

7. Hunt J. C. R. Magneto-hydrodynamic flow in rectangular ducts. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 4, p. 577—590.
8. Hunt J. C. R., Stewartson K. Magneto-hydrodynamic flow in rectangular ducts II. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 3, p. 563—582.
9. Hartmann J., Lazarus F. Theory of the laminar flow of electrically conductive liquid in a homogenous magnetic field. II. Dan. Vid. Stryfter Math.-fys. Medd., 1937, V. 15, No. 7.
10. Хожанов А. И. Стационарное течение жидкого металла в магнитогиродинамическом канале прямоугольного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4, стр. 114—117.
11. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М. Течение ртути в поперечном магнитном поле в трубах с непроводящими и проводящими стенками. Магнитная гидродинамика, 1967, № 1.
12. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Щербинин Э. В. Турбулентное течение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Магнитная гидродинамика, 1966, № 4, стр. 78—84.
13. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А. Особенности влияния поперечного магнитного поля на турбулентные течения жидкого металла при различных числах Рейнольдса. Ж. техн. физ., 1965, т. 35, № 2, стр. 235—241.
14. Brouillette E. C., Lykoudis P. S. Magneto-Fluid-Mechanic channel flow. Lafayette Indiana, Purdue University, School Aeronaut and Engng. Sci., 1966.
15. Lesocq P. Contribution a l'etude des pertes de charge et profils de vitesse en ecoulement turbulent en magneto-hydrodynamique. Bull. Centre rech. et essais Chatou, 1964, No. 8, Suppl.
16. Брановер Г. Г., Щербинин Э. В. Магнитогиродинамическое струйное течение в ограниченном пространстве. Магнитная гидродинамика, 1966, № 3, стр. 55—63.
17. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В. О применении трубок Пито и Прандтля в магнитогиродинамическом эксперименте. Магнитная гидродинамика, 1966, № 1, стр. 98—102.
18. Брановер Г. Г. Турбулентные магнитогиродинамические течения в трубках Рига «Зинатне», 1967.

## НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИЗЛУЧАЮЩИХ ТЕЛ, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Н. М. БЕЛЯНИН

(Москва)

Решаются две вариационные задачи об определении оптимальной формы излучающего тела заданных размеров, обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Рассматривается случай, когда существенны два процесса теплопередачи: конвективная теплопередача от газа к телу и излучение с поверхности тела. Первая задача заключается в том, что находится контур тела, воспринимающего минимальный тепловой поток. При решении второй задачи отыскивается такая форма теплоизолированного тела, чтобы температура его поверхности была минимальной при заданных параметрах набегающего потока или чтобы скорость движения была максимальной при заданных температуре стенки и высоте полета.

1. Рассмотрим обтекание симметричных плоских и осесимметричных тел под левым углом атаки. Введем прямоугольные координаты  $x$  и  $y$ , причем ось  $x$  совместим с линией или осью симметрии, а начало координат — с критической точкой. Расстояние от критической точки вдоль контура тела обозначим через  $s$ . Пусть уравнение контура имеет вид  $x = x(y)$ , причем длина тела и половина толщины (или радиус конечного сечения) заданы и равны соответственно  $x_3$ ,  $u_3$ ; пограничный слой является ламинарным, а излучение с поверхности тела подчиняется закону Стефана — Больцмана. Количество тепла  $Q$ , которое воспринимается в единицу времени единицей ширины плоского тела или сектором осесимметричного тела с центральным углом, равным единице, может быть представлено в виде

$$Q = \int_0^{s_3} y^{\nu} q_1 ds - \int_0^{s_3} y^{\nu} q_2 ds \quad (1.1)$$

Здесь  $q_1$  — удельный конвективный тепловой поток,  $q_2$  — удельный лучистый тепловой поток,  $s_3$  — длина образующей тела,  $\nu = 0$  в плоском случае и  $\nu = 1$  в осесимметричном. Величина  $q_1$  зависит от параметров потока, которые определяются формой обтекаемого тела, а

$$q_2 = \varepsilon \sigma T_w^4$$

причем  $\varepsilon$  — степень черноты поверхности,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана.

