О ФИЛЬТРАЦИИ РАСТВОРОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ КРИТЕРИЯ ПЕКЛЕ

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ, В. А. ПОСТНОВ

(*Новосибирск*)

При изучении движения солевых растворов в грунте обычно считают [1], что скорость фильтрации раствора

$$\mathbf{v} = -k/\mu \operatorname{grad} p \tag{0.1}$$

т. е. объемное количество жидкости, протекающей за единицу времени через единицу площади при заданном градиенте давления, не зависит от изменения концентрации раствора. В формуле (0.1) k — проницаемость грунта, μ — вязкость раствора, p — давление. Ради простоты здесь рассматривается движение в горизонтальной плоскости.

Это предположение оправдано, как указывалось в [1], если концентрация раствора находится в пределах от 2—3 до 50—60 *г/л*.

Однако [2, стр. 143] при изменении минерализации воды от 0 до 200 *г/л* ее вязкость при температуре 20° С изменяется от 1 до 1.9 *спз*. Если считать, что во время фильтрации растворов проницаемость среды k не меняется, то, как видно из формулы (0.1), скорость $\mathbf{v}$ с изменением концентрации может меняться весьма значительно. Учет этого изменения сильно усложняет вопрос о движении солей в грунте.

Ниже приведем решение задачи о прямолинейном и осесимметрическом движении растворов для случая больших значений критерия Пекле, когда эффектом диффузии солей можно пренебречь по сравнению с их конвективным переносом.

1. Прямолинейное движение. Рассмотрим приток раствора концентрации $c(x, t)$ к галерее в пласте длиной l, постоянной мощностью m и эффективной проницаемостью σ. Здесь x — координата поперечного сечения пласта, t — время.

Пусть на границах пласта заданы давления

$$p(0, t) = p_0(t), \qquad p(l, t) = p_1(t) \tag{1.1}$$

и положим для определенности, что $p_1(t) < p_0(t)$.

Закон движения Дарси объемной массы раствора представим в виде

$$v(x, c, t) = -K(c)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \qquad \left(K(c) = \frac{k}{\mu(c)}\right) \tag{1.2}$$

Считая жидкость и среду несжимаемой, а также пренебрегая эффектом диффузии, запишем законы сохранения массы растворителя и растворенного в нем вещества:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \qquad -\frac{\partial}{\partial x}(vc) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t} \tag{1.3}$$

Начальное и граничное условия для функции $c(x, t)$ представим в виде:

$$c(x, 0) = f(x), \qquad c(0, t) = \varphi(t) \tag{1.4}$$

Здесь $f(x)$ и $\varphi(t)$ — заданные непрерывные функции. Вводя новую переменную $\tau = A(t)$ по формуле

$$v = \sigma d\tau / dt \qquad (\tau(0) = 0) \tag{1.5}$$

Второе уравнение (1.3) приведем к виду $\partial c / \partial x + \partial c / \partial \tau = 0$. Второе уравнение (1.4) в терминах τ примет вид

$$c(0, \tau) = \varphi[A^{-1}(\tau)] \tag{1.6}$$

Здесь $t = A^{-1}(\tau)$ — функция, обратная функции τ.

Очевидно, что в силу условий (1.4) интегральная поверхность $c(x, \tau)$ будет претерпевать излом вдоль харктеристики, проходящей через точку $(x = 0;\ \tau = 0)$.

Систему характеристик составят уравнения:

$$\frac{dx}{1} = \frac{d\tau}{1} = \frac{dc}{0}$$

интегрируя которые, находим

$$\tau - \tau_0 = x - x_0, \qquad c = c_0 \tag{1.7}$$

Полагая здесь $x_0 = 0$ и $c_0 = \varphi[A^{-1}(\tau_0)]$ и исключая параметр τ_0, найдем величину $c = \varphi[A^{-1}(\tau - x)]$ для $x \leqslant \tau$. Аналогично, полагая $\tau_0 = 0$, $c_0 = f(x_0)$ и исключая параметр x_0, получим $c(x, \tau) = f(x - \tau)$ для $x > \tau$.

