$$+ i\lambda^{-1}(1-\sqrt{1-\eta^2})Y_2 - {}^1/_8 i\lambda^{-1}(1-\sqrt{1-\eta^2})Y_1' - {}^1/_4 i\lambda^{-1}(1-\sqrt{1-\eta^2})Y_2' - {}^1/_{16} i\eta^2 g\}$$

$$Y_k = \frac{1}{l}\int_0^l y_k dz, \quad Y_k' = \frac{1}{l} y_k'(l), \quad g = \frac{1}{l}\int_0^l y_1 \bar{y}_1 dz \quad (k = 1, 2)$$

Учитывая формулы (2.6) и (3.7), легко получить, что

$$Y_1 = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{k_1 l}\operatorname{th} k_1 l, \qquad Y_1' = \frac{\beta_1 k_1}{l}\operatorname{th} k_1 l$$

$$Y_2 = \alpha_2 + \frac{\beta_2+\gamma_2}{k_1 l}\operatorname{th} k_1 l + \frac{H_2}{k_2 l}\operatorname{th} k_2 l \tag{4.11}$$

$$Y_2' = \frac{k_1(\beta_2+4\gamma_2)}{l}\operatorname{th} k_1 l + \frac{H_2 k_2}{l}\operatorname{th} k_2 l$$

$$g = \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \operatorname{th} k_1 l\left[\frac{\bar{\alpha}_1\beta_1}{k_1 l} + \frac{\beta_1\bar{\beta}_1}{2(k_1+\bar{k}_1)l} + \frac{\beta_1\bar{\beta}_1}{2(k_1-\bar{k}_1)l}\right] +$$

$$+ \operatorname{th}\bar{k}_1 l\left[\frac{\alpha_1\bar{\beta}_1}{\bar{k}_1 l} + \frac{\beta_1\bar{\beta}_1}{2(k_1+\bar{k}_1)l} - \frac{\beta_1\bar{\beta}_1}{2(k_1-\bar{k}_1)l}\right]$$

Выделение действительной и мнимой частей в формуле (4.10) не представляет особых трудностей при ее практическом использовании. Проведенное автором сравнение расчета подшипника при $l = 2$ с результатами численного решения Раймонди [3] дает хорошее совпадение результатов для всех η. В предельном случае ($\lambda = \infty$) формула (4.10) дает незначительное завышение несущей способности подшипника по сравнению с ее точным значением. Это вызвано тем, что величина $\sqrt{1+{}^3/_2\eta^2}$, входящая в точное решение при $\lambda = \infty$, представлена фактически первыми двумя членами своего ряда $1 + {}^3/_4\eta^2$ в формуле (4.10). Например, для $\lambda = \infty$ при $\eta = 0.8$ нагрузка, рассчитанная по формуле (4.10), отличается от точного значения на 6%, а при $\eta = 0.5$ немногим более чем на 1%.

Поступило 27 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Снопов А. И. Плоская задача гидродинамической теории газовой смазки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
2. Ausman J. S. An Improved Analytical Solution for Self — Acting, Gas — Lubricated Journal Bearings of Finite Length (60. Lub. 9). Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engen., 1961, vol. 83, No. 2. (Рус. пер. «Техн. механика», 1961, т. 83, № 2.)
3. Подшипники с газовой смазкой. Изд-во «Мир», 1966.

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ ПОДШИПНИКЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А. К. НИКИТИН, С. С. САВЧЕНКОВА

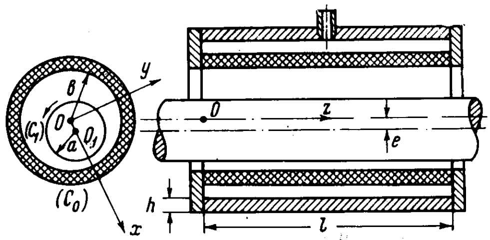
(Ростов-на-Дону)

Рассматривается линейная задача об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в пористом несоосном подшипнике конечной длины l. Предполагается, что жидкость заполняет все пространство между шипом радиуса a и пористым подшипником внутреннего радиуса b. Пористый вкладыш имеет постоянную толщину h и равномерную проницаемость. Через поры вкладыша под постоянным давлением p_a подается смазка. Вал вращается вокруг своей неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, подшипник неподвижен.

Определяются с точностью до членов второго порядка относительно ε поле скоростей и поле давлений между шипом и подшипником и поле давлений внутри пористого металла, где $\varepsilon = e / a$, e — эксцентриситет.

С точностью до членов ε^2 включительно находятся несущая способность подшипника и момент сил трения, действующих на вал со стороны смазки.