Первую вариационную задачу отыскания оптимальной формы тела следует сформулировать следующим образом: среди допустимых функций  $x = x(y)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(y_3) = x_3$  найти такую, которая давала бы минимум правой части соотношения (1.1). Для решения этой задачи может быть применен метод, использованный для определения формы тела при отсутствии излучения [1].

Для нахождения связи удельного конвективного теплового потока  $q_1$  с газодинамическими параметрами используются интегральное уравнение энергии в пограничном слое

$$\frac{1}{y'} \frac{d}{ds} [y^\nu \rho u (h_e - h_w) \Theta] = q_1 \quad (1.2)$$

и гипотеза локального подобия. Здесь и дальше  $\rho$ ,  $u$  — плотность и скорость на границе пограничного слоя;  $h_e$ ,  $h_w$  — равновесная энтальпия и энтальпия при температуре стенки;  $\Theta$  — толщина потери энергии. Так как при ламинарном режиме течения в пограничном слое на плоской пластине постоянной температуры [2]

$$\frac{q_1}{\rho u (h_e - h_w)} = \frac{2A^2}{R_*}, \quad R_* = \frac{\rho u \Theta}{\mu} \quad (1.3)$$

$$A = 0.332 P^{-2/3} [0.45 + 0.55 h_w / h + 0.09 (\gamma - 1) M^2 P^{1/3}]^{1/2(\omega - 1)}$$

Здесь  $R$  — число Рейнольдса,  $P$  — число Прандтля,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\omega$  — показатель в степенной зависимости коэффициента вязкости  $\mu$  от температуры. Согласно гипотезе локального подобия, аналогичная зависимость удельного теплового потока  $q_1$  от параметров в данном сечении будет иметь место и при обтекании тел сложной формы.

Интегрируя уравнение энергии (1.2) с учетом соотношения (1.3), получим

$$y^\nu \rho u (h_e - h_w) \Theta = 2 \left[ \int_0^s A^2 y^{2\nu} \rho u \mu (h_e - h_w)^2 ds \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Принимая во внимание соотношения (1.2), (1.4), преобразуем уравнение (1.1)

$$S_* R_*^{1/2} = 2A_0 \left[ x_3^{-1} y_3^{-2\nu} \int_0^{s_3} \left( \frac{A}{A_0} \right)^2 \psi \left( \frac{h_e - h_w}{h_{\infty*} - h_w} \right)^2 y^{2\nu} ds \right]^{1/2} - \int_0^{s_3} \varepsilon \sigma T_w^4 y^\nu ds \quad (1.5)$$

$$S_* = \frac{Q}{\rho_* u_* (h_{\infty*} - h_w) x_3 y_3^{2\nu}}, \quad R_* = \frac{\rho_* u_* x_3}{\mu_*}, \quad \psi = \frac{\rho \mu}{\rho_* u_* \mu_*}$$

Здесь  $S_*$  — число Стантона,  $A_0 = 0.332 P^{-2/3}$  — значение параметра  $A$  при  $h = h_w$  и  $M = 0$  (или при  $\omega = 1$ ). Звездочкой обозначены параметры за ударной волной.

При приближенном анализе изменением величин  $h_e/h_w$  и  $A/A_0$  можно пренебречь по сравнению с изменением величины  $\psi$  в зависимости от  $M$ . Для тел с большой теплопроводностью температура стенки  $T_w$  может считаться постоянной. Тогда соотношение (1.5) упрощается

$$\chi = S_* R_*^{1/2} P^{2/3} = 0.664 x_3^{-1/2} y_3^{-\nu} \{ [J_1(s_3)]^{1/2} - K x_3^{-1/2} J_2(s_3) \} \quad (1.6)$$

$$J_1(s) = \int_0^s \psi y^{2\nu} ds, \quad J_2(s) = \int_0^s y^\nu ds$$

$$K = \frac{\varepsilon \sigma T_w^4 R_*^{1/2} P^{2/3}}{0.664 \rho_* u_* (h_{\infty*} - h_w)}$$

Величина  $K$  характеризует отношение лучистого теплового потока к конвективному тепловому потоку. Эта величина определяется параметрами набегающего потока, т. е. высотой и скоростью движения тела.

