

координатах. На фиг. 6 видно образование в районе контактного разрыва ($s = 0.25 g$) высокотемпературного T -слоя.

5. Как видно из фиг. 3—5, все точки, соответствующие решению системы (1.2), с конечной проводимостью, заключены между двумя предельными кривыми, отвечающими случаям $\sigma = \infty$ и $\sigma = 0$. Причем при малых напряженностях магнитного поля результаты счета оказываются близкими к случаю $\sigma = \infty$, а при напряженностях, близких к критической, к случаю $\sigma = 0$.

Характер закона $\sigma(T)$ сравнительно слабо влияет на параметры отраженной волны и, напротив, сильно — на волну преломленную.

Факт увеличения скорости фронта преломленной волны с ростом магнитного поля, отмеченной на модели $\sigma = \infty$, наблюдается также в некотором диапазоне изменения H_0 и при конечной проводимости. Это же имеет место относительно немонотонного изменения полного давления за фронтом преломленной волны с ростом H_0 .

В численных расчетах наблюдается возникновение на контактном разрыве высокотемпературного слоя газа — так называемого T -слоя. Этот эффект обязан своим происхождением существованию нелинейных связей между электро- и газодинамическими величинами и происходит вследствие преимущественного выделения джоулева тепла в некоторой области. Он был обнаружен ранее при численном исследовании на ЭВМ нестационарного взаимодействия проводящей плазмы с магнитным полем (см. [1]).

В физическом эксперименте высокотемпературный T -слой может быть обнаружен, в частности, на основе его излучательных характеристик.

Дальнейший шаг теоретического и численного анализа должен заключаться в выяснении вопроса, как повлияет учет излучения и электронной теплопроводности на динамику процессов, происходящих при взаимодействии ударной волны с магнитным полем.

В заключение авторы благодарят Н. Г. Басова, А. А. Самарского и О. Н. Крохина за постановку задачи и плодотворные обсуждения, а также Д. А. Гольдину, А. А. Иванова за проведение численных расчетов.

Поступило 30 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П., Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4, стр. 806.
2. Гребенщиков С. Е., Райзер М. Д., Рухадзе А. А., Франк А. Г. Отражение и преломление ударных волн в магнитной гидродинамике. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, стр. 529.
3. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. изд. «Мир», 1965.
4. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. Изд. иностр. лит., 1960.
5. Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Ин-т прикл. матем., 1967.

О ВЛИЯНИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛИА НА РАЗВИТИЕ ЗАКРУЧЕННОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Г. Р. АЛАВИДЗЕ (Москва)

При экспериментальном исследовании теплоотдачи от частично ионизованного газа было обнаружено, что тепловой поток на стенку при течении электропроводного газа в круглой трубе, помещенной в магнитное поле соленоида, зависит не только от величины магнитного поля, но и от его ориентации [1]: при магнитном поле, параллельном скорости, теплоотдача уменьшается на 15%, а при антипараллельном — всего на 1%, по сравнению с теплоотдачей без магнитного поля. Объяснения этого факта не было дано ни в [1], ни в последующем обсуждении [2]; более того, на основе построенных уравнений [1] оно вообще не может быть получено, так как их решение заведомо не изменится при перемене знака поля.

Ниже делается попытка объяснить указанный эффект процессами, происходящими при развитии закрученного течения анизотропно проводящей среды. Идея о возможности такого объяснения этого эффекта высказана в общем виде в обзоре [3].

Подробный расчет развития магнитогидродинамических течений ранее приводил ся только для случая поперечного магнитного поля и простейшей геометрии канала (см., например, обзор [3]).

Во всех рассматриваемых задачах компоненты электрического поля, входящие в уравнения движения, были известны с точностью до постоянных из соображения симметрии. Поэтому в предположении малости индуцированного магнитного поля эти задачи сводились просто к решению уравнения движения с линейными по скорости дополнительными членами. В данной же работе приближенно строится совместное решение системы, состоящей из уравнений движения и уравнения для электрического потенциала.

