

О ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. П. ДОКУЧАЕВ
(Горький)

Методом силовых источников рассмотрена плоская задача о движении кругового цилиндра в вязкой электропроводной среде с магнитным полем. Обычное и магнитное числа Рейнольдса предполагаются малыми. Получены выражения для сил гидромагнитных реакций среды, действующих на движущийся цилиндр. Показано, что вследствие анизотропии течений в среде, обусловленной магнитным полем кроме сил сопротивления, на тела, движущиеся под углом к полю, действует отклоняющая сила, перпендикулярная к скорости движения. Определены возмущения поля скоростей на больших расстояниях от движущегося цилиндра.

Задачи обтекания твердых тел вязкой электропроводной жидкостью с магнитным полем составляют один из разделов магнитной гидродинамики. Движение электропроводной среды в магнитном поле порождает индукционные электромагнитные поля и токи, которые взаимодействуют с гидродинамическими полями скоростей и давлений в среде [1, 2]. При условиях достаточно сильного взаимодействия число независимых параметров подобия течений в магнитной гидродинамике значительно больше, чем в обычной гидродинамике. Это обстоятельство усложняет теоретический анализ магнитогидродинамического обтекания тел, поэтому приходится ограничиваться рассмотрением отдельных частных случаев обтекания.

Здесь будет рассмотрена линейная задача о движении бесконечно протяженного кругового цилиндра в вязкой несжимаемой среде с конечной электропроводностью, находящейся в однородном магнитном поле.

Имеется большое количество работ по обтеканию твердых тел вязкой электропроводной средой с магнитным полем (см., например, [3-5]). Вследствие этого некоторые результаты, полученные здесь, содержат в себе ранее известные, что будет указано ниже. В отличие от этих работ рассмотрение проведено методом силовых источников, предложенном в работе [6]. Метод позволяет получить интегральные уравнения для распределения сил, действующих на поверхность движущегося тела. Получено их решение при малых числах Рейнольдса и Гаргмана. Затем определяется характер возмущений скорости на больших расстояниях от тела. Проведено сравнение этих результатов с обычным вязким обтеканием цилиндра в приближении Осеена.

1. Будем исходить из системы линейных уравнений магнитной гидродинамики для несжимаемой вязкой среды с конечной электропроводностью [1, 2]

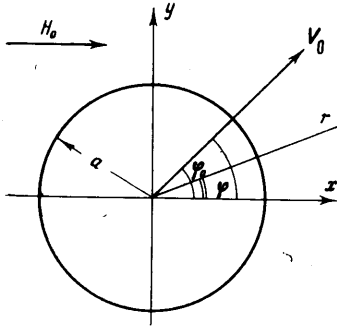
$$\rho_0 \frac{dv}{dt} = - \text{grad } p + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0 + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{h}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь ρ_0 и \mathbf{H}_0 — невозмущенные значения плотности и магнитного поля, η — коэффициент динамической вязкости, σ — электропроводность среды, которая считается изотропной, c — скорость света, \mathbf{v} , p и \mathbf{h} — возмущения скорости, давления и магнитного поля в среде, \mathbf{f} — объемная плотность внешних сил, действующих на среду со стороны движущегося тела [6]¹. В линейном приближении полная производная по времени $(d/dt) = (\partial/\partial t) + (\mathbf{V}_0 \nabla)$, где \mathbf{V}_0 — скорость движения жидкости.

¹ Введение силовых источников на поверхности тела удобно провести непосредственно в исходной системе (1.1) — (1.2), так как после ее преобразования к уравнению (1.6), (1.10) преобразуется оператором rot rot и силовая функция \mathbf{f} .