Значения  $K$  при  $\epsilon = 0.5$ ,  $T_w = 1500^\circ \text{K}$ , а также значения чисел Рейнольдса, подсчитанных по параметрам за ударной волной и характерному размеру 1 м, приведены на фиг. 1 в зависимости от числа  $M_\infty$  и высоты полета. Там же нанесена кривая 1, ограничивающая возможность горизонтального полета в атмосфере аппарата, движение которого зависит от соотношения аэродинамической и центробежной сил, с одной стороны, и веса — с другой [3]. Выше кривой 1 вес больше подъемной силы и полет такого аппарата невозможен. Кривая 2 фиг. 1 рассчитана при условии, что лучистый тепловой поток от слоя нагретого газа за ударной волной соизмерим с лучистым тепловым потоком от поверхности затупления обтекаемого тела, имеющей температуру  $T_w = 1500^\circ \text{K}$  и  $\epsilon = 0.5$ . При этом использовались значения степени черноты воздуха, приведенные в работе [4]. Правее кривой 2 необходимо учитывать излучение нагретого газа. При некотором значении  $K$ , которое зависит от конкретной формы обтекаемого тела, но близко к 0.5, лучистый тепловой поток становится равным конвективному, и отпадает необходимость дополнительного охлаждения. Этот случай обтекания теплоизолированного тела будет рассмотрен отдельно в 3.

Приведенный анализ показывает, что принятая постановка первой задачи справедлива лишь в области параметров, заштрихованной на фиг. 1. В этой области пограничный слой будет ламинарным, а воспринимаемое обтекаемым телом тепло равно разности конвективного и лучистого потоков тепла.

2. Согласно соотношению (1.6), тепловой поток, воспринимаемый телом, будет минимальным, если функционал

$$J = [J_1(s_3)]^{1/2} - Kx_3^{-1/2}J_2(s_3) \quad (2.1)$$

достигает минимума.

Оптимальный контур может состоять из участков двустороннего экстремума  $x = x(y)$  и участков границ  $x = 0$ ,  $x = x_3$ ,  $y = 0$ ,  $y = y_3$ , если они являются участками краевого экстремума. Однако в рассматриваемой постановке прямые  $x = x_3$  и  $y = 0$  следует исключить, так как при обтекании уступа возможно возникновение отрыва пограничного слоя, а соотношение (1.6) получено для случая безотрывного обтекания. Применение формулы Ньютона для определения давления при обтекании уступа тоже может привести к неточностям. Аналогичные ограничения накладываются на контур тела как при нахождении тел минимального сопротивления [5], так и при нахождении тел с минимальным тепловым потоком [4]. Следовательно, контур оптимального тела может иметь торец ( $x = 0$ ) и участок постоянной толщины ( $y = y_3$ ).

При обтекании тел с затупленной передней частью потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью распределение давления на поверхности приближенно описывается уточненной формулой Ньютона [6]

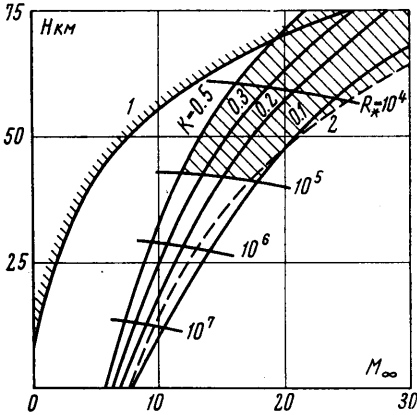
$$\begin{aligned} \pi &= \sin^2 \alpha (1 - \pi_\infty) + \pi_\infty, & \pi &= p / p_0^*, & \pi_\infty &= p_\infty / p_0^* \\ \sin^2 \alpha &= (1 + x'^2)^{-1}, & x' &= dx / dy, & 0 &\leq x' \leq \infty \end{aligned} \quad (2.2)$$

$p_0^*$  — давление торможения за прямым скачком уплотнения,  $\alpha$  — угол между вектором скорости невозмущенного потока и касательной к образующей тела.