1. Рассмотрим линейную задачу об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство между несоосными шипом C_1 радиуса a и пористым подшипником C_0 радиуса b, через поры которого под давлением p_a подается смазка. Шип (вал) вращается вокруг своей неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω. Подшипник длины l неподвижен, имеет равномерную проницаемость и толщину h стенки.



Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), выбрав начало координат 0 на оси подшипника у его левого конца (см. фигуру). Тогда для контура C_0 получаем уравнение

$$r = b \tag{1.1}$$

Для точек контура C_1 имеем [1]

$$r = a(1 + \varepsilon\cos\theta - {}^1/{}_2\varepsilon^2\sin^2\theta - \ldots) = a(1 + H) \qquad (\varepsilon = e / a) \tag{1.2}$$

Здесь e — эксцентриситет.

В цилиндрической системе координат уравнения движения и уравнение неразрывности запишутся [2]

$$\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2} = \frac{1}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial\theta}, \qquad \Delta v_z = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.3}$$

Граничные условия будут следующие:

$$v_r = -\frac{\sigma}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{r=b}, \qquad v_z = 0, \quad v_\theta = 0 \qquad \text{при } r = b$$

$$v_r = -\omega a\varepsilon\sin\theta, \qquad v_z = 0 \qquad \text{при } r = a(1 + H) \tag{1.4}$$

$$v_\theta = \omega a - {}^1/{}_2\omega a\varepsilon^2\sin^2\theta - \ldots \quad p = p_\infty \qquad \text{при } z = 0,\ z = l$$

где σ — коэффициент проницаемости, P — давление в порах подшипника, p_∞ — постоянное давление в среде, окружающей подшипник. При решении задачи необходимо использовать условия симметрии относительно середины подшипника

$$v_r(z) = v_r(l - z), \quad v_\theta(z) = v_\theta(l - z), \quad v_z(z) = -v_z(l - z)$$
$$p(z) = p(l - z), \quad P(z) = P(l - z) \tag{1.5}$$

Для давления P в порах подшипника имеем уравнение

$$\Delta P = 0 \tag{1.6}$$

и граничные условия (1.7)

$$P = p_\infty \quad \text{при } z = 0,\ z = l; \qquad P = p_a \quad \text{при } r = b + h, \qquad P = p \quad \text{при } r = b$$

Исходя из вида граничных условий (1.4), будем искать решение задачи в виде рядов по степеням ε

$$v_r = v_{r0}(r, z) + \varepsilon v_{r1} + \varepsilon^2 v_{r2} + \ldots, \qquad v_\theta = v_{\theta 0}(r, z) + \varepsilon v_{\theta 1} + \varepsilon^2 v_{\theta 2} + \ldots$$

$$v_z = v_{z0}(r, z) + \varepsilon v_{z1} + \varepsilon^2 v_{z2} + \ldots, \qquad p = p_0(r, z) + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \tag{1.8}$$

$$P = P_0(r, z) + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots$$

Подставляя (1.8) в уравнения (1.3) и (1.6) и приравнивая в них члены слева и справа при одинаковых степенях ε, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 v_{r0}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_{r0}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{r0}}{\partial r} - \frac{v_{r0}}{r^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p_0}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 v_{\theta 0}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_{\theta 0}}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}-\frac{v_{\theta 0}}{r^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{z0}}{\partial r}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p_0}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_{r0}}{\partial r}+\frac{\partial v_{z0}}{\partial z}+\frac{v_{r0}}{r}=0,\qquad \frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_0}{\partial r}=0 \tag{1.9}$$

$$\Delta v_{rk}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{\theta k}}{\partial \theta}-\frac{v_{rk}}{r^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p_k}{\partial r},\qquad \Delta v_{\theta k}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{rk}}{\partial \theta}-\frac{v_{\theta k}}{r^2}=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial p_k}{\partial \theta}$$

$$\Delta v_{zk}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p_k}{\partial z},\qquad \frac{\partial v_{rk}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{\theta k}}{\partial \theta}+\frac{\partial v_{zk}}{\partial z}+\frac{v_{rk}}{r}=0$$

$$\Delta P_k=0\qquad (k=1,2,\ldots) \tag{1.10}$$

Запись граничных условий на подшипнике очевидна. Что касается граничных условий на шипе, то, разлагая

$$v_r(C_1)=v_r(a+aH),\qquad v_\theta(C_1)=v_\theta(a+aH),\qquad v_z(C_1)=v_z(a+aH)$$

