

**ЛАМИНАРИЗАЦИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КРЫЛОВОМ ПРОФИЛЕ
ПОСРЕДСТВОМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОТСАСЫВАНИЯ**

А. Д. ТОХУНЦ (Москва)

На базе уравнений Прандтля и общих соображений теории гидродинамической устойчивости проведено теоретическое исследование ламинаризации пограничного слоя на крыловом профиле посредством распределенного отсосывания. Рассмотрено влияние различных аэродинамических и геометрических характеристик профиля на величину минимального коэффициента расхода отсасываемого воздуха. Приведены конкретные примеры расчета

$$(M, R_\infty, \alpha, \bar{c}), \quad C_{D \min}$$

Некоторую достаточно обширную библиографию работ, посвященную рассматриваемой проблеме, можно найти в книге [1]. Методы решений уравнений пограничного слоя в этих работах обычно основываются на приближенных интегральных соотношениях, что в ряде случаев оказывается недостаточно точным для решения тех задач, которые выдвигает проблема искусственной ламинаризации обтекания.

Ниже уравнения пограничного слоя решаются численно на ЭВМ разностным методом [2]. На основе общих соображений теории устойчивости [3] решается задача об оптимальном распределении интенсивности отсосывания по крыловому профилю. Рассматривается влияние различных аэродинамических и геометрических характеристик профиля ($M, R_\infty, \alpha, \bar{c}$) на величину минимального количества отсасываемого воздуха, обеспечивающего ламинаризацию обтекания при заданных условиях.

Обозначения

b — характерный линейный размер, R_∞ — число Рейнольдса невозмущенного потока,
 ν — коэффициент кинематической вязкости, R_{δ^*} — критическое число потери устойчивости, подсчитанное по толщине вытеснения,
 θ — толщина потери импульса,
 δ^* — толщина вытеснения,

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{R_\infty}, \quad R_\infty = \frac{U_\infty b}{\nu}, \quad R_\theta = \frac{U(x)\theta}{\nu}, \quad R_{\delta^*} = \frac{U(x)\delta^*}{\nu}, \quad K = \frac{R_\theta}{R_{\delta^*}},$$

$$\Delta U(x) = U(x) - U_\infty$$

1. Уравнения плоского ламинарного пограничного слоя для установившегося течения несжимаемой жидкости при наличии распределенного отсосывания имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = w_w(x), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(x, z) \rightarrow U(x) \tag{1.2}$$

Здесь u и w — составляющие скорости по осям x и z , соответственно; $U(x)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя; остальные обозначения соответствуют общепринятым.

При помощи преобразования

$$\bar{u} = \frac{u}{U(x)}, \quad \bar{w} = \frac{w}{U(x)}, \quad \xi = \frac{1}{\nu} \int_0^x U(x) dx, \quad \eta = \frac{U(x)z}{\nu \sqrt{2\xi}} \tag{1.3}$$

систему (1.1) можно привести к виду

$$2\xi \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \beta(\xi)(1 - \bar{u}^2) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\bar{w}}{\sqrt{\xi}} \right) = 0 \tag{1.4}$$

с граничными условиями

$$\bar{u}(\xi, 0) = 0, \quad \bar{w}(\xi, 0) = \gamma(\xi), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{u}(\xi, \eta) \rightarrow 1 \tag{1.5}$$

Здесь

$$\bar{w} = \left(\bar{w}^* + \frac{U'}{U} \sqrt{2\xi} \eta \bar{u} \right) \sqrt{2\xi} - \bar{u} \eta, \quad \gamma(\xi) = -\frac{w_w(x)}{U(x)} \sqrt{2\xi}, \quad \beta(\xi) = \frac{2U'}{U} \xi \quad (1.6)$$

В связи с тем, что в передней критической точке уравнения пограничного слоя имеют особенность, разностный метод оказывается непригодным и решение в указанной области находилось методом разложения в ряд. Положим, что функции u , w , β и γ допускают разложение в степенные ряды вида

$$u(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\eta) \xi^k, \quad \beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \xi^k \quad (1.7)$$

$$w(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\eta) \xi^k, \quad \gamma(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \gamma_k \xi^k$$