Таким образом, решение второго уравнения (1.3) может быть записано в виде

$$c(x, t) = \begin{cases} \varphi\,\{A^{-1}[A(t) - x]\} & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant A(t) \\ f[x - A(t)] & \text{для } A(t) < x \leqslant l \end{cases} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.5) в (1.2), найдем

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\frac{\sigma}{k}\mu(c)\frac{dA}{dt}$$

Интегрируя и используя условие (1.1), получим формулу для давления

$$p(x,t) = -\frac{\sigma}{k}\frac{dA}{dt}\int_0^x \mu(c)\,dx + p_0(t)$$

Отсюда, полагая $x = l$, найдем для $A(t)$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\sigma}{k}\frac{dA}{dt} = [p_0(t) - p_1(t)]\left(\int_0^l \mu(c)\,dx\right)^{-1} \tag{1.9}$$

Здесь, согласно (1.8)

$$\int_0^l \mu(c)\,dx = \int_0^A \mu\,\{\varphi[A^{-1}(A-x)]\}\,dx + \int_A^l \mu[f(x-A)]\,dx$$

Определяя из (1.9) функцию $A(t)$, удовлетворяющую условию $A(0) = 0$, можно определить концентрацию раствора, движущегося в пласте, и давление.

Заметим, что уравнение (1.9) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать при произвольно заданных функциях $\mu(c)$, $\varphi(t)$, $f(x)$ с помощью ЭВЦМ. Действительно, принимая A за независимую переменную, вводя функцию

$$\Phi(A) = \int_0^A \mu\,\{\varphi[t(\xi)]\}\,d\xi \qquad (\Phi(0) = 0)$$

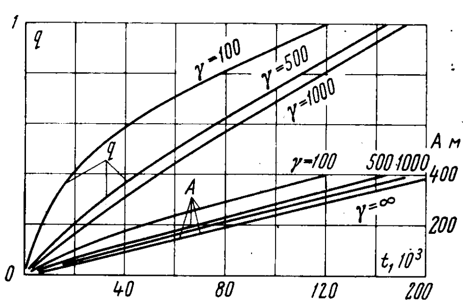
легко видеть, что (1.9) эквивалентно следующей системе:

$$dt/dA = F_1(A, t, \Phi), \qquad d\Phi/dA = F_2(t)$$

$$F_1 = \frac{\sigma}{k[p_0(t) - p_1(t)]}\left\{\Phi + \int_0^{l-A} \mu[f(\xi)]\,d\xi\right\}$$

$$F_2 = \mu[\varphi(t)]$$

Здесь F_1 и F_2 — известные функции.



Фиг. 1

Приведем пример. Пусть $K(c) = \alpha - \beta c$, т. е. коэффициент фильтрации при движении раствора есть линейная функция, $\varphi = c_0 = \mathrm{const}$, $f(x) = c_0(1 - x/l)$. Тогда

$$\sigma\frac{dA}{dt} = (p_0 - p_1)(\alpha - \beta c_0)\left[A + \gamma\ln\left(1 + \frac{l-A}{\gamma}\right)\right]^{-1} \qquad \left(\gamma = \frac{l(\alpha - \beta c_0)}{\beta c_0}\right) \tag{1.10}$$

Интегрируя это уравнение с учетом начального условия $A(0) = 0$, получаем

$$\frac{A^2}{2} + \gamma A\left[\ln\left(1 + \frac{l-A}{\gamma}\right) - 1\right] - \gamma(\gamma+1)\ln\left(1 - \frac{A}{\gamma + l}\right) = t_1$$

$$\left(t_1 = \frac{\alpha - \beta c_0}{\sigma}\int_0^t (p_0 - p_1)\,dt\right)$$

Распределение концентрации в пласте представит функция

$$c(x,t) = \begin{cases} c_0 & (x \leqslant A(t)) \\ c_0(l + A - x)/l & (x \geqslant A(t)) \end{cases}$$

Отсюда и из (1.10) найдем количество вещества, поступающего с раствором в галерею за единицу времени на единицу длины галереи

$$q(t_1) = \frac{Ql}{c_0 m(\alpha + \beta c_0)(p_0 - p_1)} = \frac{1}{1 + (\gamma/A)\ln[(\gamma + A - l)/\gamma]}$$

где Q — дебит галереи. Зависимости $A(t_1)$ и $q(t_1)$ для различных значений параметров γ представлены на фиг. 1.