в ряды, подставляя их значения в (1.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем следующие условия:

$$v_{r0}=0,\quad v_{\theta 0}=\omega a,\quad v_{z0}=0\quad \text{при } r=a$$

$$v_{r0}=-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial P_0}{\partial r},\qquad v_{\theta 0}=0,\quad v_{z0}=0\quad \text{при } r=b$$

$$P_0=p_\infty\quad \text{при } z=0,\ z=l,\qquad P_0=p_\infty\quad \text{при } z=0,\ z=l \tag{1.11}$$

$$P_0=p_a\quad \text{при}\quad r=b+h,\qquad P_0=p_0\quad \text{при}\quad r=b$$

$$v_{r1}=-\omega a\sin\theta,\quad v_{\theta 1}=-a\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}\cos\theta,\quad v_{z1}=-a\frac{\partial v_{z0}}{\partial r}\cos\theta\quad \text{при } r=a$$

$$v_{r1}=-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial P_1}{\partial r},\qquad v_{\theta 1}=0,\quad v_{z1}=0,\quad \text{при } r=b$$

$$p_1=0\quad \text{при } z=0,\ z=l,\qquad P_1=0\quad \text{при } z=0,\ z=l$$

$$P_1=0\quad \text{при } r=b+h,\qquad P_1=p_1\quad \text{при } r=b$$

$$v_{r2}=-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 v_{r0}}{\partial r^2}\cos^2\theta-a\frac{\partial v_{r1}}{\partial r}\cos\theta\qquad \text{при } r=a \tag{1.12}$$

$$v_{\theta 2}=-\frac{\omega a}{2}\sin^2\theta+\frac{a}{2}\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}\sin^2\theta-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 v_{\theta 0}}{\partial r^2}\cos^2\theta-a\frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial r}\cos\theta\quad \text{при } r=a$$

$$v_{z2}=\frac{a}{2}\frac{\partial v_{z0}}{\partial r}\sin^2\theta-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial r^2}\cos^2\theta-a\frac{\partial v_{z1}}{\partial r}\cos\theta\qquad \text{при } r=a$$

$$v_{r2}=-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial P_2}{\partial r},\qquad v_{\theta 2}=0,\quad v_{z2}=0\quad \text{при } r=b$$

$$p_2=0\quad \text{при } z=0,\ z=l,\qquad P_2=0\quad \text{при } z=0,\ z=l \tag{1.13}$$

$$P_2=0\qquad \text{при } r=b+h,\quad P_2=p_2\quad \text{при } r=b$$

В дальнейшем, при определении поля скоростей и поля давлений, а также сил воздействия со стороны жидкости на подшипник и шип учитываются члены второго порядка относительно ε.

Таким образом, необходимо решать задачу (1.9)—(1.10) при граничных условиях (1.11)—(1.13).

2. Скорости v_{r0}, $v_{\theta 0}$, v_{z0} и давления p_0, P_0 определяются из уравнений (1.9) и граничных условий (1.11).

Исключая из уравнения (1.9) скорости v_{r0}, $v_{\theta 0}$, v_{z0}, получаем уравнение

$$\Delta p_0 = \frac{\partial^2 p_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_0}{\partial r} = 0 \tag{2.1}$$

Решение этого уравнения находим в виде $p_0(r, z) = R(r)Z(z)$. Используя условия (1.11) и условие симметрии (1.5) для давления p_0, получаем

$$p_0(r, z) = p_\infty + 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)] \sin \lambda_n z \quad \left(\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l}\right) \tag{2.2}$$

Здесь A_n, B_n — произвольные постоянные; l — длина подшипника; $I_0(\lambda_n r)$, $K_0(\lambda_n r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Решение последнего уравнения системы (1.9) находим в таком же виде, как и решение уравнения (2.1). При этом используются условия (1.11) и (1.5) для давления P_0. Тогда получаем

$$P_0(r, z) = p_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ 2\mu [A_n I_0(\lambda_n b) + B_n K_0(\lambda_n b)]\, \Phi(\lambda_n r)/\Phi(\lambda_n b) +$$

$$+ \frac{4(p_a - p_\infty)}{l\lambda_n \Phi(\lambda_n b)} [K_0(\lambda_n r) I_0(\lambda_n b) - K_0(\lambda_n b) I_0(\lambda_n r)] \Big\} \sin \lambda_n z$$

$$\Phi(\lambda_n r) = I_0(\lambda_n r) K_0(\lambda_n b + \lambda_n h) - K_0(\lambda_n r) I_0(\lambda_n b + \lambda_n h) \tag{2.3}$$

Исходя из условий симметрии (1.5) и выражения (2.2), решение для скоростей находим в виде следующих рядов:

$$v_{r0}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{r0n}(r) \sin \lambda_n z, \qquad v_{z0} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{z0n}(r) \cos \lambda_n z \tag{2.4}$$

$$v_{\theta 0}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{\theta 0n}(r) \sin \lambda_n z$$

