

линии пересечения скачков должны проходить через точки, отмеченные крестиками. Однако они располагаются выше, что связано, по-видимому, с несколько меньшим в эксперименте числом M , по сравнению с расчетным, а также влиянием вязкости. Линии 3 соответствуют следам скачков, отраженных от стенок, а линии 4 могут представлять как отраженные от стенок скачки, так и линии вторичного пересечения скачков. В работе [10] места отражения вторичных скачков от поверхности крыльев располагались выше точки излома внутренних плоскостей крыльев. Для испытанной «звезды» соответствующие места отражения также располагаются несколько выше точки излома. Таким образом, в реальном гиперзвуковом обтекании при наличии отклонения числа M от расчетного, небольшого угла атаки и влияния вязкости осуществляется течение, близкое к схеме с регулярным пересечением скачков, которая дополняется системой слабых скачков, отраженных от стенок.

Авторы благодарят Г. И. Петрова, Г. Г. Черного, М. Я. Юделовича и А. А. Чурилина за содействие в проведении эксперимента.

Поступило 20 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
2. Гонор А. Л. Конические тела наименьшего сопротивления в гиперзвуковом потоке газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Гонор А. Л. Определение формы пространственного оптимального тела с учетом силы трения. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
4. Miele U., Saaris G. R. Transversal Contour of Minimum Total Drag Theory of Optimum Aerodynamic Shapes. Chapter 20, N. Y., Acad. Press., 1965.
5. Bellman R. Young's Inequality and the Problem the Optimum Transversal Contour. Theory of Optimum Aerodynamic Shapes, Chapter 21, N. Y., Acad. Press, 1965.
6. Reyn J. W. Cones of Minimum Drag in Newtonian Flow. J. Astronaut Sciences, 1965, vol. 12, No. 2.
7. Гонор А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
8. Гонор А. Л., Швец А. И. Исследование системы скачков при обтекании звездообразных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
9. Черный Г. Г. К исследованию тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
10. Гонор А. Л., Швец А. И. Исследование распределения давления на некоторых звездообразных телах при числе $M = 4$. ПМТФ, 1965, № 6.

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

М. Я. ИВАНОВ

(Москва)

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, в которых определялись тела с минимальным сопротивлением и сопла максимальной тяги. Проведено исследование области существования различных решений в плоскости течения и показано, что оптимальный профиль при наличии ограничения на длину может иметь торец, являющийся участком краевого экстремума. Результаты этих исследований, а также необходимая библиография содержатся в работах [1-3].

Ниже приводится совместное решение задач о построении оптимальной кормовой части и контура сопла, которые являются границами одного плоского тела или тела с протоком. Рассмотрение ограничено случаем, когда форма внешнего контура (т. е. контура кормовой части) обеспечивает отсутствие ударных волн в области его влияния. Получены необходимые условия, определяющие оптимальную конфигурацию, и приведены примеры расчета.

1. Пусть x, y прямоугольные координаты в плоскости течения; в осесимметричном случае ось x совпадает с осью симметрии. Известная часть внешнего контура слева от точки a^0 и контура сопла слева от a определяют положение характеристики a^0c^0 и звуковой линии ao (фиг. 1). Пусть размеры внешнего контура a^0b^0 и контура сопла ab ограничены неравенствами

$$\begin{aligned} y(x) &\leq y_{a^0} && \text{при } x_{a^0} \leq x \leq x_{b^0} \\ x_b &\leq X, && x_{b^0} \leq X + \Delta X \\ y_a &\leq y_b \leq y_{b^0} \leq y_{a^0} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь X — максимально допустимая длина контура, ΔX — разница между абсциссами точек a° и a . В силу условия (1.1) в точках a° и a может быть излом обр-азующей. Известно отношение полных давлений внешнего и внутреннего потоков p_0°/p_0 .

Задача формулируется следующим образом: при заданных параметрах набегающего потока на характеристике $a^\circ c^\circ$, известных параметрах на звуковой линии ao и заданной максимально допустимой длине X построить контур $abb^\circ a^\circ$, обеспечивающий максимум тяги. В общем случае контур может содержать торец bb° , размер которого определяется в процессе решения.

2. Волновое сопротивление или тяга χ тела с контуром $abb^\circ a^\circ$ с точностью до несущественного постоянного множителя выражается формулой

$$\chi = \int_{v_a}^{v_b} p y^v dy + p^+ \int_{v_{b^\circ}}^{v_{b^\circ}} y^v dy + \int_{v_{b^\circ}}^{v_{a^\circ}} p y^v dy$$

Здесь донное давление p^+ считается постоянным по торцу.