Так как течение вдоль линии тока за ударной волной можно считать изоэнтропическим, то при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры

$$\psi = B\pi^a (1 - \pi^b)^{1/2}, \quad b = (\gamma - 1) / \gamma$$

$$B = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^a, \quad a = \frac{1 - \omega + \omega\gamma}{\gamma}, \quad \kappa = \frac{1}{\gamma - 1} + \omega$$



Фиг. 1

Определение величины  $\psi$  на торце по формулам (2.2) и (2.3) приводит к неверному результату, так как  $\psi = 0$  при  $x' = 0$ . На этом участке контура следует использовать другой метод нахождения  $\psi$ , например метод интегральных соотношений [7], который дает приближенную формулу

$$\psi = y / y_1 \quad (2.4)$$

пригодную как в плоском, так и в осесимметричном случаях [1]. Индексом 1 обозначаются величины в точке стыковки торца с участком двустороннего экстремума, а индексом 2 — величины в точке стыковки участка двустороннего экстремума с прямой  $y = y_2$ . Тогда функционал (2.1) с учетом соотношений (2.3) и (2.4) преобразуется к виду

$$J = \left[ \frac{y_1^{2\nu+1}}{2\nu+2} + J_3 + J_4 \right]^{1/2} - \frac{K}{\sqrt{x_3}} \left[ \frac{y_1^{\nu+1}}{\nu+1} + J_5 + J_6 \right] \quad (2.5)$$

$$J_3 = \int_{y_1}^{y_2} y^{2\nu} F dy, \quad J_4 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{y^{2\nu}}{x'} F dx, \quad F = \psi(1+x'^2)^{1/2}$$

$$J_5 = \int_{y_1}^{y_2} y^\nu \Phi dy, \quad J_6 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{y^\nu}{x'} \Phi dx, \quad \Phi = (1+x'^2)^{1/2}$$

Найдем первую вариацию функционала (2.5), учитывая, что функции  $F$  и  $\Phi$  не зависят от  $x$

$$\delta J = V_1 \Delta y_1 + V_2 \Delta y_2 + U_2 \Delta x_2 - \int_{y_1}^{y_2} W^{(1)} \delta x dy + \int_{x_2}^{x_3} W^{(2)} \delta y dx \quad (2.6)$$

$$V_1 = \frac{y_1^{2\nu}}{2J_0} \left[ \frac{2\nu+1}{2\nu+2} - \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_1^+ \right] - \frac{K}{\sqrt{x_3}} y_1^\nu \left[ 1 - \left( \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} x' \right)_1^+ \right]$$

$$V_2 = \frac{y_2^{2\nu}}{2J_0} \left[ \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_2^- - \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_2^+ \right] - \frac{K}{\sqrt{x_3}} y_2^\nu \left[ \left( \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} x' \right)_2^- - \left( \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} x' \right)_2^+ \right]$$

$$U_2 = \frac{y_2^{2\nu}}{2J_0} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^- - \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^+ \right] - \frac{K}{\sqrt{x_3}} y_2^\nu \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right)_2^- - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right)_2^+ \right]$$

$$W^{(1)} = \frac{1}{2J_0} \frac{d}{dy} \left( y^{2\nu} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{K}{\sqrt{x_3}} \frac{d}{dy} \left( y^\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right)$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{2J_0} \left\{ \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial y} (y^{2\nu} F) - \frac{d}{dx} \left[ y^{2\nu} \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right) \right] \right\} - \frac{K}{\sqrt{x_3}} \left\{ \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \Phi) - \frac{d}{dx} \left[ y^\nu \left( \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} x' \right) \right] \right\}$$

$$J_0 = [(2\nu+2)^{-1} y_1^{2\nu+1} + J_3 + J_4]^{1/2}$$

Здесь параметры слева от точки излома контура обозначены индексом «минус», справа от точки излома индексом «плюс». Варьирование контура торца в данной постановке не проводилось, что связано с областью применимости соотношения (2.4) [1].

Необходимое условие экстремума в точке 1 может быть записано в виде ( $\Delta y_1$  произвольно)

$$\frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} - \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_1^+ - K_1 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \right]_1^+ = 0$$

$$K_1 = 2KJ_0(x_3)^{-1/2} y_1^{-\nu} \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) связывает величину  $K_1$  и наклон образующей справа от точки стыковки торца с участком двустороннего экстремума  $(x')_1^+$ . Результаты расчета зависимости  $K_1$  от  $(x')_1^+$  при  $\nu = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ,  $M_\infty = \infty$  представлены на фиг. 2 для плоского и осесимметричного случаев.