Подставляя (2.4) в уравнения (1.9) и решая их, получаем

$$v_{z0n} = A_n r I_1(\lambda_n r) - B_n r K_1(\lambda_n r) + C_n I_0(\lambda_n r) + D_n K_0(\lambda_n r) \tag{2.5}$$

$$v_{r0n} = A_n r I_2(\lambda_n r) + B_n r K_2(\lambda_n r) + C_n I_1(\lambda_n r) - D_n K_1(\lambda_n r) \tag{2.6}$$

Используя граничные условия (1.11), находим:

$$A_n = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad B_n = \frac{\delta_2}{\delta}, \quad C_n = \frac{\delta_3}{\delta}, \quad D_n = \frac{\delta_4}{\delta}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 I_1(\lambda_n a) & -aK_1(\lambda_n a) & I_0(\lambda_n a) & K_0(\lambda_n a) \\ bI_1(\lambda_n b) & -bK_1(\lambda_n b) & I_0(\lambda_n b) & K_0(\lambda_n b) \\ aI_2(\lambda_n a) & aK_2(\lambda_n a) & I_1(\lambda_n a) & -K_1(\lambda_n a) \\ bI_2(\lambda_n b) + M & bK_2(\lambda_n b) + N & I_1(\lambda_n b) & -K_1(\lambda_n b) \end{vmatrix}$$

$$M = 2\sigma I_0(\lambda_n b) \frac{\Phi_1(\lambda_n b)}{\Phi(\lambda_n b)}, \quad N = 2\sigma K_0(\lambda_n b) \frac{\Phi_1(\lambda_n b)}{\Phi(\lambda_n b)}, \quad \Phi_1(\lambda_n r) = \frac{d\Phi}{dr}$$

Определители δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 получаются из определителя δ заменой соответствующего столбца столбцом, элементы которого

$$0, 0, 0, \frac{4\sigma(p_a - p_\infty)}{\mu l \lambda_n b \Phi(\lambda_n b)}$$

Решая второе уравнение системы (1.9), имеем

$$v_{\theta 0} = \frac{4\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[I_1(\lambda_n b)K_1(\lambda_n r) - K_1(\lambda_n b)I_1(\lambda_n r)]}{[I_1(\lambda_n b)K_1(\lambda_n a) - K_1(\lambda_n b)I_1(\lambda_n a)]} \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n}$$

3. Скорости v_{r1}, $v_{\theta 1}$, v_{z1} и давления p_1, P_1 определяются из уравнений (1.10) при $k = 1$ и граничных условий (1.12). Граничные условия (1.12) дают возможность искать решение в таком виде:

$$v_{r1} = f_1(r, z) \sin \theta + f_2(r, z) \cos \theta, \qquad v_{\theta 1} = g_1(r, z) \sin \theta + g_2(r, z) \cos \theta$$
$$v_{z1} = h_1(r, z) \sin \theta + h_2(r, z) \cos \theta, \qquad p_1 = m_1(r, z) \sin \theta + m_2(r, z) \cos \theta$$
$$P_1 = n_2(r, z) \cos \theta + n_1(r, z) \sin \theta \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в формулы (1.10) при $k = 1$, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} f_1 + \frac{2}{r^2} g_2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial m_1}{\partial r}$$
$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_2}{\partial r} - \frac{2}{r^2} g_2 + \frac{2}{r^2} f_1 = \frac{1}{\mu r} m_1 \tag{3.2}$$
$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} h_1 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial m_1}{\partial z}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{g_2}{r} + \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{f_1}{r} = 0, \qquad \frac{\partial^2 n_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 n_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial n_1}{\partial r} - \frac{n_1}{r^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{2}{r^2} f_2 - \frac{2}{r^2} g_1 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial m_2}{\partial r}$$
$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} g_1 - \frac{2}{r^2} f_2 = -\frac{1}{\mu r} m_2$$
$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} h_2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial m_2}{\partial z} \tag{3.3}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{g_1}{r} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{f_2}{r} = 0, \qquad \frac{\partial^2 n_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 n_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial n_2}{\partial r} - \frac{n_2}{r^2} = 0$$

Граничные условия для этих функций примут следующий вид:

$$f_1 = -\omega a, \quad g_2 = -a\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}, \quad h_1 = 0 \quad \text{при } r = a$$
$$f_1 = -\frac{\partial}{\mu}\frac{\partial n_1}{\partial r}, \quad g_2 = 0, \quad h_1 = 0 \quad \text{при } r = b$$
$$m_1 = 0 \quad \text{при } z = 0, z = l; \qquad n_1 = 0 \quad \text{при } z = 0, z = l$$
$$n_1 = 0 \quad \text{при } r = b + h; \qquad m_1 = n_1 \quad \text{при } r = b$$
$$f_2 = 0, \quad g_1 = 0, \quad h_2 = -a\frac{\partial v_{z0}}{\partial r} \quad \text{при } r = a$$
$$f_2 = -\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial n_2}{\partial r}, \quad g_1 = 0, \quad h_2 = 0 \quad \text{при } r = b$$
$$m_2 = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad z = l; \qquad n_2 = 0 \text{ при } z = 0, \quad z = l \tag{3.4}$$
$$n_2 = 0 \text{ при } r = b + h, \qquad n_2 = m_2 \text{ при } r = b \tag{3.5}$$