Подставив в (1.4) вместо u , w , β и γ их значения (1.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций u_k и w_k ($k=0, 1, 2, \dots$). Первые два уравнения этой системы, соответствующие малой окрестности начала пограничного слоя, имеют вид

$$F_0''' + F_0 F_0'' = F_0'^2 - 1, \quad f_1''' + F_0 f_1'' - 4F_0' f_1' + 3F_0'' f_1 = F_0'^2 - 1$$

$$f_2''' + F_0 f_2'' - 4F_0' f_2' + 3F_0'' f_2 = 0 \quad (1.8)$$

с граничными условиями

$$F_0(0) = \gamma_0, \quad F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) = 1$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(\infty) = 0, \quad f_2(0) = 1, \quad f_2'(0) = f_2'(\infty) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь

$$u_0 = F_0', \quad u_1 = \beta_1 f_1' + \gamma_1 f_2' \quad (1.10)$$

Система уравнений (1.8) с граничными условиями (1.9) решалась численно на ЭВМ методом Рунге — Кутты для одиннадцати значений параметра γ_0 , а соответствующие значения функций F_0 , f_1 , f_2 и их первых и вторых производных по η записаны.

Решение указанной системы определяет начальные значения для дальнейшего численного расчета на ЭВМ по методу конечных разностей [2]. В процессе расчета шаг по продольной координате $\bar{\xi} = \xi/R_\infty$ выбирался равным 0.001; по поперечной координате η он менялся от 0.02 у стенки до 0.16 вблизи внешней границы слоя. Для оценки точности метода было проведено его сравнение с известными точными решениями Гертлера и Блазиуса [4] для случая поперечного обтекания круглого цилиндра, а также с точным решением Иглиша для разгонного участка плоской пластины с однородным отсасыванием. Результаты сравнения показали высокую точность численного решения.

2. Одним из центральных вопросов проблемы искусственной ламинаризации пограничного слоя является выбор наиболее выгодного режима отсасывания. При решении этой задачи под оптимальным распределением скорости отсасывания понималось такое распределение, при котором в каждой точке ламинаризуемой поверхности пограничный слой, теоретически, находился в состоянии нейтральной устойчивости по отношению к малым возмущениям, т. е. местное число Рейнольдса R_0 равнялось критическому R_{0*} . Последнее определялось на основе известной приближенной формулы Ливия [3], которую в принятых в работе обозначениях можно записать в виде

$$R_{0*} = \frac{1}{\bar{u}_c^4} \left(25 \bar{u}_w' \int_0^\infty \bar{u} (1 - \bar{u}) d\eta \right) \quad (2.1)$$

Здесь \bar{u}_c — безразмерная скорость распространения волн, определяемая из следующего условия:

$$\pi \bar{u}_w' \left(2 \bar{u}_w' \frac{\eta}{\bar{u}} - 3 \right) \frac{\bar{u} \bar{u}''}{\bar{u}'^3} = 0.58 \quad (2.2)$$

Было найдено, что в общем случае получаются два значения \bar{u} , удовлетворяющие равенству (2.2). Сравнение с известными критическими значениями числа Рейнольдса Re_{*} для асимптотического профиля с отсосом и профиля Блазиуса показало, что реальными являются наименьшие из получающихся значений \bar{u} и η . Расчет Re_{*} по формулам (2.1), (2.2) дал значения, неплохо согласующиеся с теми, которые были получены ранее другими авторами. Так, на фиг. 1 приведен предел устойчивости для некоторых профилей пограничного слоя: 1 — асимптотический профиль по Бусману — Мюнцу; 2 — пластинка с отсосом по закону $w_0 = x^{-1/2}$; 3 — то же по закону $w_0 = \text{const}$; 4 — критическая точка при $w_0 = \text{const}$; 5, 6 — пограничный слой с градиентом давления по Претшу [3] и Шлихтингу и Ульриху [8] соответственно; расчет по формуле (2.1) для цилиндра 7 для крылового профиля без отсоса 8 и с отсосом 9.