В точке 2 значение  $\Delta x_2$  произвольно, поэтому необходимое условие экстремума сводится к равенству нулю коэффициента перед  $\Delta x_2$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^- - \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^+ - K_2 [x'(1+x'^2)^{-1/2} - 1]_2^- = 0$$

$$K_2 = 2KJ_0(x_3)^{-1/2} y_2^{-\nu} \quad (2.8)$$

При этом учтено, что  $(x')_2^- = \infty$ . Результаты расчета зависимости величины  $K_2$  от наклона образующей  $(x')_2^-$  в точке стыковки участка двустороннего экстремума с прямой  $y = y_3$  при  $\nu = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ,  $M_\infty = \infty$  представлены на фиг. 2.

При анализе второго и пятого слагаемых первой вариации (2.6) необходимо учитывать, что вариации  $\delta y$  и  $\Delta y_2$  не являются независимыми, так как должно выполняться условие применимости формулы Ньютона  $x' \geq 0$ . Сумма этих слагаемых преобразуется к виду

$$V_2 \Delta y_2 + \int_{x_2}^{x_3} W^{(2)} \delta y dx = - \int_{x_2}^{x_3} \left( V_2 + \int_{x_2}^x W^{(2)} dx \right) \delta y' dx$$

в чем можно убедиться интегрированием по частям правой части равенства. При допустимом варьировании контура тела на участке  $x_2 \leq x \leq x_3$  имеем  $\delta y' \geq 0$ , поэтому необходимое условие минимума функционала (2.5) выражается неравенством

$$V_2 + \int_{x_2}^x W^{(2)} dx \leq 0$$

которое должно выполняться при всех значениях  $x$ , в том числе и при  $x = x_2$ . Коэффициент  $V_2$  при выполнении необходимого условия экстремума (2.8) преобразуется следующим образом:

$$V_2 = (2J_0)^{-1} y^{2\nu} f, \quad f = \left[ F - \frac{\partial F}{\partial x'} (1+x'^2)^{1/2} \right]_2^- - [x' + (1+x'^2)^{1/2}]_2^- \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^+$$

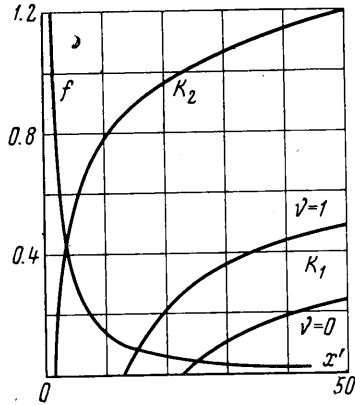
и знак этого коэффициента определяется знаком выражения  $f$ , зависящего лишь от  $(x')_2^-$  при заданных значениях  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $M_\infty$ .

При  $\nu = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ,  $M_\infty = \infty$  для всех значений  $(x')_2^-$  имеем  $f > 0$  (фиг. 2) и  $V_2 > 0$ . Следовательно, контур тела с минимальным тепловым потоком не содержит участка прямой  $y = y_3$ .

На участке двустороннего экстремума  $\delta x$  произвольно, откуда следует необходимое условие экстремума (уравнение экстремалей)

$$y^{2\nu} \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{2KJ_0}{\sqrt{x_3}} y^\nu x' \frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} = C \quad (2.9)$$

В плоском случае  $\nu = 0$ , и решением уравнения (2.9) будут прямые  $x' = \text{const}$ .



Фиг. 2

В осесимметричном случае  $\nu = 1$ , и уравнение (2.9) записывается в виде

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x'} - K_1 \frac{y}{y_1} \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1^+ - K_1 \left(\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right)_1^+ \quad (2.10)$$

причем правая часть зависит лишь от  $K_1$ , так как величины  $(x')_1^+$  и  $K_1$  связаны соотношением (2.7). Выражая  $y/y_1$  из этого квадратного уравнения через функции от  $x'$ , получим дифференциальное уравнение, решение которого находится в параметрическом виде.

