

давлению в набегающем потоке, а по давлению у стенки канала в плоскости миделя каверны.

Произведенные на базе этих допущений расчеты наибольшей ширины каверны сопоставлены в [4] с результатами решения плоской задачи для клина в канале [5], однако сопоставление произведено не при одинаковых соотношениях толщины клина и канала, а при значениях этого соотношения, в два раза меньших, чем в [5].

Поступило 29 VII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эпштейн Л. А. О минимальном числе кавитации и ширине каверны в плоском и осесимметричном каналах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Гуревич М. И. Симметричное кавитационное обтекание плоской пластинки, помещенной между параллельными стенками. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 4.
3. Терентьев А. Г. Обтекание наклонной пластинки в канале по схеме с параллельными стенками. Изв. вузов, Математика, 1965, № 3.
4. Карликов В. П., Шоломович Г. И. Метод приближенного учета влияния стенок при кавитационном обтекании тел в гидродинамических трубах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
5. Cohen H., Gilbert R. Two-dimensional steady cavity flow about slender bodies in channels of finite breadth. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 2.

#### РАСЧЕТ ГАЗОВОГО САМОГЕНЕРИРУЮЩЕГОСЯ ПОДШИПНИКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

(Ростов-на-Дону)

А. И. СНОПОВ

В связи с тем, что не удается получить точное аналитическое решение уравнения Рейнольдса, описывающего распределение давления в смазочном слое газового подшипника, наряду с численными его решениями разрабатываются и методы приближенного аналитического решения задач теории газовой смазки. В плоском случае для решения задачи в высоких приближениях удобен метод выделения особенности у функции давлений (ph-метод) [1], который успешно был использован и для решения пространственной задачи Осменом Дж. [2]. Однако уточнение решения Осмена на пути ph-метода связано с большими вычислительными трудностями и, насколько известно автору, никем не проводилось.

Ниже предлагается для приближенного решения пространственной задачи  $p^2h^2$ -метод, который позволяет легко найти приближения более высоких порядков. Приводятся результаты вычислений двух приближений. Комплексная форма записи делает расчетные формулы компактными и пригодными для практических расчетов.

1. **Постановка задачи и метод ее решения.** Рассматривается течение вязкого изотермического газа в зазоре между неподвижным подшипником длины  $L$  и шипом радиуса  $R_0$ , вращающимся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$  (фигура). Расстояние между осями  $e$ , средний зазор  $\delta = R_1 - R_0$ . Динамический коэффициент вязкости смазки —  $\mu$ , давление на торцах —  $p_*$ .

Выберем начало координат в середине оси шипа, ось  $x$  направим к середине оси подшипника, ось  $z$  совместим с осью шипа, а ее направление — с направлением вектора угловой скорости  $\omega$ .

Ось  $y$  направим так, чтобы образовалась правая система координат. В этой системе координат уравнение Рейнольдса имеет вид

$$h \frac{\partial^2 q^2}{\partial z^2} + h \frac{\partial^2 q^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial q^2}{\partial \varphi} \eta \sin \varphi + 2q^2 \eta \cos \varphi - 2\lambda \frac{\partial q}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.1)$$

$$\eta = e\delta^{-1}, \quad \lambda = 6\mu\omega R_0^2 / p_* \delta^2$$

Здесь  $h = 1 + \eta \cos \varphi$  — безразмерная толщина слоя;  $q = rh$ ,  $p' = p_* p$  — размерное давление в слое смазки;  $z' = R_0 z$  — размерная координата,  $\lambda$  — параметр подшипника.

Уравнение задачи с учетом симметрии течения относительно плоскости  $xu$  должно решаться при таких граничных условиях:

$$\partial q / \partial z = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad q = h \quad \text{при } z = l = L / 2R_0 \quad (1.2)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$s = q^2 \quad (1.3)$$

Очевидно, что  $s$  должна удовлетворять таким условиям:

$$\partial s / \partial z = 0 \quad \text{при } z = 0$$

$$s = h^2 \quad \text{при } z = l \quad (1.4)$$

Представим  $s$  и  $q$  в виде рядов

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \eta^n, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \eta^n \quad (q_0 = S_0 = 1) \quad (1.5)$$

Нетрудно установить связь между коэффициентами  $s_n$  и  $q_n$ , пользуясь (1.3)

$$q_n = \frac{1}{2} \left( s_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_k q_{n-k} \right) \quad (1.6)$$

На основе (1.4) функции  $s_n$  определяются из уравнения

$$\Lambda(s_n) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{k=1}^{n-1} q_k q_{n-k} - \left( \frac{\partial^2 s_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 s_{n-1}}{\partial \varphi^2} \right) \cos \varphi - \frac{\partial s_{n-1}}{\partial \varphi} \sin \varphi - 2s_{n-1} \cos \varphi \quad (1.7)$$