Если обозначить отношение местного числа Рейнольдса к критическому через K , то, очевидно, для сохранения гидродинамической устойчивости течения в пограничном слое всюду за точкой потери устойчивости должно выполняться условие $K \leq 1$ (случай $K = 1$ соответствует оптимальному отсасыванию). Анализ устойчивости профилей скорости проводился непосредственно в процессе расчета пограничного слоя вдоль рассматриваемого тела, что дало возможность определять величину K , как функцию продольной координаты ξ , т. е. судить о состоянии пограничного слоя при заданном законе отсасывания.

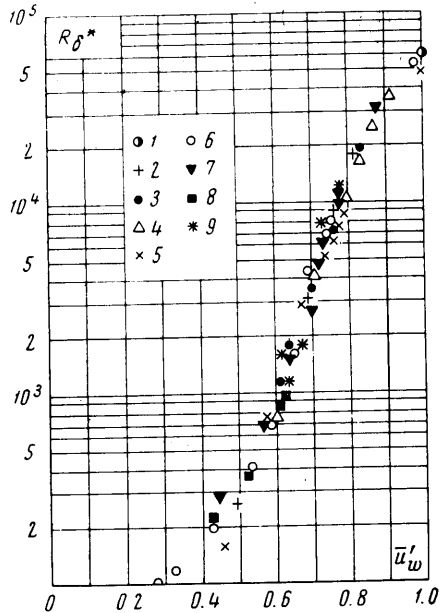
На фиг. 2 в качестве примера приведены оптимальные распределения скоростей отсасывания для верхней (штриховые линии) и нижней (сплошные линии) поверхностей крылового профиля при угле атаки $\alpha = +1^\circ$ и теоретическом распределении давлений (круглые точки) на внешней границе пограничного слоя. Предсказываемое теорией сильное повышение давления в кормовой части профиля приводит к заметному увеличению интенсивности отсасывания из указанной области.

Анализ профилей скорости в пограничном слое показывает, что за точкой потери устойчивости выполненной по мере приближения к кормовой части крылового профиля. При этом оказывается, что если известны наклон u_{ws}' и кривизна u_{ws}'' профиля скоростей на стенке в точке потери устойчивости, то их значения для всех последующих точек можно достаточно точно определить посредством обычной линейной экстраполяции вида

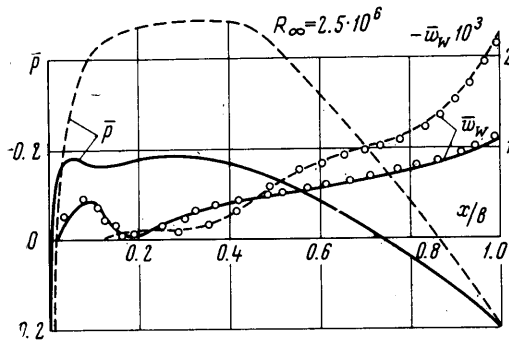
$$\begin{aligned} \bar{u}_w' &= \bar{u}_{ws}' + \alpha_1 \Delta \bar{\xi}, \\ \bar{u}_w'' &= \bar{u}_{ws}'' + \alpha_2 \Delta \bar{\xi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь α_1, α_2 — некоторые константы, равные приблизительно 0.2 и 0.33, соответственно; $\Delta \bar{\xi}$ — расстояние текущей координаты от точки потери устойчивости.

Приведенные соображения позволяют указать очень простой вычислительный прием для приближенного определения оптимального закона отсасывания при заданном потенциальном течении около профиля и известных параметрах профиля скоростей в точке потери устойчивости.



