

$$\begin{aligned}
 R_y &= 2\pi b \varepsilon \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left[ \frac{dg_{2n}(b)}{dr} - 2m_{1n}(b) - \frac{f_{1n}(b)}{b} \right], \quad R_z = 0 \\
 M_z &= 4\pi \mu b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left[ \left( \frac{dv_{\theta 0n}}{dr} \right)_{r=b} + \varepsilon^2 \left( \frac{dY_n}{dr} \right)_{r=b} \right] = \\
 &= -4\pi \mu b \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4\omega a}{l\lambda_n} - \varepsilon^2 \frac{\omega a^2 \lambda_n}{l} + \varepsilon^2 \frac{a}{2} [a_n I_1(\lambda_n a) + b_n K_1(\lambda_n a) - \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_n \lambda_n^2 I_1(\lambda_n a) - \beta_n \lambda_n^2 K_1(\lambda_n a)] \right\} / \Lambda_n \\
 \Lambda_n &= \lambda_n [I_1(\lambda_n b) K_1(\lambda_n a) - K_1(\lambda_n b) I_1(\lambda_n a)] \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

Здесь  $m_{1n}(r)$ ,  $m_{2n}(r)$ ,  $f_{1n}(r)$ ,  $f_{2n}(r)$ ,  $g_{1n}(r)$ ,  $g_{2n}(r)$  определены формулами (3.7), (3.11), (3.12), а постоянные  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  — формулами (3.13).

Применив теоремы количества движения и моментов количества движения к массе жидкости, заключенной между шипом и подшипником, с учетом линейности задачи, получим, что воздействие жидкости на вал определяется формулами (5.2). Приведем эту систему сил к центру шипа  $O_1$ . Проекция главного вектора при этом не изменится, а выражение для главного момента относительно оси  $O_1 z_1$  примет вид

$$M_{z_1} = M_z - e R_y \quad (5.3)$$

Таким образом, будет определено воздействие жидкости на шип.

Поступило 23 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А. К. О движении вязкой жидкости между шипом и подшипником. Инженерный сб., 1956, т. 23.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

## О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ШАРОВОМ СЛОЕ

В. И. ЯКУШИН

(Пермь)

Решение уравнений движения вязкой жидкости в замкнутых объемах связано с большими трудностями. В ограниченной полости движение оказывается существенно трехмерным (исключение составляет малоинтересный случай твердого вращения жидкости), и поэтому нелинейные члены не исчезают тождественно. Все немногочисленные примеры точных решений уравнений гидродинамики относятся к открытым потокам.

Вследствие этого единственным исследованным до сих пор замкнутым течением остается движение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (задача Тейлора). Однако это движение происходит в неограниченной полости: в цилиндрическом слое бесконечной длины. Поэтому, как показал Сорокин [1], случай Тейлора не является типичным примером замкнутого течения.

Ниже рассматривается приближенное решение уравнений движения жидкости в шаровом слое, когда внешняя сфера радиуса  $r_2$  покоится, а внутренняя — радиуса  $r_1$  вращается с угловой скоростью  $\Omega = \Omega_1$  ( $n^2 = 1$ ).

Решение ищется методом Галеркина с базисом, состоящим из собственных функций задачи о возмущениях неподвижной жидкости в шаровом слое. Вычисления проводились для двух отношений радиусов  $r_2 / r_1 = 2, 1.7$ .

1. Если в качестве единиц измерения расстояния и скорости выбрать соответственно  $r_1$  и  $\Omega r_1$ , то уравнения стационарного движения и граничные условия примут вид

$$\mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U} + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{U} + \Delta P = 0, \quad \left( R = \frac{\Omega r_1^2}{\nu} - \text{число Рейнольдса} \right) \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U}|_{s_1} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{U}|_{s_2} = 0 \quad (r_0^2 = 1) \quad (1.2)$$

При медленном вращении решение уравнений (1.1) можно искать в виде рядов [2] по степеням  $R$ , раскладывая скорость и градиент давления по векторным шаровым функциям [3]. Это дает

$$U = \sum_{l=0} R^{2l} \Phi_{2l+1}(r) \mathbf{r} \times \nabla P_{2l+1} + \sum_{l=1} R^{2l-1} [F_{2l}(r) \mathbf{r}_0 P_{2l} + G_{2l}(r) r \nabla P_{2l}] \quad (1.3)$$