Результаты расчета безразмерного теплового потока для различных плоских тел приведены на фиг. 3 при  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ,  $M_\infty = \infty$  и значениях  $K = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ . Кривая 1 соответствует затупленному клину, контур которого состоит из отрезка прямой  $x = 0$  и участка экстремали  $x' = (x')_1^+$ . Кривая 2 соответствует затупленной пластине, контур которой состоит из отрезка прямой  $x = 0$  и отрезка прямой  $y = y_3$ . Кривая 3 соответствует клину, а кривая 4 — заостренной пластине, контур которой состоит из участка экстремали  $x' = (x')_2^-$  и отрезка прямой  $y = y_3$ . Оптимальным телом, воспринимающим наименьший тепловой поток, является затупленный клин. Уменьшение теплового потока для оптимального тела, по сравнению с тепловым потоком для клина, особенно существенно при наличии излучения. Так, при  $K = 0.2$  тепловой поток для затупленного клина примерно в три раза меньше, чем для клина.

Результаты расчета безразмерного теплового потока для различных осесимметричных тел приведены на фиг. 4 при  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ,  $M_\infty = \infty$  и значениях  $K = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ . Кривая 1 соответствует затупленному телу вращения, контур которого состоит из отрезка прямой  $x = 0$  и участка криволинейной экстремали. Кривая 2 соответствует цилиндру, контур которого состоит из отрезка прямой  $x = 0$  и отрезка прямой  $y = y_3$ . Кривая 3 соответствует конусу. Оптимальным телом является затупленное тело вращения, причем тепловой поток для этого тела уменьшается примерно в три раза, по сравнению с тепловым потоком для конуса.

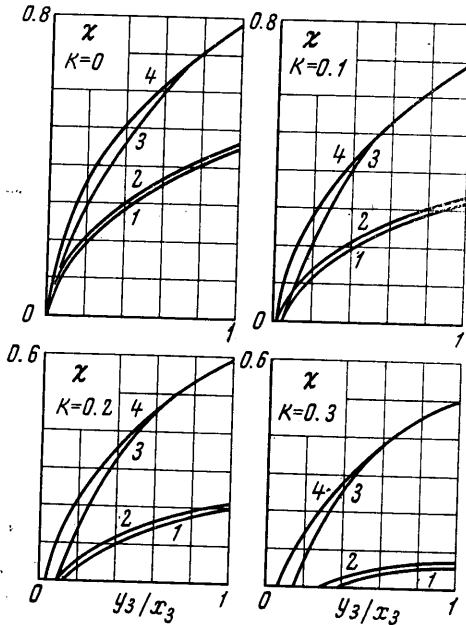
3. При обтекании теплоизолированного тела потоком газа все тепло, поступающее в тело за счет вынужденной конвекции, излучается, и  $Q = 0$ . Величина  $K$  в этом случае будет искомой, а не заданной. Соотношение для определения  $K$  может быть получено из уравнения (1.6) при  $Q = 0$

$$K = x_3^{1/2} [J_1(s_3)]^{1/2} [J_2(s_3)]^{-1} \quad (3.4)$$

При заданных параметрах набегающего потока каждому значению величины  $K$  соответствует определенное значение температуры поверхности  $T_w$ , так как

$$K = \frac{\varepsilon \sigma T_w^4 R_*^{1/2} P^{2/3}}{0.664 \rho_* u_* (h_{\infty*} - h_w)}$$

Из структуры этого соотношения следует, что минимальное значение температуры поверхности  $T_w$  достигается при минимальном значении параметра  $K$ . Если температура поверхности и высота полета заданы, то максимальная скорость соответствует минимальному значению  $K$  (фиг. 1). Поэтому для получения минимальной температуры поверхности при заданных параметрах набегающего потока или для достижения максимальной скорости полета при заданных температуре поверхности и высоте полета необходимо выбирать контур тела так, чтобы величина  $K$  была минимальной.