Рассмотрим задачу о стационарном движении твердого тела в виде бесконечно протяженного по оси z кругового цилиндра с электропроводностью $\sigma_1 = 0$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$, который движется с постоянной скоростью V_0 , лежащей в плоскости xy . Выберем ось x в направлении внешнего однородного магнитного поля H_0 . На фиг. 1 указано сечение цилиндра радиуса a , ориентированного своей осью по z , указано также направление магнитного поля H_0 и скорости V_0 . При такой постановке задачи индукционные электрические поля $E_i = v \times H_0 / c$ и соответствующие им электрические токи $j = \sigma E_i$ параллельны оси цилиндра и, следовательно, не создают поляризационных зарядов на его поверхности и соответствующих им электростатических полей в среде.



Фиг. 1

В тех случаях, когда в силу условий задачи поле E_i имеет компоненту, перпендикулярную к поверхности обтекаемого тела, возникают поверхностные поляризационные заряды. Это значительно усложняет решение задач на обтекание.

Далее будем считать магнитное число Рейнольдса

$$R_m = \frac{aV_0}{v_m} = \frac{4\pi\sigma aV_0}{c^2} \ll 1 \quad (1.3)$$

При этом условии и при отсутствии электростатических полей и зарядов из уравнения индукции (1.2) имеем

$$\text{rot } h = 4\pi\sigma (v \times H_0) / c \quad (1.4)$$

Если подставить выражение (1.4) в уравнение (1.1), то можно видеть, что влияние магнитного поля и электропроводности среды в рассматриваемом приближении сводится к индукционному торможению среды при ее движении поперек силовых линий магнитного поля [7]. Течение жидкости вдоль силовых линий поля H_0 не подвержено торможению. Это обстоятельство и порождает указанную выше анизотропию течения вязкой электропроводной среды в магнитном поле. Она оказывается весьма существенной для сил реакции среды на движущиеся тела.

Из уравнений (1.1), (1.2) и (1.4) легко получить уравнение для вектора скорости v в плоской стационарной задаче

$$\eta \Delta \Delta v - \frac{\sigma H_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_0 (V_0 \nabla) \Delta v = \text{rot rot}_z f \quad (1.5)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (V_0 \nabla) = V_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + V_{0y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{rot}_z f = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) e_z \right)$$

Здесь e_z — единичный вектор по z . Координаты x и y , имеющие начало на оси движущегося цилиндра, связаны с координатами неподвижной среды x_0, y_0 соотношениями

$$x = x_0 - V_{0x} t, \quad y = y_0 - V_{0y} t$$

Так как учет электропроводности среды не меняет порядка дифференциального уравнения (1.5), то можно пользоваться граничными условиями для обтекания твердого тела вязкой средой [8]. На поверхности движущегося цилиндра

$$v + V_0 = 0 \quad \text{при } r = a \quad (1.6)$$

Если перейти к безразмерным переменным в уравнении (1.5), то будем иметь

$$\Delta \Delta \mathbf{v}' - M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}'}{\partial x'^2} - R(\mathbf{V}_0' \nabla) \Delta \mathbf{v}' = \frac{a^2}{\eta V_0} \text{rot rot}_z \mathbf{f} \quad (1.7)$$

Здесь введены число Гартмана M и число Рейнольдса R

$$M = \frac{aH_0}{c} \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2}, \quad R = \frac{aV_0}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho_0} \quad (1.8)$$

Провести полный анализ уравнений (1.5), (1.7') не удастся. Вследствие этого здесь будут рассмотрены по отдельности следующие частные случаи уравнения (1.5). При значениях $R \ll 1$, $R \ll M^2$ вместо (1.5) запишем

$$\eta \Delta \Delta \mathbf{v} - \frac{\sigma H_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} = \text{rot rot}_z \mathbf{f} \quad (1.9)$$

В случае $M^2 \ll R < 1$ из (1.6) получаем известное уравнение Осеена

$$\eta \Delta \Delta \mathbf{v} - \rho_0 (\mathbf{V}_0 \nabla) \Delta \mathbf{v} = \text{rot rot}_z \mathbf{f} \quad (1.10)$$

Подробно будет рассмотрен первый случай, а второй рассмотрен предельно кратко с тем, чтобы проиллюстрировать метод силовых источников в теории вязких течений и сравнить результаты решений (1.9) с (1.10).