Здесь  $P_i \equiv P_i(\cos \vartheta)$  — полиномы Лежандра. Радиальные амплитуды  $F_i$  и  $G_i$  связаны уравнением непрерывности

$$G_i = \frac{(F_i r^2)'}{r_i(i+1)} \quad (1.4)$$

Функция  $\Phi_1(r)$  приводится в [4], функции  $F_2$  и  $G_2$  найдены в [5]. Определение следующих членов разложения (1.3) связано с большими вычислительными трудностями. При этом остается неясным, как быстро сходится этот ряд при малых  $R$ . Поэтому представляет интерес получить решение уравнений (1.1), не связанное с малым параметром.

Будем решать уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2) методом Галеркина с базисом из собственных функций задачи о возмущениях неподвижной жидкости в шаровом слое <sup>1</sup>

$$-\lambda u + \nabla p + \text{rot rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{s_1, s_2} = 0 \quad (1.5)$$

Как известно [5, 6], в шаровой полости существуют возмущения двух видов: «азимутальные»

$$\mu_i^i = h_i^i(r) \mathbf{r} \times \nabla P_i$$

когда частица жидкости движется по окружности, параллельной плоскости экватора, и «меридиональные»

$$\mathbf{v}_l^i = f_l^i(r) \mathbf{r}_0 P_l + \frac{(f_l^i r^2)'}{rl(l+1)} r \nabla P_l$$

в которых отсутствует  $\varphi$  — составляющая скорости. Собственные функции  $\mu$  и  $\mathbf{v}$  краевой задачи (1.5) найдены в [5].

Так как все члены разложения (1.3) симметричны относительно отражения в плоскости экватора, то и базисные функции в методе Бубнова — Галеркина должны быть той же симметрии

$$U = \Phi_1(r) \mathbf{r} \times \nabla P_1 + \sum_{l=1} \mathbf{r}_0 P_{2l} \sum_{i=1} C_{2l}^i f_{2l}^i + \sum_{l=1} \frac{1}{2l(2l+1)} r \nabla P_{2l} \sum_{i=1} C_{2l}^i \frac{(f_{2l}^i r^2)'}{r} + \sum_{l=0} \mathbf{r} \times \nabla P_{2l+1} \sum_{i=1} C_{2l+1}^i h_{2l+1}^i \quad (1.6)$$

Чтобы удовлетворить неоднородным граничным условиям (1.2), из последней суммы (1.6) выделен член с амплитудой  $\Phi_1(r)$ . Все остальные амплитудные функции обращаются в нуль на внутренней и внешней сферах.

Из-за громоздких вычислений, объем которых резко возрастает с увеличением числа используемых функций, в выражении (1.6) пришлось ограничиться 12 функциями: 6 азимутальными и 6 меридиональными

$$\mu_i^i \quad (l = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3), \quad \mathbf{v}_l^i \quad (i = 1, 2, 3; \quad l = 2, 4) \quad (1.7)$$

Уравнения (1.1) стандартным образом приводятся к системе 12 нелинейных алгебраических уравнений, определяющих зависимость коэффициентов  $C_n^m$  от числа Рейнольдса  $R$ .

Известно [9], что система нелинейных алгебраических уравнений

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.8)$$

может быть решена методом итераций, если выполняется одно из следующих условий:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} < 1, \quad \sum_{i=1}^n M_{ij} < 1, \quad \sum_{i,j=1}^n |M_{ij}|^2 < 1, \quad M_{ij} = \max_G \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \quad (1.9)$$

<sup>1</sup> Аналогичные методы успешно применялись в работах [6, 7] для решения нелинейных уравнений конвекции. Для данной задачи этот метод предпочтительнее перед другими численными методами, например сеточными, так как область криволинейные границы и разностная схема может оказаться неустойчивой.

Здесь  $G$  — область, содержащая решение системы (1.8). Так как  $U \rightarrow \Phi_1(r) \times \nabla P_1$  при  $R \rightarrow 0$ , то все  $C_n^m \rightarrow 0$  и для нашей системы условия (1.9) выполняются по крайней мере для малых  $R$ .