Исключая из уравнений системы (3.2) функции f_1, g_2, h_1, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 m_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial m_1}{\partial r} - \frac{m_1}{r^2} = 0 \tag{3.6}$$

Функцию $m_1(r, z)$ находим в виде $m_1 = R_1(r)Z_1(z)$. Используя условие (3.4) и условие симметрии (1.5) для m_1, получаем

$$m_1 = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} m_{1n}(r)\sin\lambda_n z = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} [a_n I_1(\lambda_n r) + b_n K_1(\lambda_n r)]\sin\lambda_n z \tag{3.7}$$

где $I_1(\lambda_n r)$, $K_1(\lambda_n r)$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка; a_n, b_n — произвольные постоянные. Решая последнее уравнение системы (3.2) и используя условия (3.4) и условие симметрии (1.5) для n_1, найдем

$$n_1(r, z) = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} [a_n I_1(\lambda_n b) + b_n K_1(\lambda_n b)]\frac{\Psi(\lambda_n r)}{\Psi(\lambda_n b)}\sin\lambda_n z$$

$$\Psi(\lambda_n r) = I_1(\lambda_n r)K_1(\lambda_n b + \lambda_n h) - K_1(\lambda_n r)I_1(\lambda_n b + \lambda_n h) \tag{3.8}$$

Исходя из вида функции $m_1(r, z)$ и условий симметрии (1.5), находим функции f_1, g_2, h_1 в виде следующих рядов: (3.9)

$$f_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}(r)\sin\lambda_n z, \quad g_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n}(r)\sin\lambda_n z, \quad h_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{1n}(r)\cos\lambda_n z$$

Подставляя (3.9) и (3.7) в третье уравнение системы (3.2) и решая полученное неоднородное уравнение методом вариации произвольных постоянных, находим

$$h_{1n} = a_n r I_0(\lambda_n r) - b_n r K_0(\lambda_n r) + c_n I_1(\lambda_n r) + d_n K_1(\lambda_n r) \tag{3.10}$$

Из первого и четвертого уравнений системы (3.2) с использованием формул (3.7), (3.9) и (3.10), получим

$$\begin{aligned} f_{1n} = {} & a_n [(r + 1/\lambda_n^2 r)I_1(\lambda_n r) - I_0(\lambda_n r)/\lambda_n] + b_n [(r + 1/\lambda_n^2 r)K_1\lambda_n r) + \\ & + K_0(\lambda_n r)/\lambda_n] + c_n[I_0(\lambda_n r) - I_1(\lambda_n r)/\lambda_n r] - d_n[K_0(\lambda_n r) + \\ & + K_1(\lambda_n r)/\lambda_n r] + \alpha_n I_1(\lambda_n r)/r + \beta_n K_1(\lambda_n r)/r \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} g_{2n} = {} & -a_n I_1(\lambda_n r)/\lambda_n^2 r - b_n K_1(\lambda_n r)/\lambda_n^2 r + c_n I_1(\lambda_n r)/\lambda_n r + d_n K_1(\lambda_n r)/\lambda_n r + \\ & + \alpha_n [\lambda_n I_0(\lambda_n r) - I_1(\lambda_n r)/r] - \beta_n [\lambda_n K_0(\lambda_n r) + K_1(\lambda_n r/r] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Используя условия (3.4), находим произвольные постоянные

$$a_n = \frac{\gamma_1}{\gamma}, \quad b_n = \frac{\gamma_2}{\gamma}, \quad c_n = \frac{\gamma_3}{\gamma}, \quad d_n = \frac{\gamma_4}{\gamma}, \quad \alpha_n = \frac{\gamma_5}{\gamma}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_6}{\gamma} \tag{3.13}$$