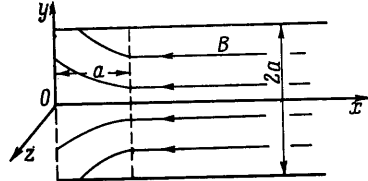
1. Уравнения стационарного движения несжимаемой электропроводной жидкости с постоянными свойствами в предположении, что магнитное число Рейнольдса R_m мало ($R_m \ll 1$), а анизотропия электропроводности проявляется только в эффекте Холла, имеет вид

$$\rho(\nabla\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_e [\mathbf{E}' + \alpha\mathbf{B} \times \mathbf{E}' + \alpha^2\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B})],$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0,$$

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{1 + \alpha^2 B^2}, \quad \alpha = \frac{\omega\tau}{|\mathbf{B}|}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$



Фиг. 1

В силу предположения о малости магнитного числа Рейнольдса магнитное поле \mathbf{B} считается заданным и равным безвихревому полю внешних источников, т. е. $\text{rot } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B} = 0$.

Вводя электрический потенциал $\varphi(x, y, z)$ равенством $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, подставляя выражение для плотности тока из (1.1.3) в (1.1.4) и пренебрегая слагаемыми порядка R_m , получим

$$\Delta\varphi + \alpha^2\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B}\nabla)\nabla\varphi + \nabla B^2 \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \nabla\varphi - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 B^2} [\nabla\varphi + \alpha\mathbf{B} \times \nabla\varphi + \alpha^3\mathbf{B} \cdot (\nabla\varphi \cdot \mathbf{B})] \right\} =$$

$$= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{V} - \alpha\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{V} + \nabla B^2 \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \mathbf{V} - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 B^2} [\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \alpha(B^2\mathbf{V} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}))] \right\} \quad (1.2)$$

Исключая плотность тока из (1.1.4), будем иметь

$$\rho(\nabla\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{V} + \sigma_e \{-\nabla\varphi \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{V} B^2 + \alpha[-B^2\nabla\varphi + \{\mathbf{V} \times \mathbf{B}\} B^2 + \mathbf{B} \cdot (\nabla\varphi \cdot \mathbf{B})]\} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) и (1.3) вместе с уравнением неразрывности (1.1.2) образуют замкнутую систему относительно \mathbf{V} , φ и p .

Рассмотрим далее задачу о течении электропроводной среды в начальном участке плоского канала с непроводящими стенками (фиг. 1). Предположим, что с точностью до членов порядка R_m магнитное поле в области $x \geq a$, $|y| \leq a$ постоянно и направлено вдоль оси x , а в области $0 \leq x \leq a$, $|y| \leq a$ оно имеет две компоненты B_x и B_y , зависящие от координат x и y . Вид магнитных силовых линий в канале схематически показан на фиг. 1. В область $x \geq 0$, $|y| \geq a$ поступает электропроводная жидкость, имеющая заданный профиль скорости в начальном сечении $x = 0$. Требуется найти распределение скорости, электрического потенциала и плотности тока в канале, считая искомые функции не зависящими от z .

Решение задачи для всей области течения представляет большие трудности и может быть осуществлено только численно при помощи ЭЦВМ. Чтобы получить приближенное аналитическое решение задачи, целесообразно разделить канал на две области ($0 \leq x \leq a$ и $x \geq a$) и рассматривать задачу для каждой из этих областей в отдельности, сшивая решение в сечении $x = a$.

Принятая модель в основном верно отражает основные особенности закрученного потока в круглой трубе, за исключением вторичного течения, возникающего под воздействием центробежных сил. Но это явление может только усилить влияние ориентации магнитного поля на гидродинамические параметры.

2. Следуя Шерклиффу [4], будем предполагать, что перестройка потока в области $0 \leq x \leq a$ происходит главным образом за счет магнитогидродинамических эффектов и неоднородности магнитного поля, а в области $x > a$ — за счет вязкости. Предположим, кроме того, что в области $0 \leq x \leq a$ параметр магнитогидродинамического взаимодействия ($N = \sigma B_0^2 a / \rho U \ll 1$) и величины $(\omega\tau^2)$, $(\alpha B_0)^2 = (\omega\tau_0)^2$ малы, где B_0 , U — характерные значения напряженности магнитного поля и скорости; в качестве U выбирается средняя по сечению скорость потока. Предположим также, что $|V_y| \ll |V_x|$ и $|V_y| \ll |V_z|$, и аппроксимируем магнитное поле в области $0 \leq x \leq a$