При  $R = 1$  все  $C_n^m$  полагались равными нулю, и эти значения итерировались до тех пор, пока относительная погрешность двух последовательных итераций не становилась менее 0.001. Найденные таким путем  $C_n^m(k)$  принимались в качестве нулевых приближений для  $C_n^m(R + \delta R)$ . Оптимальное  $\delta R$  оказалось равным 0,1. При  $R > 119$  для  $a = 2$  и при  $R > 191$  для  $a = 1.7$  итерационный метод не приводит к сходящемуся решению при любом  $\delta R$ , так как, по-видимому, перестают выполняться условия (1.9). Значения коэффициентов  $C_n^m$  приведены в таблице.

Значения коэффициентов умножены на  $10^3$

$R$	$-C_4^1$	$C_1^2$	$-C_1^3$	$C_2^1$	$-C_2^2$	$C_2^3$	$C_3^1$	$-C_3^2$	$C_3^3$	$-C_4^1$	$C_4^2$	$-C_4^3$
$a = 2$												
11	-0.35	3.57	1.66	65.2	16.3	10.3	12.5	3.19	1.66	1.52	0.11	0.04
21	-1.05	13.5	6.22	122	31.4	19.9	44.3	17.9	5.82	10.1	0.80	0.29
31	-1.28	31.1	13.9	172	46.2	29.6	91.4	35.3	11.8	29.5	2.67	0.98
41	0.434	57.3	24.7	215	59.7	39.2	147	53.8	19.0	59.6	6.11	2.32
51	5.55	92.1	38.1	248	71.0	48.3	202	70.5	27.2	96.3	11.0	4.39
61	14.3	133	52.7	273	79.4	56.5	249	83.6	36.3	134	16.8	7.08
71	25.6	176	67.4	291	85.1	63.9	284	92.8	46.7	169	22.7	10.1
81	37.7	217	81.4	303	88.6	70.6	306	98.4	58.4	199	28.3	13.3
91	49.3	256	94.4	312	90.4	76.9	317	101	71.3	225	33.7	16.4
101	59.9	289	105	319	91.1	82.7	321	101	84.3	245	38.7	19.3
111	69.4	319	117	324	91.7	88.3	320	99.5	99.0	263	43.7	22.2
119	76.4	339	124	327	89.7	92.7	317	96.9	111	276	47.7	24.5
$a = 1.7$												
16	-0.59	2.17	0.91	43.7	9.68	6.49	8.75	3.02	0.72	0.80	0.01	0.02
31	-2.12	8.43	3.49	83.2	19.0	12.7	32.3	10.8	2.60	5.58	0.12	0.13
46	-4.18	19.5	7.87	119	28.3	19.0	68.3	21.8	5.39	16.9	0.51	0.43
61	-5.94	36.4	14.1	151	37.3	25.3	113	33.9	8.79	35.6	1.47	1.07
76	-6.21	59.8	21.9	177	45.4	31.5	162	45.4	12.7	60.0	3.16	2.11
91	-4.03	89.2	30.9	197	52.1	37.3	207	54.9	17.1	87.0	5.50	3.55
106	0.727	123	40.2	213	57.1	42.8	245	62.1	22.2	113	8.17	5.26
121	7.32	157	49.2	224	60.5	47.8	242	67.0	28.3	137	10.9	7.06
136	14.8	191	57.4	232	62.7	52.4	279	69.9	35.3	157	13.5	8.77
151	22.2	221	65.0	239	64.0	56.8	287	71.6	43.1	174	15.9	10.3
166	29.3	248	71.6	244	64.6	61.0	299	72.0	51.0	189	18.2	11.6
181	35.9	273	77.4	248	64.5	65.1	296	71.4	60.4	200	20.5	12.7
191	40.1	287	80.9	250	64.1	67.9	294	70.6	66.4	207	22.1	13.3

Из таблицы видно, что амплитудные функции выражения (1.6) с  $i = 2, 3$  входят почти с одинаковым весом. Взять функции с  $i = 4$  не представляется возможным, так как возрастает число матричных элементов ( $\sim i^3$ ) и уравнений, что, несомненно, окажет влияние на сходимость решения. Поэтому выбор  $i = 1, 2, 3$  следует считать оптимальным.