2. Интегральная форма решения уравнений (1.9) и (1.10) получается при помощи преобразований Фурье [9]. Так, применяя двукратное преобразование Фурье к уравнению (1.9), получим следующие соотношения между трансформантами Фурье для функций \mathbf{v} и \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} v_x(\mathbf{k}) &= \frac{k_y^2 f_x(\mathbf{k}) - k_x k_y f_y(\mathbf{k})}{\eta(k_x^2 + k_y^2)^2 + k_x^2 \sigma H_0^2 / c^2} \\ v_y(\mathbf{k}) &= \frac{k_x^2 f_y(\mathbf{k}) - k_x k_y f_x(\mathbf{k})}{\eta(k_x^2 + k_y^2)^2 + k_x^2 \sigma H_0^2 / c^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь по определению преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{r} \\ \mathbf{f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r} = dx dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

Применяя теорему обращения к соотношениям (2.1), получим следующую интегральную форму решения уравнения (1.9):

$$v_x(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_y^2 f_x(\mathbf{k}) - k_x k_y f_y(\mathbf{k})}{\eta(k_x^2 + k_y^2)^2 + (\sigma H_0^2 / c^2) k_x^2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (2.3)$$

$$v_y(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_x^2 f_y(\mathbf{k}) - k_x k_y f_x(\mathbf{k})}{\eta(k_x^2 + k_y^2)^2 + (\sigma H_0^2 / c^2) k_x^2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}$$

$$(d\mathbf{k} = dk_x dk_y)$$

Воспользуемся теоремой о свертках для интегралов в (2.3). Для этой цели используем сравнительно простое соотношение свертки в виде

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}}{k_x^2 + k_y^2 \pm 2iak_x} = \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x', y') e^{\mp i\alpha(x-x')} K_0[\alpha \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}] \bar{d}x' \bar{d}y'.$$

где K_0 — функция Макдональда нулевого порядка, а $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ определяется соотношением (2.2). Применяя теорему о свертках к интегралам (2.3) и используя при этом формулу (2.4), получим

$$v_x(x, y) = \frac{1}{4\pi\eta} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_x(x', y') \operatorname{ch} \alpha(x-x') K_0[\alpha \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}] dx' dy' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\eta} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x')f_x(x', y') + (y-y')f_y(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \times$$

$$\times \operatorname{sh} \alpha(x-x') K_1[\alpha \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}] dx' dy' \quad (2.5)$$

$$v_y(x, y) = \frac{1}{4\pi\eta} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_y(x', y') \operatorname{ch} \alpha(x-x') K_0[\alpha \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}] dx' dy' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\eta} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-y')f_x(x', y') - (x-x')f_y(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \operatorname{sh} \alpha(x-x') \times$$

$$\times K_1[\alpha \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}] dx' dy'$$

$$\left(\alpha = \frac{M}{2a} \right)$$

Полезно отметить, что в интегральной записи решения (2.5) неоднородного векторного уравнения (1.9) фактически использована тензорная функция Грина [6, 10] и решение представлено в виде

$$v_i(r) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ik}(r/r') f_k(r') dr' \quad (i = 1, 2) \quad (2.6)$$

Здесь G_{ik} — компоненты тензорной функции Грина, которые определяются простым сравнением (2.5) и (2.6).

Зададим плотность силы \mathbf{f} в виде обобщенной функции Дирака [6]

$$\mathbf{f} = [T_x(\varphi) \mathbf{e}_x + T_y(\varphi) \mathbf{e}_y] \delta(r-a) / r \quad (2.7)$$

Здесь введены цилиндрические координаты r и φ так, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (фиг. 1), \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные векторы осей x и y . Сила, действующая на единицу длины цилиндра, определяется интегралами

$$\mathbf{F} = - \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \mathbf{f} dr d\varphi = - \mathbf{e}_x \int_0^{2\pi} T_x(\varphi) d\varphi - \mathbf{e}_y \int_0^{2\pi} T_y(\varphi) d\varphi \quad (2.8)$$

В соотношениях (2.7), (2.8) $T_x(\varphi)$ и $T_y(\varphi)$ — неизвестные функции, подлежащие определению. Именно для них в п. 3 будут получены интегральные уравнения.