формулами

$$B_x = -hB_0x/a, \quad B_y = hB_0y/a, \quad B_0 > 0, \quad h = \text{sign } B_y = -\text{sign } B_x$$

Профиль скорости в сечении $x = 0$ примем в виде

$$V_x = U = \text{const}, \quad V_z = W_0y, \quad V_y = 0$$

Линеаризуя, согласно сделанным предположениям, уравнения (1.2) и (1.3) и переходя в них к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} u &= \frac{V_x}{U}, \quad v = \frac{V_y}{U}, \quad w = \frac{V_z}{U}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \\ p' &= p \frac{a^2}{\mu U}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{aUB_0}, \quad N = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U} \end{aligned} \quad (2.1)$$

получим (опуская штрихи), следующую систему для области $0 \leq x \leq a$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= f_1(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = f_2(x, y), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f_3(x, y) \\ f_1(x, y) &= -N \left\{ y + \alpha \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} (y^2 - x^2) + xy \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + hW_0(3y^3 - yx^2) \right] \right\} \\ f_2(x, y) &= N \left\{ -hy \frac{\partial \varphi}{\partial x} - hx \frac{\partial \varphi}{\partial y} - W_0y(x^2 + y^2) + \alpha hy(x^2 + y^2) \right\}, \\ f_3(x, y) &= x(\alpha - hW_0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Безразмерная плотность тока выражается при этом формулами

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y^2(\alpha - hW_0), \quad j_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + xy(\alpha - hW_0), \\ j_z &= hy + \alpha \left[hy \frac{\partial \varphi}{\partial x} + hx \frac{\partial \varphi}{\partial y} + W_0y(x^2 + y^2) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для системы (2.2) имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u = 1, \quad w = W_0y, \quad j_x = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2(\alpha - hW_0) \quad \text{при} \quad x = 0 \\ j_y = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xy(\alpha - hW_0) \quad \text{при} \quad y = \pm 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для решения задачи о развитии течения в области канала $x > a$ упростим уравнения (1.2) и (1.3) методом, подобным применяемому в обычной гидродинамике [5], а именно, будем считать выполненными неравенства

$$\left| \frac{\partial V_x}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right|, \quad |V_y| \ll |V_x|, \quad |\omega \tau V_y| \ll |V_x|$$

последнее из которых означает, что $|\omega \tau| \ll |V_x| / |V_y| \sim R$. Коэффициенты при производных в левой части уравнения (1.3) заменим их средними значениями. Переходя далее к безразмерным переменным по формулам (2.1) и опуская штрихи, получим следующую приближенную систему:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\omega \tau M_e^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - hw \right) \left(R = \frac{U_a}{\nu} \right) \\ R \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + M_e \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial y} - w \right), \quad \left(M_e = \frac{M^2}{\Omega^2} = \frac{\sigma B_0^2 a^2}{\sigma \nu \Omega^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Omega^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= h \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Omega^2 = 1 + (\omega \tau)^2$$

Безразмерная плотность тока выражается при этом формулами

$$j_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad j_y = \frac{1}{\Omega^2} \left(hw - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad j_z = \frac{\omega \tau}{\Omega^2} \left(w - h \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

Для искомого функции имеем следующие граничные условия:

$$u = v = w = 0, \quad j_y = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \quad x > 1, \quad \int_{-1}^1 u \, dy = 2$$

$$\varphi < \infty, \quad j < \infty, \quad u < \infty, \quad v < \infty, \quad w < \infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

Кроме того, необходимо задать условие сшивания решения систем (2.2) и (2.5) в сечении $x = 1$

$$(j_x)|_{x=1-0} = (j_x)|_{x=1+0}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=1-0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=1+0}, \quad (2.7)$$

$$w|_{x=1-0} = w|_{x=1+0}, \quad u|_{x=1-0} = u|_{x=1+0}$$

3. Дифференциальные уравнения (2.2), описывающие течение в области $0 \leq x \leq 1$, с граничными условиями (2.4) решаются последовательно: сначала находится электрический потенциал φ из уравнения (2.2.3), а затем из (2.2.1) и (2.2.2) — компоненты скорости u и w .