2. Получим уравнения для линий тока в плоскости меридиана. «Меридиональная» часть (1.6) равна

$$U^v = \sum_{i,l=1} C_{2l}^i \left[ f_{2l}^i r_0 P_{2l} + \frac{1}{2l(2l+1)} \frac{(f_{2l}^i r^2)'}{r} r \nabla P_{2l} \right] \quad (2.1)$$

Функция тока  $A(r, \theta)$  определяется уравнением

$$U^v = \text{rot } A \quad (2.2)$$

Поскольку  $U^v$  — полярный вектор, то  $A$  должен быть вектором аксиальным

$$A = \sum_{i,l=1} a_{2l}^i(r, \theta) \mathbf{r} \times \nabla P_{2l} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получим уравнения для коэффициентов

$$a_{2l}^i = - \frac{f_{2l}^i r}{2l(2l+1)} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2) с учетом (2.3) и (2.4) в уравнения

$$\frac{dx}{(U^v)_x} = \frac{dy}{(U^v)_y} = \frac{dz}{(U^v)_z}$$

найдем уравнение для линий тока меридионального течения

$$\sum_{i,l=1} C_{2l}^i f_{2l}^i r^2 \frac{1}{2l(2l+1)} \frac{dP_{2l}}{d\theta} \sin \theta = \text{const}$$

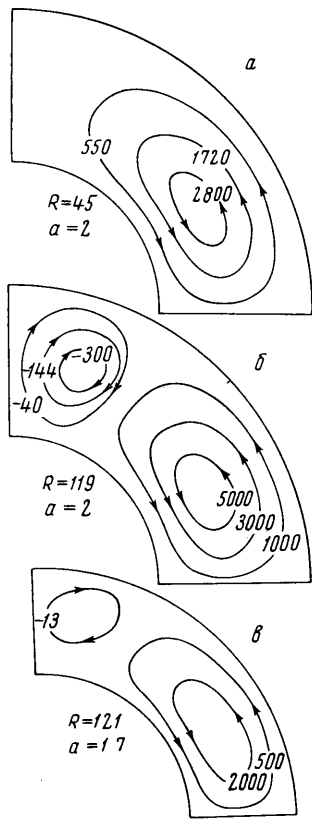
На фиг. 1 а изображены линии тока для  $a = 2$  при  $R = 45$ . По сравнению с линиями тока, приведенными в [5] для малых  $R$ , они более смещены к экватору, т. е. у полюсов образуются застойные области, угловые размеры которых увеличиваются с ростом  $R$ . При некотором  $R_0$  ( $R_0 = 59$  для  $a = 2$  и  $R_0 = 93$  для  $a = 1.7$ ) в этих полярных областях зарождается второй вихрь, направленный в противоположную сторону. Постепенно он начинает развиваться, причем гораздо интенсивнее первого, и занимать все большую область, продолжая оттеснять первый вихрь к экватору.

Это легко проследить на фиг. 1 б, на которой изображены линии тока для  $R = 119$  и  $a = 2$ . Образование второго вихря в случае  $a = 1.7$  происходит при более высоких числах Рейнольдса.

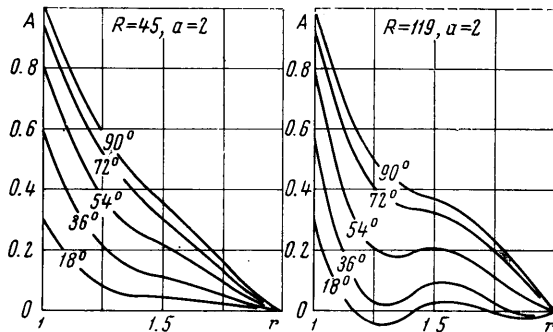
Для сравнения на фиг. 1 в изображены линии тока для  $a = 1.7$  при  $R = 121$ .

Следует заметить, что в наше определение  $R$  не входит толщина слоя, которая тоже является характерным размером задачи. Если определить число Рейнольдса через средний радиус и толщину слоя

$$R' = \frac{\Omega(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{2\nu} = R \frac{a^2 - 1}{2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

то образование второго вихря как для  $a = 2$ , так и для  $a = 1.7$  происходит при  $R'_0 = 88$ .

Из вида разложения (1.3) можно ожидать, что при больших  $R$  существенную роль начнут играть члены, стоящие при  $R^5$ , что может привести к образованию у полюса третьего вихря. Дальнейшее увеличение  $R$  приведет к образованию четвертого вихря и т. д. Предельное число вихрей при больших  $R$  будет, вероятно, определяться каким-нибудь характерным параметром задачи, например, толщиной слоя.