где

$$\gamma = \begin{vmatrix} aI_0(a) & -aK_0(a) & I_1(a) & K_1(a) & 0 & 0 \\ bI(b) & -bK_0(b) & I_1(b) & K_1(b) & 0 & 0 \\ E(a) & F(a) & I_0(a) & -K_0(a) & a^{-1}I_1(a) & a^{-1}K_1(a) \\ L(b) & Q(b) & I_0(b) & -K_0(b) & b^{-1}I_1(b) & b^{-1}K_1(b) \\ -I_1^0(a) & -K_1^0(a) & I_1^0(a) & -K_1^0(a) & U(a) & W(a) \\ -I_1^0(a) & -K_1^0(b) & I_1^0(b) & -K_1^0(b) & U(b) & W(b) \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} & E(a) = aI_1(a) + I_1(a)/\lambda_n^2 a, && I_1^\circ(\alpha) = I_1(\alpha)/\lambda_k^2\alpha \\ & F(a) = aK_1(a) + K_1(a)/\lambda_n^2 a, && K_1^\circ(\alpha) = K_1(\alpha)/\lambda^2\alpha \\ & L(b) = E(b) + 2\sigma I_1(b)\Psi_1(b)/\Psi(b) && (\alpha = a,\ \alpha = b) \\ & Q(b) = F(b) + 2\sigma K_1(b)\Psi_1(b)/\Psi(b), && \Psi_1(r) = d\Psi/dr \\ & U(r) = \lambda_n I_0(r) - I_1(r)/r, && W(r) = -\lambda_n K_0(r) - K_1(r)/r \end{aligned}$$

Здесь всюду у аргументов функций I, K, ..., L, Q при записи для краткости опущен множитель λ_n.

Определители γ_1, γ_2, ..., γ_6 получаются из определителя γ заменой соответствующего столбца элементами 0, 0, $-4\omega a/l\lambda_n$, 0, $-a(\partial v_{\theta 0}/\partial r)_{r=a}$, 0.

Легко заметить, что аналогично функциям f_1, g_2, h_1, m_1, n_1 определяются функции

$$m_2(r,z)=2\mu\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}(r)\sin\lambda_n z=2\mu\sum_{n=1}^{\infty}[a_n' I_1(\lambda_n r)+b_n' K_1(\lambda_n r)]\sin\lambda_n z$$

$$f_2(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(r)\sin\lambda_n z,\qquad g_1(r,z)=-\sum_{n=1}^{\infty} g_{1n}(r)\sin\lambda_n z$$

$$h_2(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty} h_{2n}(r)\cos\lambda_n z \tag{3.15}$$

где f_{2n}, g_{1n}, h_{2n} определяются соответственно формулами (3.11), (3.12) и (3.10), если в них вместо постоянных a_n, b_n, c_n, d_n, α_n, β_n поставить

$$a_n'=\frac{\Delta_1}{\gamma},\quad b_n'=\frac{\Delta_2}{\gamma},\quad c_n'=\frac{\Delta_3}{\gamma},\quad d_n'=\frac{\Delta_4}{\gamma},\quad \alpha_n'=\frac{\Delta_5}{\gamma},\quad \beta_n'=\frac{\Delta_6}{\gamma} \tag{3.16}$$

Определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$ получаются из определителя γ заменой соответствующего столбца столбцом, элементы которого

$$-a(\partial v_{z0n}/\partial r)_{r=a},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$$

4. Для функций v_{r2}, $v_{\theta 2}$, v_{z2}, p_2 имеем уравнения (1.10) при $k=2$ и из (1.13) получаем граничные условия

$$v_{r2}=-\frac{a}{2}\frac{\partial f_2}{\partial r}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{r0}}{\partial r^2}-\frac{a}{2}\frac{\partial f_1}{\partial r}\sin 2\theta-\left[\frac{a}{2}\frac{\partial f_2}{\partial r}+\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{r0}}{\partial r^2}\right]\cos 2\theta \quad \text{при } r=a$$

$$v_{r2}=-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial P_2}{\partial r}\quad \text{при } r=b$$

$$v_{\theta 2}=-\frac{a}{2}\frac{\partial g_2}{\partial r}+\frac{a}{4}\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{\theta 0}}{\partial r^2}-\frac{\omega a}{4}-\frac{a}{2}\frac{\partial g_1}{\partial r}\sin 2\theta-$$

$$-\left[\frac{a}{2}\frac{\partial g_2}{\partial r}+\frac{a}{4}\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}+\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{\theta 0}}{\partial r^2}-\frac{\omega a}{4}\right]\cos 2\theta \quad \text{при } r=a,\ v_{\theta 2}=0, \quad \text{при } r=b \tag{4.1}$$

$$v_{z2}=\frac{a}{4}\frac{\partial v_{z0}}{\partial r}-\frac{a}{2}\frac{\partial h_2}{\partial r}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial r^2}-\frac{a}{2}\frac{\partial h_1}{\partial r}\sin 2\theta-$$

$$-\left[\frac{a}{4}\frac{\partial v_{z0}}{\partial r}+\frac{a}{2}\frac{\partial h_2}{\partial r}+\frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial r^2}\right]\cos 2\theta \quad \text{при } r=a,\ v_{z2}=0 \quad \text{при } r=b$$