Подставим выражения (2.7) в интегралы (2.5), перейдем к цилиндрическим координатам и выполним интегрирование по r' . В результате получим

$$\begin{aligned}
 v_x(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} T_x(\varphi') \operatorname{ch} \alpha(r \cos \varphi - a \cos \varphi') \times \\
 &\quad \times K_0[\alpha \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' + \\
 &+ \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \varphi - a \cos \varphi') T_x(\varphi') + (r \sin \varphi - a \sin \varphi') T_y(\varphi')}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}} \times \\
 &\quad \times \operatorname{sh} \alpha(r \cos \varphi - a \cos \varphi') K_1[\alpha \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' \\
 v_y(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} T_y(\varphi') \operatorname{ch} \alpha(r \cos \varphi - a \cos \varphi') \times \\
 &\quad \times K_0[\alpha \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' + \\
 &+ \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} \frac{(r \sin \varphi - a \sin \varphi') T_x(\varphi') - (r \cos \varphi - a \cos \varphi') T_y(\varphi')}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}} \times \\
 &\quad \times \operatorname{sh} \alpha(r \cos \varphi - a \cos \varphi') K_1[\alpha \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Совершенно аналогично получается интегральное решение уравнения (1.10). В отличие от рассмотренного случая удобно выбрать скорость движения цилиндра вдоль оси x . При этом для течения Осеена вместо (2.9) будем иметь

$$\begin{aligned}
 v_x(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} T_x(\varphi') e^{-\beta(r \cos \varphi - a \cos \varphi')} \times \\
 &\quad \times K_0[\beta \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' - \\
 &- \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \varphi - a \cos \varphi') T_x(\varphi') + (r \sin \varphi - a \sin \varphi') T_y(\varphi')}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}} \times \\
 &\quad \times e^{-\beta(r \cos \varphi - a \cos \varphi')} K_1[\beta \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' + \\
 &+ \frac{1}{2\pi\rho_0 V_0} \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \varphi - a \cos \varphi') T_x(\varphi') + (r \sin \varphi - a \sin \varphi') T_y(\varphi')}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_y(r, \varphi) = & \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} T_y(\varphi') e^{-\beta(r \cos \varphi - a \cos \varphi')} \times \\
 & \times K_0[\beta \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' + \\
 & + \frac{1}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \varphi - a \cos \varphi') T_y(\varphi') - (r \sin \varphi' - a \sin \varphi') T_x(\varphi')}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}} \times \\
 & \times e^{-\beta(r \cos \varphi - a \cos \varphi')} K_1[\beta \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi' - \\
 & - \frac{1}{2\pi\rho_0 V_0} \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \varphi - a \cos \varphi') T_y(\varphi') - (r \sin \varphi - a \sin \varphi') T_x(\varphi')}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \\
 & \left(\beta = \frac{R}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

Выражения (2.9) и (2.10) будут исходными для всего последующего рассмотрения.

3. Получим интегральные уравнения для неизвестных функций $T_x(\varphi)$ и $T_y(\varphi)$. Следуя методу силовых источников [6], выберем T_x и T_y таким образом, чтобы на поверхности цилиндра при $r = a$ выполнялись граничные условия (1.6). Снова рассмотрим подробно случай уравнения (1.9). Таким образом, полагая в (2.9) $v_x = V_{0x}$ и $v_y = V_{0y}$ при $r = a$, будем иметь систему из двух интегральных уравнений относительно неизвестных функций T_x и T_y :

