидкости в центральный пласт с высокой пьезопроводностью. Кровля и подошва предполагаются слабопроницаемыми с различными коэффициентами пьезопроводности по радиусу и по вертикали.

Задача решается при помощи интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля. Получены аналитические решения для пластов конечного и бесконечного радиуса.

Рассматривается нестационарное распределение давлений в пласте закачки, кровле и подошве при анизотропности слабопроницаемых изолирующих пластов. Существующие решения [1–3] ограничиваются рассмотрением либо одного пласта, либо введением мало реальных допущений о постоянстве давления и изотропности изолирующих пластов. В данной работе получены аналитические выражения распределения давлений для случая пластов конечного и бесконечного радиуса при постоянном дебите на скважине. Решения позволяют рассчитать поле давлений во всех трех пластах в условиях их взаимного влияния и оценить, таким образом, интенсивность перетекания закачиваемой жидкости в верхний и нижний изолирующие пласты в любой момент времени.