Исходя из вида граничных условий (4.1), решение находим в следующем виде:

$$v_{r2}=X(r,z)+X_1(r,z)\sin 2\theta+X_2(r,z)\cos 2\theta$$
$$v_{\theta 2}=Y(r,z)+Y_1(r,z)\sin 2\theta+Y_2(r,z)\cos 2\theta$$
$$v_{z2}=Z(r,z)+Z_1(r,z)\sin 2\theta+Z_2(r,z)\cos 2\theta$$
$$p_2=S(r,z)+S_1(r,z)\sin 2\theta+S_2(r,z)\cos 2\theta$$
$$P_2=q(r,z)+q_1(r,z)\sin 2\theta+q_2(r,z)\cos 2\theta \tag{4.2}$$

Функции X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 при определении воздействия жидкости на подшипник и шип не понадобятся, поэтому решение для них здесь не приводится.

Для определения функций X, Y, Z получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r}-\frac{X}{r^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dS}{\partial r},\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial r}-\frac{Y}{r^2}=0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial S}{\partial z},\quad \frac{\partial X}{\partial r}+\frac{\partial Z}{\partial z}+\frac{X}{r}=0,\qquad \frac{\partial^2 q}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}=0$$

и граничные условия

$$X = -\frac{a}{2}\frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{r0}}{\partial r^2} \quad \text{при } r = a, \qquad X = -\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial q}{\partial r} \quad \text{при } r = b$$

$$Z = \frac{a}{4}\frac{\partial v_{z0}}{\partial r} - \frac{a}{2}\frac{\partial h_2}{\partial r} - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{z0}}{\partial r^2} \quad \text{при } r = a, \; Z = 0 \quad \text{при } r = b \tag{4.4}$$

$$Y = -\frac{a}{2}\frac{\partial g_2}{\partial r} + \frac{a}{4}\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r} - \frac{a^2}{4}\frac{\partial^2 v_{\theta 0}}{\partial r^2} - \frac{\omega a}{4} \quad \text{при } r = a, \; Y = 0, \quad \text{при } r = b$$

$$S = 0 \quad \text{при } z = 0, \; z = l; \qquad q = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad z = l$$

$$q = 0 \quad \text{при } r = b + h; \qquad q = S \quad \text{при } r = b$$

$$S(z) = S(l-z), \quad X(z) = X(l-z), \quad Y(z) = Y(l-z), \quad Z(z) = -Z(l-z)$$

Эта задача эквивалентна задаче определения функций v_{r0}, $v_{\theta 0}$, v_{z0}, p_0. Используя результаты п. 2, запишем

$$S(r, z) = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n0} I_0(\lambda_n r) + b_{n0} K_0(\lambda_n r)] \sin \lambda_n z$$

$$q(r, z) = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n0} I_0(\lambda_n b) + b_{n0} K_0(\lambda_n b)] \frac{\Phi(\lambda_n r)}{\Phi(\lambda_n b)} \sin \lambda_n z$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n0} r I_1(\lambda_n r) - b_{n0} r K_1(\lambda_n r) + c_{n0} I_0(\lambda_n r) + d_{n0} K_0(\lambda_n r)] \cos \lambda_n z$$

$$X(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n0} r I_2(\lambda_n r) + b_{n0} r K_2(\lambda_n r) + c_{n0} I_1(\lambda_n r) - d_{n0} K_1(\lambda_n r)] \sin \lambda_n z$$

$$Y(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(r) \sin \lambda_n z = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{4}\left(\frac{dv_{\theta 0n}}{dr}\right)_{r=a} - \frac{a^2}{4}\left(\frac{d^2 v_{\theta 0n}}{dr^2}\right)_{r=a} - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega a}{l\lambda_n} - \frac{a}{2}\left(\frac{dg_{2n}}{dr}\right)_{r=a} \right] \frac{[I_1(\lambda_n b) K_1(\lambda_n r) - K_1(\lambda_n b) I_1(\lambda_n r)]}{[I_1(\lambda_n b) K_1(\lambda_n a) - K_1(\lambda_n b) I_1(\lambda_n a)]} \sin \lambda_n z \tag{4.5}$$

Постоянные a_{n0}, b_{n0}, c_{n0}, d_{n0} определяются с помощью условий (4.4).