$$\begin{aligned}
 4\pi\eta V_{0x} = & \int_0^{2\pi} T_x(\varphi') \operatorname{ch} \left[M \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{2} \right] K_0 \left(M \left| \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi') \right| \right) d\varphi' + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \varphi - \cos \varphi') T_x(\varphi') + (\sin \varphi - \sin \varphi') T_y(\varphi')}{\left| \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi') \right|} \times \\
 & \times \operatorname{sh} \left[M \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{2} \right] K_1(M \left| \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi') \right|) d\varphi' \\
 4\pi\eta V_{0y} = & \int_0^{2\pi} T_y(\varphi') \operatorname{ch} \left[M \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{2} \right] K_0(M \left| \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi') \right|) d\varphi' + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin \varphi - \sin \varphi') T_x(\varphi') - (\cos \varphi - \cos \varphi') T_y(\varphi')}{\left| \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi') \right|} \times \\
 & \times \operatorname{sh} \left[M \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{2} \right] K_1(M \left| \sin \frac{1}{2} (\varphi - \varphi') \right|) d\varphi' \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Решение этих интегральных уравнений при произвольном числе Гартмана M получить не удастся. Поэтому здесь получено приближенное решение (3.1) при числе $M < 1$. Удобно поступить следующим образом. Разложим в ряд по малому параметру M функции ch , sh и K_1 , сохранив функцию K_0 в прежнем виде. Ограничимся первыми членами разложений.

Тогда вместо уравнений (3.1) получим значительно упрощенную систему

$$\begin{aligned}
 4\pi\eta V_{0x} &= \int_0^{2\pi} T_x(\varphi') K_0(M |\sin^{1/2}(\varphi - \varphi')|) d\varphi' + \\
 &+ \int_0^{2\pi} \left[T_x(\varphi') \sin^{2^{1/2}}(\varphi + \varphi') - \frac{1}{2} T_y(\varphi') \sin(\varphi + \varphi') \right] d\varphi' \\
 4\pi\eta V_{0y} &= \int_0^{2\pi} T_y(\varphi') K_0(M |\sin^{1/2}(\varphi - \varphi')|) d\varphi' - \\
 &- \int_0^{2\pi} \left[T_y(\varphi') \sin^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) + \frac{1}{2} T_x(\varphi') \sin(\varphi + \varphi') \right] d\varphi' \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Теорема сложения для цилиндрических функций дает [11]

$$K_0(M |\sin^{1/2}(\varphi - \varphi')|) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n\left(\frac{M}{2}\right) I_n\left(\frac{M}{2}\right) \cos n(\varphi - \varphi') \quad (3.3)$$

где I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Подставим (3.3) в уравнения (3.2). После этого решение (3.2) легко получить простым разложением $T_x(\varphi)$ и $T_y(\varphi)$ в ряд Фурье и определением коэффициентов из (3.2)

$$T_x(\varphi) = \frac{4\eta V_{0x}}{2K_0(1/2M)I_0(1/2M) + 1}, \quad T_y(\varphi) = \frac{4\eta V_{0y}}{2K_0(1/2M)I_0(1/2M) - 1}$$

Заметим, что

$$K_0(1/2M)I_0(1/2M) \approx -(\gamma + \ln^{1/4}M) \quad \text{при } M < 1$$

Здесь $\gamma = 0.57721$ — постоянная Эйлера. Однако для удобства численных расчетов здесь сохранены цилиндрические функции. Таким образом, в рассмотренном приближении распределение сил на поверхности цилиндра не зависит от угла φ . Компоненты полной силы, действующей на единицу длины цилиндра, определяются интегралами (2.8)

$$F_x = -\frac{8\pi\eta V_{0x}}{2K_0(1/2M)I_0(1/2M) + 1}, \quad F_y = -\frac{8\pi\eta V_{0y}}{2K_0(1/2M)I_0(1/2M) - 1} \quad (3.5)$$