Фиг. 3

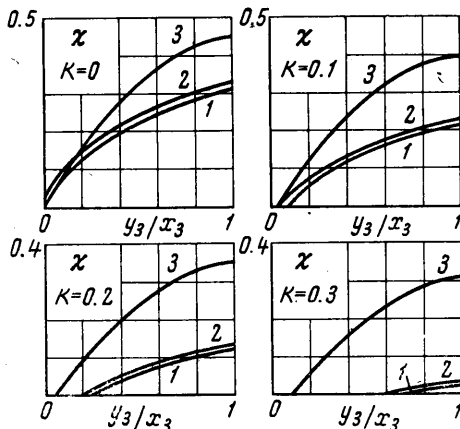
Вариационную задачу отыскания оптимальной формы тела в этом случае следует сформулировать следующим образом: среди допустимых функций  $x = x(y)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(y_3) = x_3$  найти такую, которая давала бы минимум правой части соотношения (3.1). При решении этой задачи используются те же предположения и ограничения, что и при решении задачи об определении формы излучающего тела с минимальным тепловым потоком, изложенном выше. Тогда соотношение (3.1) можно преобразовать так:

$$K = \{x_3 [(2\nu + 2)^{-1}y^{2\nu+1} + J_3 + J_4]\}^{1/2} \times [(v + 1)^{-1}y_1^{\nu+1} + J_5 + J_6]^{-1} \quad (3.2)$$

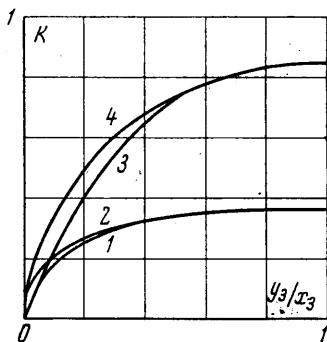
Первая вариация функционала (3.2) имеет вид

$$\delta K = K J_0^{-1} \delta J \quad (3.3)$$

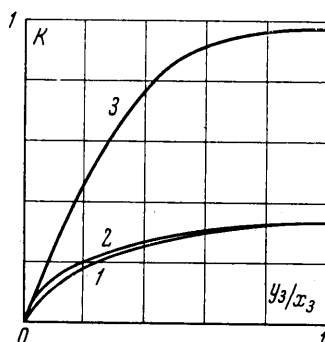
где  $\delta J$  — первая вариация функционала (2.5), определяемая формулой (2.6). Из соотношения (3.3) следует, что необходимые условия экстремума (2.7), (2.8), (2.9) для функционала (2.5) будут необходимыми условиями экстремума функционала (3.2). Остается в силе также исследование об изменении функционала при варьировании участка контура  $y = y_3$ . Единственное существенное отличие заключается в том, что величина  $K$  не является заданным параметром, а зависит от формы тела и определяется формулой (3.2). Поэтому наклон образующей в точке  $I$  для оптимального тела  $(x')_{1+}$  находится из соотношения (2.7) с учетом формулы (3.2). Для плоского случая образующая будет прямолинейной, а для осесимметричного случая уравнение образующей определяется соотношением (2.10) с учетом формулы (3.2). Каждому значению относительной толщины  $y_3/x_3$  соответствует единственный контур тела, для которого величина достигает минимального значения.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

чения. При увеличении относительной толщины тела  $y_3/x_3$  величина  $(x')_{1+}$  возрастает и при  $y_3/x_3 = (1 + \nu)(1 + 2\nu)$   $(x')_{1+} = \infty$ , т. е. оптимальное тело имеет форму затупленной пластины или затупленного цилиндра.

Результаты расчета величины  $K$  приведены на фиг. 5 для различных плоских тел (затупленного клина — 1, затупленной пластины — 2, клина — 3 и заостренной пластины — 4), а на фиг. 6 — для различных осесимметричных тел (затупленного тела вращения — 1, затупленного цилиндра — 2 и конуса — 3). Расчеты проводились при  $\nu = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ,  $M_\infty = \infty$ . В этом случае величина  $K$  в два-три раза меньше для оптимальных тел, чем для клина или конуса. Поэтому при одинаковых высоте и скорости движения температура поверхности оптимального теплоизолированного тела будет на 20—30% ниже, чем для клина или конуса. При одинаковой температуре поверхности максимальная скорость движения оптимального тела увеличивается на 20—30% по сравнению с максимальной скоростью клина или конуса.