Найденные таким образом функции φ , u и w имеют вид

$$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - W_0 h)xy^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-\pi n x} + b_n e^{\pi n x}) \cos(\pi n x) \quad (3.1)$$

$$w = W_0 y + \frac{1}{2} Nxy^3 (\alpha h - W_0) + \alpha N \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [a_n (1 - e^{-\pi n x}) + b_n (1 - e^{\pi n x})] y \cos(\pi n y) + \left[\frac{a_n}{\pi n} - a_n \left(x + \frac{1}{\pi n} \right) e^{-\pi n x} - \frac{b_n}{\pi n} - b_n \left(x + \frac{1}{\pi n} \right) e^{\pi n x} \right] \sin(\pi n y) \right\} \quad (3.2)$$

$$u = 1 - \frac{1}{2} Nxy^2 - \frac{1}{6} Nx - \alpha N W_0 h \left\{ x \left(\frac{3}{8} y^4 - \frac{3}{20} \right) + x^3 \left(\frac{2}{3} y^2 - \frac{4}{9} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\eta_{1n}^{(x)} - \eta_{1n}^{(0)}) \left(-\frac{1}{\pi n} \sin(\pi n y) - \frac{1}{(\pi n)^2} \cos(\pi n y) + \pi n (x^2 + y^2) \cos(\pi n y) + \frac{6(-1)^n}{(\pi n)^2} \right) + (\eta_{2n}^{(0)} - \eta_{2n}^{(x)}) \left(2y \sin(\pi n y) + \frac{1}{\pi n} \cos(\pi n y) - \frac{4(-1)^n}{\pi n} \right) \right] \right\} \quad (3.3)$$

$$\eta_{1n}^{(x)} = a_n e^{-\pi n x} + b_n e^{\pi n x}, \quad \eta_{2n}^{(x)} = a_n (-x - 1/\pi n) e^{-\pi n x} + b_n (x - 1/\pi n) e^{\pi n x}$$

Здесь a_n , b_n — постоянные, которые подлежат определению при помощи (2.7). Приступая к решению системы (2.5) с соответствующими граничными условиями, заметим, что уравнения (2.5.3) и (2.5.4) решаются независимо от остальных. Таким образом, определяются φ и w , а затем из оставшихся уравнений — u , v , p .

Решение для φ и w , найденное методом суперпозиции экспоненциальных решений, в предположении нечетности w по y имеет вид

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n} \exp[-k_{1n}(x-1)] + c_{2n} \exp[-k_{2n}(x-1)]) \cos(\pi n y) \quad (3.4)$$

$$w(x, y) = h \sum_{n=1}^{\infty} (d_{1n} c_{1n} \exp[-k_{1n}(x-1)] + d_{2n} c_{2n} \exp[-k_{2n}(x-1)]) \sin(\pi n y) \quad (3.5)$$

$$d_{in} = \frac{\Omega^2 k_{in}^2 - (\pi n)^2}{\pi n}$$

Здесь k_{1n} и k_{2n} — положительные корни уравнения

$$k^4 \Omega^2 + k^3 R \Omega^2 - k^2 [M^2 + \pi^2 n^2 (1 + \Omega^2)] - \kappa \pi^2 n^2 R + (\pi n)^4 = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) имеет только два положительных корня, поэтому k_{1n} и k_{2n} определяются однозначно. При $\Omega = 1$ это уравнение приводится к возрастному, и его решение можно выписать в простом виде. В общем виде легко исследовать качественную картину зависимости корней этого уравнения от параметров Ω , R , M , n , а приближенные значения корней находятся при помощи численных методов.