Оператор

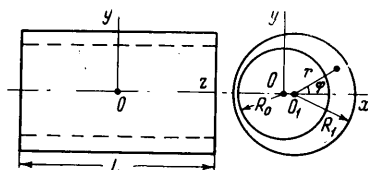
$$\Lambda(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \varphi^2} - \lambda \frac{\partial(\dots)}{\partial \varphi} \quad (1.8)$$

Соответствующие граничные условия получаются на основе (1.4)

$$\frac{\partial s_1}{\partial z} = \frac{\partial s_2}{\partial z} = \dots = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.9)$$

$$s_1 = 2 \cos \varphi, \quad s_2 = 1/2 + 1/2 \cos 2\varphi, \quad s_n = 0 \quad (n \geq 3) \quad \text{при } z = l$$

Очевидно, что все функции  $s_n$  должны быть периодическими по  $\varphi$ .



2. Решение уравнений первого приближения. При  $n = 1$  имеем

$$\Lambda(s_1) = -2\cos\varphi \quad (2.1)$$

С учетом (1.9) функция  $s_1$  представима в виде

$$s_1 = a_1(z) \sin\varphi + b_1(z) \cos\varphi \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), легко находим

$$a_1'' - a_1 + \lambda b_1 = 0, \quad b_1'' - b_1 - \lambda a_1 = -2 \quad (2.3)$$

Или

$$y_1'' - y_1 - \lambda i y_1 = -2i \quad (y_1 = a_1 + i b_1, i = \sqrt{-1}) \quad (2.4)$$

При этом, согласно (1.9), должно быть

$$y_1'(0) = 0, \quad y_1(l) = 2i \quad (2.5)$$

Интегрируя (2.4), находим

$$y_1 = a_1 + \beta_1 \frac{\operatorname{ch} k_1 z}{\operatorname{ch} k_1 l} \quad (2.6)$$

$$k_1 = \sqrt{1 + \lambda^2}, \quad \alpha_1 = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} + \frac{2}{1 + \lambda^2} i, \quad \beta_1 = -\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} + \frac{2\lambda^2}{1 + \lambda^2} i$$

Нетрудно убедиться, что первое приближение совпадает с решением Осмена [2].

3. Решение уравнений второго приближения. Подставляя (2.2) в уравнение (1.7) при  $n = 2$ , получаем

$$\Lambda(s_2) = -\frac{1}{2} b_1'' - [\frac{1}{4} \lambda (a_1^2 - b_1^2) + \frac{1}{2} a_1'' + a_1] \sin 2\varphi - \\ - [\frac{1}{2} \lambda a_1 b_1 + \frac{1}{2} b_1'' + b_1] \cos 2\varphi \quad (3.1)$$

Вид уравнения (3.1) и граничных условий (1.9) позволяет искать  $s_2$  в виде

$$s_2 = a_2(z) \sin 2\varphi + b_2(z) \cos 2\varphi + c_2(z) \quad (3.2)$$

где на основе (3.1) и (1.9)

$$c_2'' = -\frac{1}{2} b_1'', \quad c_2'(0) = 0, \quad c_2(l) = \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$a_2'' - 4a_2 + 2\lambda b_2 = -\frac{1}{4} \lambda (a_1^2 - b_1^2) - \frac{1}{2} a_1'' - a_1 \quad (3.4)$$

$$b_2'' - 4b_2 - 2\lambda a_2 = -\frac{1}{4} \lambda a_1 b_1 - \frac{1}{2} b_1'' - b_1 \quad (3.5)$$

Если обозначить  $y_2 = a_2 + i b_2$ , то на основе (3.4) имеем

$$y_2'' - (4 + 2\lambda i) y_2 = -\frac{1}{4} \lambda y_1^2 - \frac{1}{2} y_1'' - y_1, \quad y_2'(0) = 0, \quad y_2(l) = \frac{1}{2} i \quad (3.6)$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$y_2 = \alpha_2 + \beta_2 \frac{\operatorname{ch} k_1 z}{\operatorname{ch} k_1 l} + \gamma_2 \frac{\operatorname{ch} 2k_1 z}{\operatorname{ch}^2 k_1 l} + H_2 \frac{\operatorname{ch} k_2 z}{\operatorname{ch} k_2 l} \quad (3.7)$$

где

$$k_2 = \sqrt{4 + 2\lambda i}, \quad \alpha_2 = k_2^{-2} [\alpha_1 + \frac{1}{4} \lambda (\alpha_1^2 + \frac{1}{2} \beta_1^2 \operatorname{ch}^{-2} k_1 l)]$$

$$\beta_2 = [\beta_1 / (3 + \lambda i)] (1 + \frac{1}{2} k_1^2 + \frac{1}{2} \lambda \alpha_1), \quad \gamma_2 = \frac{1}{16} i \beta_1^2$$

$$H_2 = \frac{1}{2} i - \alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 \operatorname{ch} 2k_1 l / \operatorname{ch}^2 k_1 l$$

Из (3.3) находим

$$c_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} i (y_1 - \bar{y}_1) \quad (3.8)$$

Нетрудно составить и решить уравнения третьего приближения, однако их решение имеет довольно прозаичный вид, в связи с чем оно здесь не приводится.