2. Осесимметрическое движение. Пусть в пласте заданы законтурное и забойное давления:

$$p(R, t) = p_1(t), \quad p(r_0, t) = p_0(t) \quad (p_0 < p_1) \tag{2.1}$$

Здесь R — радиус контура питания с известной заранее концентрацией раствора, r_0 — радиус скважины, расположенной в центре кругового пласта.

Уравнения (1.2) — (1.3), в данном случае примут вид:

$$v(r, c, t) = -K(c)\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial r}(rvc) = r\sigma\frac{\partial c}{\partial t}$$

Уравнения характеристик имеют вид:

$$\tau - \tau_0 = -{}^1/_2(r^2 - r_0^2), \qquad c = c_0 \tag{2.2}$$

Таким образом, учитывая условия для функции $c = c(r, t)$, найдем:

$$c(r,t) = \begin{cases} f(\sqrt{2A + r^2}) & \text{для } r_0 \leqslant r \leqslant \sqrt{R^2 - 2A} \quad (f(r) = c(r,0)) \\ \varphi\,\{A^{-1}[A + {}^1/_2(r^2 - R^2)]\} & \text{для } \sqrt{R^2 - 2A} < r \leqslant R \quad (\varphi(t) = c(R,t)) \end{cases}$$

Здесь $t = A^{-1}(\tau)$ — функция, обратная функции $\tau = A(t) \in [0, {}^1/_2(R^2 - r_0^2)]$, удовлетворяющей интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\sigma}{k}\frac{dA}{dt} = [p_1(t) - p_0(t)]\left(\int_{r_0}^{\rho}\frac{\mu(c)}{r}dr + \int_{\rho}^{R}\frac{\mu(c)}{r}dr\right)^{-1} \quad (\rho = \sqrt{R^2 - 2A})$$

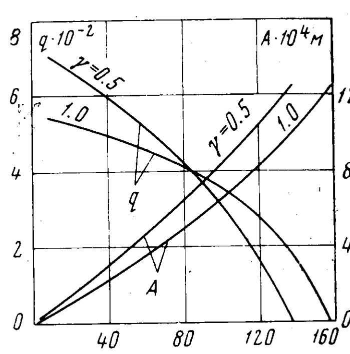
Рассмотрим пример. В некоторых случаях зависимость вязкости раствора от его концентрации можно представить в виде

$$\mu(c) = \mu_0 + \beta_1 c \tag{2.3}$$

Здесь μ_0 — вязкость растворителя, а β_1 для минерализованной воды, например, может быть принято [2] равным $5\cdot 10^{-3}$ *спз·л/г*. Примем, далее, $\varphi \equiv 0$, $f(r) = c_0[1 - (r^2 - r_0^2) / (R^2 - r_0^2)]$, т. е. имеется область питания с пресной водой и концентрация воды в пласте падает пропорционально квадрату расстояния от оси скважины. Не останавливаясь на выкладках и считая $r_0 \ll R$, приведем решение

$$t_1 = \frac{\gamma_1}{2}\left\{A\ln\frac{R^2 - 2A}{r_0^2}\left[1 - \frac{A}{R^2}\right] - \frac{R^2}{4}\ln\left(1 - \frac{2A}{R^2}\right) - \frac{3}{2}A\left[1 + \frac{A}{R^2}\right]\right\} + A\ln\frac{R}{r_0}$$

$$\left(t_1 = \frac{k}{\sigma\mu_0}\int_0^t [p_1(t) - p_0(t)]\,dt\right) \qquad \left(\gamma_1 = \frac{\beta_1 c_0}{\mu_0}\right)$$



Фиг. 2

$$q(t_1) = \frac{Q\mu_0}{2\pi mk(p_1 - p_0)c_0} = \left[\frac{\gamma_1}{2}\left[\frac{2}{\gamma_1} - \frac{R^2}{1 - 2A}\ln\frac{R}{r_0} + \ln\frac{R^2 - 2A}{r_0^2} - 1\right]\right]^{-1}$$

Здесь Q — ежесекундная масса поступающего в скважину растворенного вещества. Графики функций $A(t_1)$ и $q(t_1)$ для $\gamma = 0.5$, 1 приведены на фиг. 2.

Авторы благодарят П. Я. Полубаринову-Кочину за обсуждение результатов.

Поступило 15 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 10.
2. Справочник гидрогеолога. Госгеолтехиздат, 1962.