Исключая давление из уравнения (2.5.1) и (2.5.2), получим уравнение относительно продольной скорости u

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - R \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\omega \tau M_e^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - h w \right) \quad (3.7)$$

Правая часть уравнения (3.7) — теперь известная функция координат x , y . Решение уравнения (3.7) с учетом условий (2.6) и (2.7) имеет вид

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y) \quad (3.8)$$

где u_1 — решение известной задачи о развитии течения в плоском канале при отсутствии электромагнитных сил [5]

$$u_1(x, y) = \frac{3}{2}(1 - y^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_k} - \frac{2}{\lambda_k} \right) \frac{1}{\lambda_k} \left(1 - \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{\lambda_k^2}{R}(x - 1) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\pi n x} \sin(\pi n y) \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\gamma_k} = \int_{-1}^1 u^-(y) \frac{1}{\lambda_k} \left(1 - \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k} \right) dy, \quad \beta_n = \int_{-1}^1 u^-(y) \sin(\pi n y) dy$$

Здесь λ_k — положительные корни уравнения $\lambda = \operatorname{tg} \lambda$; через $u^-(y)$ обозначен предел выражения (3.3) при $x \rightarrow 1 - 0$.

Слагаемое u_2 — решение уравнения (3.7) с нулевыми граничными условиями. Решение для функции u_2 , найденное путем разложения искомой функции и правой части уравнения (3.7) в ряд по полной ортогональной системе функции $(1 - \cos \lambda_k y / \cos \lambda_k) / \lambda_k$ имеет вид

$$u_2(x, y) = 2\omega \tau M_e^2 \sum_{\nu=1}^2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} A_{\nu\sigma} \frac{k_{\nu\sigma}}{\lambda_{\sigma}^2 - k_{\nu\sigma} R} \frac{(-1)^{\sigma}}{(\pi\sigma)^2 - \lambda_{\sigma}^2} \times \\ \times \left\{ \exp[-k_{\nu\sigma}(x - 1)] - \exp \left[-\frac{\lambda_{\sigma}}{R}(x - 1) \right] \right\} \frac{1}{\lambda_{\sigma}} \left(1 - \frac{\cos \lambda_{\sigma} y}{\cos \lambda_{\sigma}} \right) \\ A_{\nu\sigma} = (1 + h d_{\nu\sigma} / \pi\sigma) c_{\nu\sigma} \quad (\nu = 1, 2) \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что решение для продольной скорости в области $x \geq 1$ представляется суммой (3.8), причем первое слагаемое (u_1) определяется только начальным (при $x = 1$) профилем и не связано с магнитогидродинамическим взаимодействием, тогда как второе слагаемое (u_2) отражает только магнитогидродинамическое взаимодействие в рассматриваемой области канала.

В выражениях (3.2) — (3.5), (3.9) и (3.10) содержатся неизвестные a_n , b_n , c_{1n} , c_{2n} . Используя для нахождения этих неизвестных равенства (2.7) и условие $(j_x)|_{x=0} = 0$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$b_k - a_k = \frac{2(-1)^k}{(\pi k)^3} (h W_0 - \alpha) \\ \pi k b_k e^{\pi k} - \pi k a_k e^{-\pi k} + k_{1k} c_{1k} + k_{2k} c_{2k} = 2(h W_0 - \alpha) \frac{(-1)^k}{(\pi k)^3} \\ c_{1k} + c_{2k} - a_k e^{-\pi k} - b_k e^{\pi k} = (\alpha - W_0 h) \frac{4(-1)^k}{(\pi k)^3} \quad (3.11)$$

$$N \left\{ \left[e^{-\pi k} \left(1 - \frac{3}{2\pi k} \right) + \frac{3}{2\pi k} \right] a_k + \left[e^{\pi k} \left(1 - \frac{3}{2\pi k} \right) - \frac{1}{2\pi k} \right] b_k - \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} [a_n e^{-\pi n} + b_n e^{\pi n}] \frac{(-1)^{n+k} 2k}{\pi(k^2 - n^2)} + \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} (a_n + b_n) \frac{(-1)^{n} 2k}{\pi(k^2 - n^2)} \right\} + d_{1k} c_{1k} + d_{2k} c_{2k} = \left[W_0 \frac{2(-1)^k}{\pi k} + N \left(\frac{(-1)^k}{\pi k} - \frac{6(-1)^k}{(\pi k)^3} \right) \right] (W_0 h - \alpha)$$