При решении используется метод перехода к контрольному контуру. Для внешней задачи контрольный контур состоит из характеристик $a^\circ c^\circ$ и $c^\circ b^\circ$, для внутренней — из характеристик ac и cb . Величины χ , $X^\circ = X + \Delta X = x_{b^\circ} - x_{a^\circ}$ и $X = x_b - x_a$ выражаются через интегралы по этим характеристикам и по торцу bb° . Метод перехода к контрольному контуру не позволяет провести строгий учет зависимости p^+ от формы контуров ab и $a^\circ b^\circ$.

В проведенном анализе считалось, что

$$p^+ = p^+(y_b, y_{b^\circ}) \quad (2.1)$$

С использованием метода множителей Лагранжа составляется функционал I , включающий выражения для χ , X и X° и дифференциальные соотношения на замыкающих характеристиках bc и $b^\circ c^\circ$. Уравнения, определяющие форму контуров ab и $a^\circ b^\circ$ при фиксированном положении точек b и b° , получаются из рассмотрения первой вариации этого функционала δI и совпадают с уравнениями, полученными ранее при раздельном рассмотрении внутренней и внешней вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики [1, 2]. При этом в выражении для δI остаются следующие слагаемые, отвечающие варьированию положения точек b и b° :

$$\begin{aligned} \delta I = & \delta \chi = y_b^v \left(p - \rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \theta \cos \theta - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+} \right)_b \delta y_b + \\ & + y_b^v \left(p - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+} \right)_b \operatorname{tg} \theta_b \delta x_b - y_{b^\circ}^v \left(p + \rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \theta \cos \theta - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+} \right)_{b^\circ} \times \\ & \times \delta y_{b^\circ} - y_{b^\circ}^v \left(p - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+} \right)_{b^\circ} \operatorname{tg} \theta_{b^\circ} \delta x_{b^\circ}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь p — давление, отнесенное к $\rho_* w_*^2$, ρ — плотность, отнесенная к ρ_* , w — модуль скорости, отнесенный к w_* , θ — угол наклона вектора скорости к оси x , α — угол Маха; v равно нулю и единице, соответственно, для плоского и осесимметричного случаев; w_* и ρ_* — параметры, имеющие соответственно размерности скорости и плотности, и

$$(p_{y^+})_b = \left(\frac{\partial p^+}{\partial y} \right)_b, \quad (p_{y^+})_{b^\circ} = \left(\frac{\partial p^+}{\partial y} \right)_{b^\circ}, \quad \varepsilon = \frac{y_{b^\circ}^{v+1} - y_b^{v+1}}{v+1}$$

3. Выводятся дополнительные условия, которые накладываются на параметры в конечных точках и являются необходимыми условиями экстремума.

Ординаты конечных точек y_b и y_{b° связаны равенством $y_b = y_{b^\circ} - h$, где h — размер торца. Тогда

$$\delta y_b = \delta y_{b^\circ} - \delta h \quad (3.1)$$

Введем параметр, который назовем давлением Буземана

$$P^\pm = (p \pm \rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \theta \cos \theta)_{b^\circ, b} \quad (3.2)$$

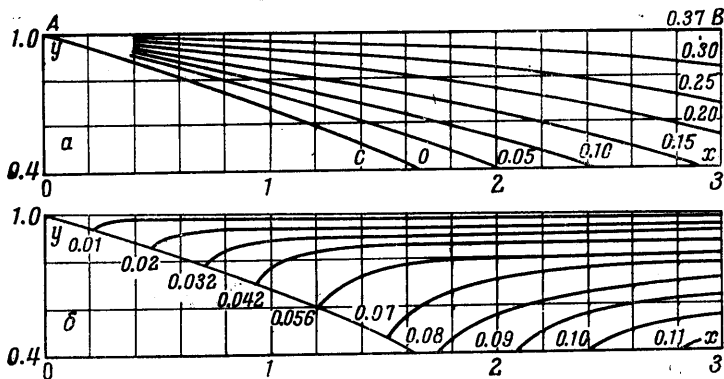
С учетом (3.1) и (3.2) перепишем (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \delta I = \delta \chi = & \left[y_b^v (P^- - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_b - y_{b^0}^v (P^+ - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_{b^0} \right] \delta y_{b^0} - \\ & - y_b^v (P^- - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_b \delta h + y_b^v (p - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_b \operatorname{tg} \vartheta_b \delta x_b - \\ & - y_{b^0}^v (p - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_{b^0} \operatorname{tg} \vartheta_{b^0} \delta x_{b^0}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассматриваются различные случаи.