Из этих формул получаются выражения для силы сопротивления $X = (FV_0) / V_0$ и силы L , действующей перпендикулярно направлению скорости движения цилиндра и стремящейся приблизить его траекторию к направлению силовых линий магнитного поля

$$X = -\frac{8\pi\eta V_0 [2K_0(1/2M)I_0(1/2M) - \cos 2\varphi_0]}{4K_0^2(1/2M)I_0^2(1/2M) - 1} \quad (3.6)$$

$$L = -\frac{8\pi\eta V_0 \sin 2\varphi_0}{4K_0^2(1/2M)I_0^2(1/2M) - 1} \quad (3.7)$$

Здесь φ_0 — угол, образованный векторами V_0 и H_0 (фиг. 1). На фиг. 2 дана зависимость коэффициентов $C_X = X / 8\pi\eta V_0$ и $C_L = L / 8\pi\eta V_0$ от

числа Гартмана при $\varphi_0 = 45^\circ$. Укажем, что при $\varphi_0 = 0$, т. е. для движения вдоль магнитного поля $L = 0$, а выражение (3.6) переходит в полученное ранее в работе [4]. Наличие компоненты силы L обусловлено указанной в п.п. 1, 2 анизотропией течения вокруг цилиндра. Оно изотропно только в случае $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = 1/2\pi$.

Совершенно аналогично можно получить интегральные уравнения для T_x и T_y в гидродинамическом случае обтекания Осеена, когда $M^2 \ll R < 1$. При этом из интегрального решения (2.10) с граничными условиями $v_x = V_{0x}$, $v_y = 0$ при $r = a$ получаются интегральные уравнения типа

(3.2), где вместо M фигурирует число Рейнольдса R , а левая часть второго уравнения (3.2) равна нулю. (Напомним, что угол при этом отсчитывается от направления V_0). Окончательный результат имеет вид

$$X = - \frac{8\pi\eta V_0}{2K_0(1/2R)I_0(1/2R) + 1}, \quad L = 0 \quad (3.8)$$

Полагая

$$K_0(1/2R)I_0(1/2R) \approx -(\gamma + \ln 1/4R)$$

при $R < 1$

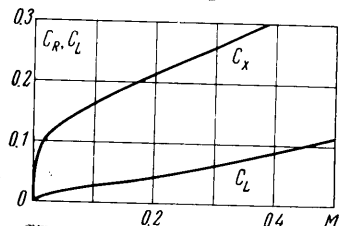
видим, что (3.8) совпадает с формулой Ламба [8]. В этом случае отсутствует асимметрия течения относительно траектории движения тела и $L = 0$.

4. Вычислим поле скоростей на больших расстояниях от поверхности движущегося цилиндра. Вначале рассмотрим случай $R \ll M < 1$ и будем считать, что $Mr > a$. При этом в интегралах (2.9) силы T_x и T_y не зависят от φ' , как показывают формулы (3.4). Воспользуемся асимптотикой функций K_0 и K_1 при больших значениях аргумента [11]. Выполняя интегрирование в (2.9) при этих условиях, получим

$$v_x(r, \varphi) \approx \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\pi a}{Mr}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{rM}{2a}\right) \left[T_x \operatorname{ch}\left(\frac{Mr \cos \varphi}{2a}\right) + (T_x \cos \varphi + T_y \sin \varphi) \operatorname{sh}\left(\frac{Mr \cos \varphi}{2a}\right) \right] \quad (4.1)$$

$$v_y(r, \varphi) \approx \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\pi a}{Mr}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{rM}{2a}\right) \left[T_y \operatorname{ch}\left(\frac{Mr \cos \varphi}{2a}\right) + (T_x \sin \varphi - T_y \cos \varphi) \operatorname{sh}\left(\frac{Mr \cos \varphi}{2a}\right) \right]$$

Здесь T_x и T_y определяются из (3.4). Рассмотрим некоторые частные случаи выражений (4.1). Допустим, что тело движется вдоль силовых линий магнитного поля H_0 , тогда $T_y = 0$. При этом имеются два направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, в которых v_x медленно убывает с ростом r ($v_x \sim r^{-1/2}$). Это означает, что имеются два следа, один из которых расположен вниз по течению, а второй — вверх по течению. Образование двух следов при вязком обтекании тел в магнитной гидродинамике обсуждается в работах [12, 13]. В другом предельном случае, когда тело движется перпендикулярно силовым линиям H_0 и $T_x = 0$, оба следа исчезают и скорости v_x и v_y экспоненциально убывают с ростом r . При произвольном φ_0 (фиг. 1) движущееся тело создает два следа, расположенных вдоль силовых линий магнитного поля.