В случае движения жидкости между вращающимися цилиндрами стационарное течение формально существует при любых  $R$ . Однако известно, что при некотором критическом  $R^*$  это течение становится неустойчивым — образуются вторичные вихри. В шаровом слое аналогичные вихри образуются бескризисным образом как развитие первого стационарного течения, и наше  $R_0$  не является каким-либо критическим числом.

Решение (1.6) уравнений движения в приближении (1.7) позволяет получить лишь два вихря, и поэтому оно неприменимо при слишком больших  $R$ . Но до тех

пор, пока относительная интенсивность второго вихря мала, (1.7) можно считать хорошим приближением к истинному стационарному течению. Как видно из приведенных на фиг. 1 б, в значений функций тока, в исследованном интервале  $R$  имеет место именно такая ситуация.

В силу уравнений движения одновременно с образованием второго вихря должно возникать азимутальное течение в направлении, противоположном вращению внутренней сферы. Такое движение действительно осуществляется в области второго вихря. На фиг. 2 изображена амплитуда азимутального движения при фиксированных значениях полярного угла от  $\phi = 0$  до  $\phi = 1/2\pi$  через  $1/10\pi$  для  $a = 2$  при  $R = 45$  и  $R = 119$ . Как видно из фиг. 2, в области второго вихря для азимутального течения существуют два интервала  $\delta r$ , в которых жидкость движется в сторону, противоположную вращению внутренней сферы.

Один из этих интервалов примыкает непосредственно к внешней сфере. На фиг. 2 также видно, как начинает образовываться пограничный слой на обеих сферах, причем толщина слоя увеличивается к экватору. При  $a = 1.7$  образование пограничного слоя происходит при больших числах Рейнольдса.

3. Вычислим момент сил трения, действующий на внешний шар. Сила трения, действующая на единицу поверхности, определяется  $\sigma_{r\phi}$  и  $\sigma_{\phi r}$  компонентами тензора вязких напряжений. Из соображений симметрии ясно, что вклад в суммарный момент будет давать только

$$\sigma_{r\phi} = \left( \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} \right)_{r=1}$$

Из выражения (1.6)

$$U_\phi = \Phi_1(r) |r \nabla P_1| + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} C_{2l+1}^i h_{2l+1}^i |r \nabla P_{2l+1}|$$

Легко убедиться простым вычислением, что вклад в момент сил вносят только члены с  $l = 0$ , что дает для величины момента

$$M = 2\pi a^2 R \int_0^\pi \sigma_{r\phi} \sin^2 \phi d\phi = -\frac{8\pi a^3}{a^3 - 1} R - \frac{8\pi a^3}{3} R \sum_i C_1^i(R, a) h_1^i(a) \quad (3.1)$$

На фиг. 3 приведен график  $M(R)$  для случая  $a = 1.7$ . Вид этой кривой полностью аналогичен экспериментальному графику работы [10] для  $a = 1.68$ . При  $R < 30$  момент пропорционален числу Рейнольдса и описывается первым членом выражения (3.1). Поэтому для  $a = 1.7$  при таких  $R$  в выражении (1.3) можно ограничиться членами порядка  $R$ . При  $a = 2$  это справедливо до  $R < 15$ . При  $R > 150$  для  $a = 1.7$  кривая  $M(R)$  выходит на асимптоту  $M = aR^{3/2}$ , характерную для пограничного слоя. Коэффициент получается  $\alpha = 3.6$ , что несколько превышает экспериментальное значение, приведенное в [10] ( $\alpha = 3.35$  для  $a = 1.68$ ).

Поступило 10 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критического числа Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. высш. учебн. завед. Математика, 1963, № 4.
3. Сорокин В. С. Замечания о шаровых электромагнитных волнах. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 2.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Roots G. Heat transfer by laminar convection in enclosed plane gas layer Quart. J. Mech. Appl. Math., 1958, vol. 1.
7. Veronis G. Large amplitude Benard convection. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26.
8. Якушин В. И. О спектре малых возмущений движения жидкости между вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1967, том. 31, вып. 3.
9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Изд. 3-е, т. 1, Изд-во «Наука», 1966.
10. Сорокин М. П., Хлебутин Г. Н., Шайдуров Г. Ф. Об устойчивости движения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями ПМТФ, 1966, № 6.