Первый случай. Пусть $y_{b^0} < y_{a^0}$. Тогда δy_{b^0} может иметь произвольный знак. Из (3.3) следует условие экстремума

$$y_b^v (P^- - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_b = y_{b^0}^v (P^+ - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_{b^0}. \quad (3.4)$$



Фиг. 2

Второй случай. Пусть $y_{b^0} = y_{a^0}$. Тогда $\delta y_{b^0} < 0$ и для максимума тяги необходимо

$$y_b^v (P^- - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_b \geq y_{b^0}^v (P^+ - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_{b^0}. \quad (3.5)$$

Если есть торец, то знак δh произволен, и к (3.4) и (3.5) надо добавить выражение

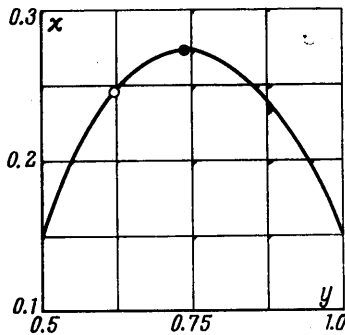
$$P^\pm = (p^+ \pm \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_{b^0, b} \quad (3.6)$$

Если торца нет, то $\delta h > 0$, $\varepsilon = 0$ и имеет место

$$P^\pm \geq p^+ \quad (3.7)$$

Здесь p^+ — давление, действующее на торец при его введении. В силу того, что $\delta x_b \leq 0$ и $\delta x_{b^0} \leq 0$, получается

$$\begin{aligned} (p - p^+ + \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_b \operatorname{tg} \vartheta_b & \geq 0 \\ - (p - p^+ - \frac{\varepsilon}{y^v} p_{y^+})_{b^0} \operatorname{tg} \vartheta_{b^0} & \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$



Фиг. 3

При отсутствии торца в условиях (3.4) и (3.5) надо положить $\varepsilon = 0$ и, следовательно, вид зависимости (2.1) становится несущественным. Более того, тем же способом, что и в [4] можно показать следующее: если p^+ определяется в соответствии с теорией типа

Корста, то полученные выше условия при $\varepsilon = 0$ оказываются точными.

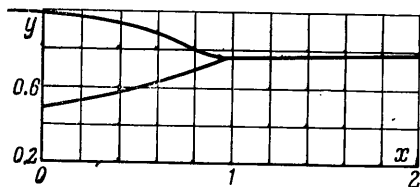
Если торец существует, т. е. справедливо условие (3.6), то, учитывая (3.2), (3.8), можно записать:

$$\rho_b w_b^2 \operatorname{tg} \alpha_b \sin^2 \vartheta_b \geq 0, \quad \rho_{b^0} w_{b^0}^2 \operatorname{tg} \alpha_{b^0} \sin^2 \vartheta_{b^0} \geq 0$$

Легко видеть, что эти условия выполняются.

В проведенных расчетах при использовании условий (3.4)—(3.6) пренебрегалось членами с частными производными $(p_v^+)_b$ и $(p_v^+)_{b^0}$.

4. В соответствии со сказанным были выполнены расчеты оптимальных конфигураций. Переходная поверхность сопла предполагалась плоской и отход от нее осуществлялся разложением в ряды [5]. Расчет сверхзвукового течения проводился методом характеристик [6, 7]. Экстремальные характеристики определялись по соотношениям работы [2]. Внешнее обтекание рассчитано для совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa = 1.4$, и пример расчета для $M = 1.5$ приведен на фиг. 2, а и б.



Фиг. 4

имеют качественно такой же вид, как и графики, приведенные в работе [3]. На фиг. 3 показано изменение тяги контура, оканчивающегося острой кромкой, в зависимости от ординаты концевой точки для

$$M = 1.1, \quad y_{a^0} / y_a = 2, \quad X = 1, \quad \Delta X = 0.2, \quad p_{o^0} / p_o = 0.36$$

Тяга отнесена к $\rho_o y_a^2$, а ордината концевой точки, отложенная по оси абсцисс, к y_{a^0} . Черная точка, соответствующая максимуму χ , определяется при помощи условий (3.4), (3.7) и дает в этом случае конфигурацию без торца. Контур, у которого струя, текущая в сопле, расширяется до атмосферного давления, имеет меньшее значение χ (белая точка на фиг. 3). Различие по тяге у этих контуров около 10%.

На фиг. 4 показано изменение ординат концевых точек в зависимости от длины X для $M = 1.5$, $y_{a^0} / y_a = 2$ и $p_{o^0} / p_o = 0.41$. При $X \leq 1$ есть торец, при $X > 1$ — острая кромка. Профили ab и a^0b^0 находятся решением задачи Гурса для треугольников acb и $a^0c^0b^0$.

Поступило 20 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
2. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
3. Крайко А. Н., Наумова И. Н. и Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
4. Крайко А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
5. Кацкова О. Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. Тр. ВЦ АН СССР, 1964.
6. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шулищнина Н. П., Шмыглевский Ю. Д. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Тр. ВЦ АН СССР, 1961.
7. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. Тр. ВЦ АН СССР, 1964.