Фиг. 2

Интересно сравнить эти результаты с гидродинамическим обтеканием в приближении Осеена $M^2 \ll R < 1$. При условии $rR > a$ из соотношений (2.10) имеем

$$\begin{aligned} v_x &\approx \frac{X}{4\pi\eta} \left[\left(\frac{\pi a}{rR} \right)^{1/2} (1 - \cos \varphi) \exp \left\langle -\frac{rR(1 + \cos \varphi)}{2a} \right\rangle + \frac{2a \cos \varphi}{rR} \right] \\ v_y &\approx \frac{X}{4\pi\eta} \left[-\left(\frac{\pi a}{rR} \right)^{1/2} \exp \left\langle -\frac{rR(1 + \cos \varphi)}{2a} \right\rangle + \frac{2a}{rR} \right] \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

где сила сопротивления X определяется формулой (3.8).

В этом случае след имеется только за движущимся цилиндром при $\varphi = \pi$ и $v_x \sim r^{-1/2}$. (Напомним, что здесь угол φ отсчитывается от направления скорости тела V_0 .) В других направлениях скорость экспоненциально убывает с ростом r . Таким образом имеется существенное отличие обтекания тел электропроводной магнитоактивной средой от обычного вязкого обтекания. Сравнение (4.1) и (4.2) указывает на то, что если в обычной гидродинамике течение вокруг движущегося тела симметрично относительно траектории движения, то при наличии магнитного поля течение в общем случае несимметрично к траектории. Симметрия имеет место только при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = 1/2\pi$.

В заключение заметим, что здесь не рассматривался случай $R \ll 1 < M$, который безусловно также представляет интерес. Обращаясь к уравнению в безразмерных переменных (1.7') или (1.9), видим, что при этом в дифференциальных уравнениях имеется малый параметр при старшей производной ($\eta \rightarrow 0$). Хорошо известны трудности получения даже асимптотических решений в этом случае. Для его анализа требуется провести специальное исследование по теории электропроводной магнитоактивной жидкости с исчезающей вязкостью. По-видимому, этот случай также описывается интегральными уравнениями (3.1) при $M > 1$. Тем не менее получить хотя бы приближенное решение не удалось ввиду сложного асимптотического поведения сингулярных ядер и подынтегральных весовых функций (3.1) во всей области изменения их аргумента.

Поступило 21 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика. Усп. физ. н., 1957, т. 52, вып. 3.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
3. Chester W. The effect of a magnetic field on the flow of a conducting fluid past a body of revolution. J. Fluid Mech., 1964, vol. 10, pt. 3.
4. Hiroo Josinobu. A linearized theory of magnetohydrodynamic flow past a fixed body in a parallel magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1960, vol. 15, No. 1.
5. Frenkiel F. N., Sears W. R. Proceedings of the symposium on magnetofluid dynamics in Rev. Modern Phys., 1960, vol. 32, No. 4.
6. Докучаев В. П. К линейной теории обтекания тел. Метод силовых источников. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
7. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. Изд. иностр. лит., 1959.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 4, Физматгиз, 1963, ч. 2.
9. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд. иностр. лит., 1955.
10. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. I. Изд. иностр. лит., 1958.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд. иностр. лит., 1949.
12. Glaupert M. B. Magnetohydrodynamic wakes. J. Fluid Mech. 1963, vol. 15, pt. 1.
13. Fan D. N. Aligned-fields magnetogasdynamic wakes. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt. 3.