Постоянные γ_k выражаются через a_k, b_k, c_{1k}, c_{2k} по формуле

$$\frac{1}{\gamma_k} = N \frac{2}{3\lambda_k} - N\alpha \left(\frac{25}{18\lambda_k} + \frac{6}{\lambda_k^3} \right) + N\alpha \sum_{n=1}^{\infty} [(\eta_{1n}(1) - \eta_{1n}(0))(-v_{1kn} + (\pi n)^2 v_{2kn} - v_{2kn} + v_{3kn}) + (\eta_{2n}(0) - \eta_{1n}(1)(2\pi n v_{1kn} + \pi n v_{2kn}))]$$

$$v_{1kn} = \frac{2(-1)^n}{(\pi n)^2 \lambda_k} - (-1)^n \left(\frac{4}{(\pi n)^2 - \lambda_k^2} - \frac{2}{\lambda_k((\pi n)^2 - \lambda_k^2)} \right),$$

$$v_{2kn} = - \frac{2(-1)^n}{\lambda_k [(\pi n)^2 - \lambda_k^2] \pi n}$$

$$v_{3kn} = \frac{4(-1)^n}{\lambda_k \pi n} - (-1)^n \left(4 \frac{\lambda_k^2 + 3(\pi n)^2 \lambda_k - \lambda_k [(\pi n)^2 - \lambda_k^2]^2}{[(\pi n)^2 - \lambda_k^2]^3} + 4 \frac{(\pi n)^2 + \lambda_k^2}{\lambda_k [(\pi n)^2 - \lambda_k^2]} \right) \pi n$$

4. Численный эксперимент показал, что значения a_k, b_k, c_{1k}, c_{2k} быстро убывают с ростом k , причем a_1, b_1, c_{11}, c_{21} , слабо зависят от порядка системы, определяя в то же время главные члены в решениях (3.1) — (3.5), (3.9), (3.10). Эти обстоятельства были использованы при проведении расчетов.

Основные качественные выводы из полученных результатов сводятся к следующему.

Заметим прежде всего, что если эффект Холла и закрутка потока отсутствуют ($\alpha = 0, \omega = 0, W_0 = 0$), то система (3.11) становится однородной. Но определитель этой системы, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. Следовательно, система (3.11) имеет в этом случае только тривиальное решение, т. е. $a_1 = b_1 = c_{11} = c_{21} = 0$. Из (2.3), (3.1), (3.3), (3.4), (3.9) и (3.10) тогда следует

в области $0 \leq x \leq 1$

$$\varphi = 0, \quad w = 0, \quad u = 1 - \frac{1}{2} N x y^2 + \frac{1}{6} N x$$

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = h y$$

в области $x \geq 1$

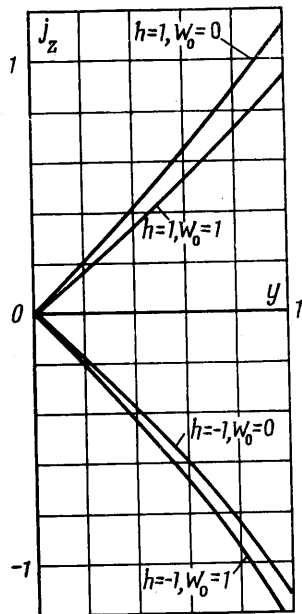
$$\varphi = w = u_2 = 0, \quad j_x = j_y = j_z = 0$$

Таким образом, при $W_0 = 0, \alpha = 0$ процесс развития течения не может зависеть от ориентации магнитного поля.

Под действием эффекта Холла ($\alpha \neq 0$) не закрученный в начальном сечении поток ($W_0 = 0$) при $x > 0$ приобретает трансверсальную скорость ($w \neq 0$) и превращается в закрученный. Причем, как следует из (3.2), величина закрутки зависит от знака магнитного поля.

Решение системы (3.11) в этом случае не зависит от ориентации магнитного поля. Из (3.3), (3.9) и (3.10) видно, что профиль продольной скорости также не зависит в этом случае от знака магнитного поля.