## ЛИТЕРАТУРА

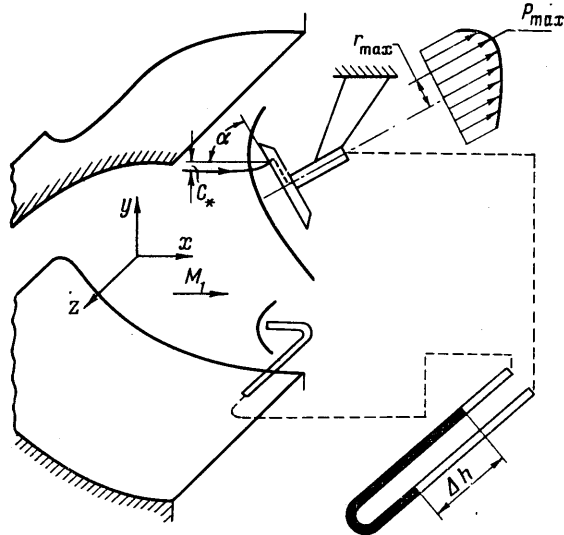
1. Белянин Н. М. Определение формы тела с минимальным тепловым потоком при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
2. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под ред. Хоурта Л., Изд. иностр. лит., 1955.
3. Masson D. Y., Gazley C. I. Surface protection and cooling systems for high speed flight. *Aeronaut. Engng. Rev.*, 1956, t. 15 (II).
4. Тир Т., Георгиев С., Аллен Р. Неравновесное излучение от фронта ударной волны. Сб. «Исследование гиперзвуковых течений». под ред. Риддела Ф. Р., Изд. иностр. лит., 1964.
5. Крайко А. Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана. ПММ, 1963, т. 28, вып. 3.
6. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
7. Черный Г. Г. Гиперзвуковое обтекание крыльев при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ЭНТРОПИИ НА КРИТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ТОКА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ

А. И. ГЛАГОЛЕВ, А. И. ЗУБКОВ

(Москва)

При обтекании осесимметричных затупленных тел сверхзвуковым потоком на нулевом угле атаки критическая линия тока пересекает отошедшую ударную волну по нормали и энтропия имеет максимум на этой линии. При изучении обтекания затупленных тел на углах атаки много внимания уделялось вопросу о том, пересекает ли критическая линия тока отошедшую ударную волну также по нормали и, следовательно, будет ли энтропия максимальной на этой критической линии (иными словами, совпадает ли при ненулевом угле атаки давление в критической точке с полным давлением за прямым скачком уплотнения или отличается от него). Заметим, что



Фиг. 1

в ряде теоретических работ, посвященных исследованию обтекания тел под углом атаки, предположение об экстремальности энтропии является весьма существенным (см., например, [1, 2]). Используя результаты работ [3, 4], для некоторых тел можно приблизительно оценить разность между давлением в критической точке  $p_{max}$  и давлением  $p_0'$  за прямым скачком уплотнения. По этим оценкам при небольших углах атаки  $\alpha$  разность  $\Delta p_{max} = p_{max} - p_0'$  составляет менее 0.5%  $p_0'$ , что находится на границе точности обычных методов эксперимента. Экспериментальное выяснение этого факта представляет довольно большие трудности и этим, по-видимому, объясняется то, что до сих пор нет экспериментального подтверждения или опровержения предположения об экстремуме энтропии на критической линии тока.

Целью данной работы было выяснение этого вопроса. Принципиально задача решается весьма просто. Необходимо измерить давление в критической точке какого-либо тела при  $\alpha \neq 0$  и полное давление за прямым скачком уплотнения с помощью насадки и сравнить эти давления между собой. Наиболее точные результаты можно получить путем дифференциального измерения. Схема такого эксперимента показана на фиг. 1. Основная часть исследований проводилась в сверхзвуковой аэродинамической трубе А-3 при числе  $M_1 = 3$  и давлении в ресивере 19 атм. Абсолютные давления измерялись на образцовых манометрах (класс точности 0.35%). Разности давлений измерялись дифференциально на наклонном U-образном спиртовом манометре с длиной трубок 4.2 м (точность отсчета показаний  $\pm 1.5$  мм, угол