Фиг. 1

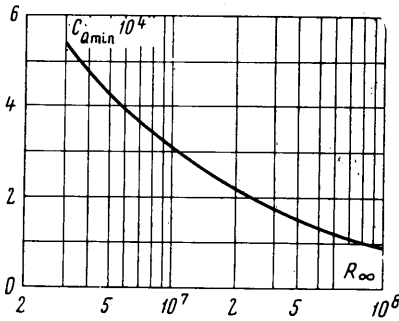


Фиг. 2

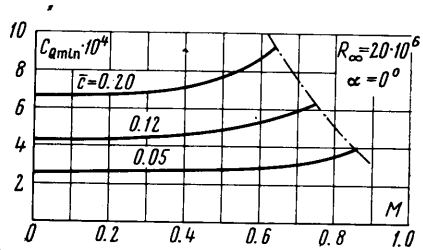
Учитывая, что на стенке $u = 0$, $\bar{w} = -\bar{w}_w$, а также равенства (2,3) из первого уравнения системы (1.4), получим

$$\left[\frac{\bar{w}_w}{U(x)} \right]_{\text{opt}} = - \frac{2(U'/U)\bar{\xi} + \alpha_2 \Delta \bar{\xi} + \bar{U}_{ws}''}{\sqrt{2R_\infty} \bar{\xi} (U_{ws}' + \alpha_1 \Delta \bar{\xi})} \quad (2.4)$$

Расчет по формуле (2.4) дал значения, неплохо согласующиеся с точным решением (фиг. 2). Равенство (2.4) еще раз подтверждает, что основным фактором, определяющим интенсивность отсасывания, является градиент давления на внешней границе пограничного слоя. Формулу (2.4) очень удобно использовать в качестве начального приближения при подборе оптимального распределения интенсивности отсасывания.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Зная оптимальную скорость отсасывания, нетрудно подсчитать то минимальное количество воздуха, которое необходимо удалить из пограничного слоя для его стабилизации по отношению к малым возмущениям. Вводя в рассмотрение известный коэффициент расхода отсасываемого воздуха C_Q , получим

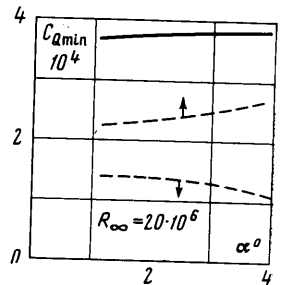
$$C_{Q \min} = \int_a^b \bar{w}_{w \text{opt}} \bar{d}\bar{\xi} \quad (3.1)$$

Серия расчетов, выполненных на ЭВМ, позволила выявить влияние различных аэродинамических и геометрических характеристик профиля на величину $C_{Q \min}$. На фиг. 3 приведена зависимость $C_{Q \min}$ от числа Рейнольдса невозмущенного потока R_∞ , рассчитанная для верхней поверхности крылового профиля 12% относительной толщины при угле атаки $\alpha = +1^\circ$. Видно интенсивное падение $C_{Q \min}$ с ростом R_∞ .

Чтобы учесть в первом приближении влияние сжимаемости воздуха на $C_{Q \min}$, предполагалось, что она проявляется только в изменении эпюры распределения давления. Таким образом, допускалось, что сжимаемость не оказывает прямого влияния ни на распределение скоростей в пограничном слое, ни на устойчивость пограничного слоя при данном в нем распределении скоростей. Ни одно из этих допущений не является достаточно строгим, но, по-видимому, до скоростей, соответствующих местному числу $M = 1$, они не приведут к большим ошибкам [5].

Известно, что для любого заданного числа M (в докритической области) обтекание тонкого крылового профиля потоком сжимаемой жидкости подобно обтеканию профиля большей относительной толщины потоком несжимаемой жидкости. При этом относительная толщина эквивалентного профиля может быть найдена по правилу Прандтля — Глауэрта [6]. Чтобы получить распределение давлений для профилей с различной относительной толщиной, в качестве исходного выбиралось теоретическое распределение давлений на симметричном профиле 9%-ной относительной толщины при нулевом угле атаки, которое путем соответствующего изменения масштаба $\Delta U / U_\infty$ преобразовывалось в семейство родственных кривых по формуле [7]

$$\left[\frac{\Delta U(x)}{U_\infty} \right]_{c_2} = \left[\left(\frac{U}{U_\infty} \right) - 1 \right]_{c_1} \frac{\bar{c}_2}{c_1} + 1 \quad (3.2)$$



Фиг. 5

Если теперь количество отсасываемого воздуха, потребное для сохранения пограничного слоя в состоянии нейтральной устойчивости на эквивалентном толстом профиле в несжимаемой жидкости, принять в качестве исходного для соответствующего профиля в сжимаемом потоке при больших числах M , то можно проследить, как будет изменяться величина $C_{Q \min}$ с ростом числа M .