4. Воздействие смазки на шип. Так как силы трения пренебрежимо малы по сравнению с давлением, то воздействие смазки на шип определяется формулами

$$P_x = -2R_0^2 p_* \int_0^l dz \int_0^{2\pi} \frac{q \cos \varphi}{1 + \eta \cos \varphi} d\varphi, \quad P_y = -2R_0^2 p_* \int_0^l dz \int_0^{2\pi} \frac{q \sin \varphi}{1 + \eta \cos \varphi} d\varphi \quad (4.1)$$

$$M_0 = 2R_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}L} dz' \int_0^{2\pi} \tau d\varphi \quad \left( \tau = \mu \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \Big|_{R_1} \right) \quad (4.2)$$

Здесь  $v_\varphi$  — трансверсальная составляющая скорости частиц газа.  
На основе полученного решения

$$q = 1 + (A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi) \eta + (A_2 \sin 2\varphi + B_2 \cos 2\varphi + C_2) \eta^2 + \dots \quad (4.3)$$

причем, используя (1.7), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} A_1 + iB_1 &= \frac{1}{2}y_1, & A_2 + iB_2 &= \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{16}iy_1^2 \\ C_2 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{8}i(y_1 - \bar{y}_1) - \frac{1}{16}y_1\bar{y}_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) в (4.1), находим

$$P_x = \frac{4\pi R_0^2 p_* (1 - \sqrt{1 - \eta^2})}{\eta \sqrt{1 - \eta^2}} \int_0^l [1 - B_1 + B_2(1 - \sqrt{1 - \eta^2}) + \eta^2 C_2] dz \quad (4.5)$$

$$P_y = \frac{4\pi R_0^2 p_* (1 - \sqrt{1 - \eta^2})}{\eta} \int_0^l [-A_1 + A_2(1 - \sqrt{1 - \eta^2})] dz$$

Интегрируем уравнение движения смазки

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{\mu R_0} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad \left( \begin{array}{l} v_\varphi = \omega R_0 \text{ при } r = R_0 \\ v_\varphi = 0 \text{ при } r = R_1 + e \cos \varphi \end{array} \right)$$

Получим

$$-\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \Big|_{R_0} = \frac{\omega R_0}{\delta h} \left[ 1 + \frac{3}{\lambda} \left( h \frac{\partial q}{\partial \omega} + q \eta \sin \varphi \right) \right] \quad (4.6)$$

При этом формула (4.2) дает

$$M_0 = -\frac{2\pi R_0^3 L \omega \mu}{\delta \sqrt{1 - \eta^2}} + \frac{e}{2} P_y \quad (4.7)$$

Силу воздействия смазки на шип удобно представить в комплексной форме

$$\begin{aligned} P_y + i \sqrt{1 - \eta^2} P_x &= \frac{4\pi R_0^2 p_* (1 - \sqrt{1 - \eta^2})}{\eta} \times \\ &\times \int_0^l [i(1 + \eta^2 C_2) - (A_1 + iB_1) + (1 - \sqrt{1 - \eta^2})(A_2 + iB_2)] dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если воспользоваться представлением (4.4), то

$$\begin{aligned} P_y + i \sqrt{1 - \eta^2} P_x &= \frac{4\pi R_0^2 p_* (1 - \sqrt{1 - \eta^2})}{\eta} \int_0^l \left[ i \left( 1 + \frac{3}{4} \eta^2 \right) + \right. \\ &+ \left( -\frac{1}{8} y_1 + \frac{1}{8} \bar{y}_1 - \frac{1}{16} i y_1 \bar{y}_1 \right) \eta^2 - \frac{1}{2} y_1 + \\ &+ \left. \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - \eta^2}) \left( y_2 + \frac{1}{8} i y_1^2 \right) \right] dz \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если при этом учесть, что по (3.6)

$$y_2 + \frac{1}{8} i y_1^2 = -\frac{1}{2} \lambda^{-1} i^{-1} (y_2'' - 4y_2 + \frac{1}{2} i y_1'' + y_1)$$