5. Приведем силы воздействия со стороны подшипника на жидкость к центру подшипника O. Для проекций главного вектора этих сил на оси Ox, Oy, Oz (ось x направлена по прямой, соединяющей центры шипа и подшипника) и для главного момента относительно оси z получим выражения

$$R_x = b \int_0^l \int_0^{2\pi} (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta)_{r=b} \, d\theta \, dz$$

$$R_y = b \int_0^l \int_0^{2\pi} (p_{rr} \sin \theta + p_{r\theta} \cos \theta)_{r=b} \, d\theta \, dz$$

$$R_z = b \int_0^l \int_0^{2\pi} (p_{rz})_{r=b} d\theta \, dz, \qquad M_z = b^2 \int_0^l \int_0^{2\pi} (p_{r\theta})_{r=b} d\theta \, dz \tag{5.1}$$

После подсчетов найдем

$$R_x = -2\pi b \varepsilon \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left[2m_{2n}(b) + f_{2n}(b)/b + \frac{dg_{1n}(b)}{dr} \right]$$

$$R_y = 2\pi b\varepsilon\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left[\frac{dg_{2n}(b)}{dr} - 2m_{1n}(b) - \frac{f_{1n}(b)}{b}\right], \qquad R_z = 0$$

$$M_z = 4\pi\mu b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left[\left(\frac{dv_{\theta 0n}}{dr}\right)_{r=b} + \varepsilon^2\left(\frac{dY_n}{dr}\right)_{r=b}\right] =$$

$$= -4\pi\mu b \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4\omega a}{l\lambda_n} - \varepsilon^2\frac{\omega a^3\lambda_n}{l} + \varepsilon^2\frac{a}{2}[a_n I_1(\lambda_n a) + b_n K_1(\lambda_n a) - \right.$$

$$\left. - \alpha_n\lambda_n^2 I_1(\lambda_n a) - \beta_n\lambda_n^2 K_1(\lambda_n a)]\right\} \Big/ \Lambda_n$$

$$\Lambda_n = \lambda_n[I_1(\lambda_n b)K_1(\lambda_n a) - K_1(\lambda_n b)I_1(\lambda_n a)] \tag{5.2}$$

Здесь $m_{1n}(r)$, $m_{2n}(r)$, $f_{1n}(r)$, $f_{2n}(r)$, $g_{1n}(r)$, $g_{2n}(r)$ определены формулами (3.7), (3.11), (3.12), а постоянные a_n, b_n, α_n, β_n — формулами (3.13).

Применив теоремы количества движения и моментов количества движения к массе жидкости, заключенной между шипом и подшипником, с учетом линейности задачи, получим, что воздействие жидкости на вал определяется формулами (5.2). Приведем эту систему сил к центру шипа O_1. Проекции главного вектора при этом не изменятся, а выражение для главного момента относительно оси O_1z_1 примет вид

$$M_{z_1} = M_z - eR_y \tag{5.3}$$

Таким образом, будет определено воздействие жидкости на шип.

Поступило 23 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А. К. О движении вязкой жидкости между шипом и подшипником. Инженерный сб., 1956, т. 23.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ШАРОВОМ СЛОЕ

В. И. ЯКУШИН

(Пермь)

Решение уравнений движения вязкой жидкости в замкнутых объемах связано с большими трудностями. В ограниченной полости движение оказывается существенно трехмерным (исключение составляет малоинтересный случай твердого вращения жидкости), и поэтому нелинейные члены не исчезают тождественно. Все немногочисленные примеры точных решений уравнений гидродинамики относятся к открытым потокам.

Вследствие этого единственным исследованным до сих пор замкнутым течением остается движение жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (задача Тэйлора). Однако это движение происходит в неограниченной полости: в цилиндрическом слое бесконечной длины. Поэтому, как показал Сорокин [1], случай Тэйлора не является типичным примером замкнутого течения.

Ниже рассматривается приближенное решение уравнений движения жидкости в шаровом слое, когда внешняя сфера радиуса r_2 покоится, а внутренняя — радиуса r_1 вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{n}$ $(\mathbf{n}^2 = 1)$.

Решение ищется методом Галеркина с базисом, состоящим из собственных функций задачи о возмущениях неподвижной жидкости в шаровом слое. Вычисления проводились для двух отношений радиусов $r_2 / r_1 = 2,\ 1.7$.

1. Если в качестве единиц измерения расстояния и скорости выбрать соответственно r_1 и Ωr_1, то уравнения стационарного движения и граничные условия примут вид

$$\mathbf{U}\times\operatorname{rot}\mathbf{U} + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{U} + \Delta P = 0, \qquad \left(R = \frac{\Omega r_1^2}{\nu} \text{ — число Рейнольдса}\right) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \qquad \mathbf{U}|_{S_1} = \mathbf{n}\times\mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{U}|_{S_2} = 0 \qquad (\mathbf{r}_0^2 = 1) \tag{1.2}$$