Такая зависимость приведена на фиг. 4 для трех значений относительных толщин, равных, соответственно, $\bar{c} = 0,05, 0,12$ и $0,2$. Нетрудно видеть, что рост величины $C_{Q \min}$ с ростом числа M сильнее выражен у более толстых профилей.

Увеличение угла атаки и соответствующее перераспределение давлений на верхней и нижней поверхностях крылового профиля приводят к изменению $C_{Q \min}$, на верхней поверхности (\uparrow) в связи с более интенсивным возрастанием давления в кормовой части и смещением точки потери устойчивости вперед к носку профиля расход отсасываемого воздуха, т. е. $C_{Q \min}$, с ростом угла атаки возрастает (фиг. 5), на нижней поверхности (\downarrow), наоборот, с увеличением угла атаки положительный градиент давления в кормовой части профиля уменьшается, а точка потери устойчивости смещается вниз по течению, что приводит к уменьшению $C_{Q \min}$. В результате полное количество потребного для отсасывания воздуха с увеличением угла атаки изменяется незначительно и в первом приближении в крейсерском диапазоне углов атаки и чисел M может считаться неизменным.

Поступило 25 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. L a s c h m a n n G. Boundary layer and flow control. Oxf., Pergamon Press, 1962, vol. 2.
2. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. работ вычисл. центра Моск. ун-та, № 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1962.
3. L i n C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Quarterly of Applied Mathematics, 1946, vol. 3, No. 4.
4. G ö r t l e r H. A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows. J. of Mathematics and Mechanics, 1957, vol. 6, No. 1.
5. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Аржаников Н. С., Садекова Г. С. Аэродинамика больших скоростей. М., Изд-во «Высшая школа», 1965.
7. A b b o t t J. H., D o e n h o f f A. E. Theory of wing sections. Dover publications, 1958.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ

В. В. ДЗУГАЕВ

(Москва)

В работе рассмотрена в линеаризованной постановке задача кавитационного обтекания невязкой несжимаемой жидкостью бесконечной прямой решетки без выноса, составленной из слабоизогнутых гидродинамических профилей. Образующаяся над профилем каверна заканчивается на спинке профиля. Аналогичная задача в случае замыкания каверны в потоке за профилем рассмотрена в работе [1]. Краевые условия задачи линеаризованы с помощью теории малых возмущений, развитой для течений с замкнутыми кавернами в работе [2].

В области замыкания каверны линеаризация граничных условий некорректна, так как в этой области возникает беспорядочное движение жидкости. Для сильно вытянутых каверн это обстоятельство несущественно, поскольку при этом почти не нарушается течение вблизи обтекаемого тела. В рассматриваемом в статье случае линеаризация менее законна, так как модель течения оказывается неудовлетворительной в некоторой области, пусть даже небольшой, в окрестности профиля.

Однако в случае линеаризации задачи для тонкого крыла при сплошном обтекании¹ расчеты подъемной силы и момента дают удовлетворительные результаты, поэтому и в случае частичной кавитации следует надеяться на то, что в качестве первого приближения можно решать линеаризованную задачу. Для определения комплексной скорости течения используется решение краевой задачи, данное в работе [3].

1. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ решетку, составленную из слабоизогнутых телесных профилей с шагом ti и обтекаемую безвихревым потоком невязкой несжимаемой жидкости. На бесконечности перед решеткой скорость потока параллельна действительной оси x . Профили в решетке составляют с осью x некоторый угол α . При обтекании передней кромки поток отрывается от

¹ Эта задача является частным случаем задачи о частично кавитирующем профиле, когда длина каверны равна нулю.