Рассмотрим, наконец, решение при $W_0 \neq 0, \alpha = 0$. В этом случае решение системы (3.11) зависит от знака магнитного поля, а именно, искомые постоянные изменяют знак при перемене знака поля. Но, как следует из (3.3), (3.8), (3.9) и (3.10),

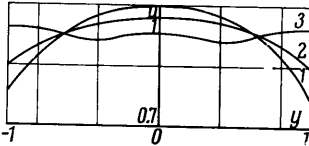


Фиг. 2

ни трансверсальная (w), ни продольная (u) скорости от ориентации магнитного поля не зависят. Зависимость продольной скорости от ориентации магнитного поля проявляется только при одновременном воздействии эффекта Холла ($\omega t \neq 0$) и закрутки потока ($W_0 \neq 0$).

Сделанные выводы подтверждаются и дополняются численными расчетами.

Обозначим через u_* скорость при развитом Пуазелевском течении. Величина $\eta = [(du/dy - du_*/dy) / (du_*/dy)]|_{y=1}$ будет характеризовать отклонение величины градиента скорости у стенки от градиента при развитом Пуазелевском течении.



Фиг. 3

При $W_0 = 0$ или $\alpha = 0$ η не зависит от ориентации магнитного поля. Вычисления проводились при $\alpha = 0.5$, $W_0 = 1$, $N = 0.3$.

На фиг. 3 показаны профили продольной скорости при различных значениях параметров h и W_0 . Кривая 1 соответствует случаю $W_0 = 1$, $h = -1$, кривая 3 — случаю $W_0 = 1$, $h = 1$. Профиль скорости при $W_0 = 0$, представленный кривой 2, не зависит от ориентации магнитного поля.

На фиг. 2 изображена z -ая компонента плотности тока j_z при различных предположениях относительно ориентации магнитного поля и начальной закрутки потока. Расчеты проводились при $\alpha = 0.5$, $N = 0.3$.

5. Следует отметить, что решение для области $x \geq 1$ строилось в разд. 3 без предположения о малости параметра Холла ωt и параметра взаимодействия N .

Поэтому, рассматривая эту задачу как самостоятельную и задавая профиль скорости и, например, условие $j_x = 0$ в сечении $x = 1$, можем найти из формул § 3 решение для области $x \geq 1$, справедливое при любых параметрах ωt , M и N . Влияние магнитного поля на профиль скорости тогда полностью определяется формулой (3.10) для u_2 . При этом u_2 меняет знак вместе с переменной знака магнитного поля. При $\alpha = \omega t = 0$ (изотропная проводимость) или при $W_0 = 0$ (незакрученный поток) величина u_2 обращается в нуль, т. е. и в данной постановке задачи зависимость основной скорости от ориентации магнитного поля обусловлена совместным влиянием анизотропии проводимости и закрученности потока на входе в канал. Функция $u_2(x, 0)$, равная нулю при $x = 1$, достигает максимума при $x \approx 0.069 R$, причем $\max |u_2(x, 0)| \approx 27\omega t W_0 M_e^2 / R$.

Величина $\max |u_2|$ имеет максимум по ωt , который достигается при $\omega t = 1$. Поскольку возможна отрицательность суммы $u_1 + u_2$, то решение допускает образование застойной зоны или даже области обратных течений в канале, но этот случай следует исключить из рассмотрения, так как тогда перестает выполняться предположение о малости v_y по сравнению с v_x и v_z .

Укажем в заключение, что построенные решения могут быть в принципе использованы далее для вычисления толщины пограничного слоя, расчета теплообмена и т. д., и, в конечном счете, для сопоставления с экспериментальными данными. Но данные работы [1] для такого сопоставления непригодны из-за неполноты и неточности; поэтому дальнейшая детализация расчетов представляется пока нецелесообразной. Однако можно считать установленным, что эффект влияния ориентации поля связан именно с магнитогидродинамическими процессами в начальном участке при одновременном наличии анизотропии проводимости и закрутки потока.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Raelson V. I., Dickerman P. I. Heat transfer from partially ionized gases in the presence of an axial magnetic field. Trans. ASME, Ser. G. J. Heat Transfer, 1962, vol. 84, No. 2, p. 169—176.
2. Roming M. The influence of electric and magnetic fields on heat transfer to electrically conducting fluids. Advances Heat transfer, N.—Y.—London, Acad. Press., 1964, vol. 1, p. 267—354.
3. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. Изд. ВИНТИ, 1966.
4. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. Изд. «Мир», 1965.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.