легко получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} P_y + i \sqrt{1 - \eta^2} P_x &= \frac{2\pi R_0 L p_* (1 - \sqrt{1 - \eta^2})}{\eta} \left\{ i(1 + \frac{3}{4} \eta^2) - \right. \\ &- \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \eta^2 + \frac{1}{4} i \lambda^{-1} (1 - \sqrt{1 - \eta^2}) \right] Y_1 + \frac{1}{8} \eta^2 Y_1 + \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$+ i\lambda^{-1}(1 - \sqrt{1 - \eta^2})Y_2 - 1/8i\lambda^{-1}(1 - \sqrt{1 - \eta^2})Y_1' - 1/4i\lambda^{-1}(1 - \sqrt{1 - \eta^2})Y_2' - 1/16i\eta^2g\}$$

$$Y_k = \frac{1}{l} \int_0^l y_k dz, \quad Y_k' = \frac{1}{l} y_k'(l), \quad g = \frac{1}{l} \int_0^l y_1 \bar{y}_1 dz \quad (k = 1, 2)$$

Учитывая формулы (2.6) и (3.7), легко получить, что

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 + \frac{\beta_1}{k_1 l} \operatorname{th} k_1 l, & Y_1' &= \frac{\beta_1 k_1}{l} \operatorname{th} k_1 l \\ Y_2 &= \alpha_2 + \frac{\beta_2 + \gamma_2}{k_1 l} \operatorname{th} k_1 l + \frac{H_2}{k_2 l} \operatorname{th} k_2 l \\ Y_2' &= \frac{k_1(\beta_2 + 4\gamma_2)}{l} \operatorname{th} k_1 l + \frac{H_2 k_2}{l} \operatorname{th} k_2 l \\ g &= \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \operatorname{th} k_1 l \left[ \frac{\bar{\alpha}_1 \beta_1}{k_1 l} + \frac{\beta_1 \bar{\beta}_1}{2(k_1 + \bar{k}_1)l} + \frac{\beta_1 \bar{\beta}_1}{2(k_1 - \bar{k}_1)l} \right] + \\ &+ \operatorname{th} \bar{k}_1 l \left[ \frac{\alpha_1 \bar{\beta}_1}{\bar{k}_1 l} + \frac{\beta_1 \bar{\beta}_1}{2(k_1 + \bar{k}_1)l} - \frac{\beta_1 \bar{\beta}_1}{2(k_1 - \bar{k}_1)l} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выделение действительной и мнимой частей в формуле (4.10) не представляет особых трудностей при ее практическом использовании. Проведенное автором сравнение расчета подшипника при  $l = 2$  с результатами численного решения Раймонди [3] дает хорошее совпадение результатов для всех  $\eta$ . В предельном случае ( $\lambda = \infty$ ) формула (4.10) дает незначительное завышение несущей способности подшипника по сравнению с ее точным значением. Это вызвано тем, что величина  $\sqrt{1 + 3/2\eta^2}$ , входящая в точное решение при  $\lambda = \infty$ , представлена фактически первыми двумя членами своего ряда  $1 + 3/4\eta^2$  в формуле (4.10). Например, для  $\lambda = \infty$  при  $\eta = 0.8$  нагрузка, рассчитанная по формуле (4.10), отличается от точного значения на 6%, а при  $\eta = 0.5$  немногим более чем на 1%.

Поступило 27 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Снопов А. И. Плоская задача гидродинамической теории газовой смазки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
2. A u s m a n J. S. An Improved Analytical Solution for Self-Acting, Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length (60. Lub. 9). Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Eng., 1961, vol. 83, No. 2. (Рус. пер. «Техн. механика», 1961, т. 83, № 2.)
3. Подшипники с газовой смазкой. Изд-во «Мир», 1966.

#### ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ ПОДШИПНИКЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А. К. НИКИТИН, С. С. САВЧЕНКОВА

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается линейная задача об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в пористом несоосном подшипнике конечной длины  $l$ . Предполагается, что жидкость заполняет все пространство между шипом радиуса  $a$  и пористым подшипником внутреннего радиуса  $b$ . Пористый вкладыш имеет постоянную толщину  $h$  и равномерную проницаемость. Через поры вкладыша под постоянным давлением  $p_a$  подается смазка. Вал вращается вокруг своей неподвижной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , подшипник неподвижен.

Определяются с точностью до членов второго порядка относительно  $\epsilon$  поле скоростей и поле давлений между шипом и подшипником и поле давлений внутри пористого металла, где  $\epsilon = e/a$ ,  $e$  — эксцентриситет.

С точностью до членов  $\epsilon^2$  включительно находятся несущая способность подшипника и момент сил трения, действующих на вал со стороны смазки.