

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В СРЕДЕ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

П. П. ВОЛОСЕВИЧ, С. П. КУРДЮМОВ, Ю. П. ПОПОВ  
(Москва)

Рассматривается процесс взаимодействия плоской ударной волны с магнитным полем (удар о «магнитную стенку») в среде, обладающей конечной проводимостью.

В общем виде задача не может быть решена аналитически. Для ее исследования применяются численные методы. На ЭВЦМ рассчитывается полная система одномерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики с конечной проводимостью, зависящей от температуры нелинейным образом. Приводятся также результаты частных аналитических решений, полученных в упрощающих предположениях.

Обсуждается зависимость динамики процессов от величины напряженности магнитного поля и закона изменения проводимости среды с температурой.

В численных расчетах отмечено образование  $T$ -слоя, явления, возникающего при определенных условиях в нестационарных задачах магнитной гидродинамики [1].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается газодинамическая плоская ударная волна, распространяющаяся в бесконечном пространстве, заполненном покоящейся средой. Среду будем считать проводящей плазмой, для которой справедливо уравнение состояния идеального газа. Проводимость предполагается произвольной функцией температуры, причем в рассматриваемом диапазоне параметров можно пренебречь ее анизотропией.

Процессы вязкости и молекулярной теплопроводности, как показывают оценки, в данном случае также оказывают пренебрежимо малое влияние. Этого, вообще говоря, нельзя сказать о теплопередаче, обусловленной лучистым переносом и электронной теплопроводностью. Однако, в настоящей работе эти процессы не учтены. Такая постановка вызвана желанием выяснить магнито-гидродинамическую сторону, не осложненную дополнительными факторами. Кроме того, эту постановку можно расценивать как задачу о предельно сильном взаимодействии ударной волны с магнитным полем, ибо учет излучения поведет к уменьшению температуры и, следовательно, — к снижению указанного взаимодействия.

Значения температуры  $T_1$ , плотности  $\rho_1$  и скорости  $v_1$  за фронтом ударной волны связаны со значениями  $T_0$  и  $\rho_0$  на фоне соотношениями Гюгонио. Будем считать ударную волну достаточно сильной, чтобы можно было пренебречь температурой  $T_0$ , по сравнению с  $T_1$ . Тогда

$$\rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad T_1 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} D^2 R^{-1}$$

$$v_1 = \frac{D}{\gamma + 1} \quad (1.1)$$

где  $D$  — скорость фронта,  $R$  — газовая постоянная,  $\gamma$  — показатель адиабаты (все результаты легко обобщаются на случай  $T_0 \neq 0$ ).

В начальный момент волна приходит в соприкосновение с магнитным полем — происходит так называемый удар о «магнитную стенку».

Магнитные силовые линии параллельны плоскости фронта волны (фиг. 1). В силу высокой температуры, газ за фронтом обладает конечной проводимостью и поэтому начинает взаимодействовать с магнитным полем. Процесс взаимодействия описывается системой одномерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики, которая для случая плоской геометрии может быть записана в лагранжевых массовых координатах в виде

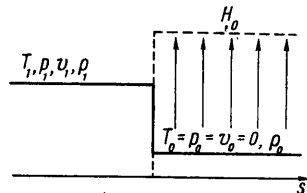
$$\frac{\partial x}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial s}, \quad G = p + \frac{H^2}{8\pi}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\rho H \frac{\partial v}{\partial s} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \rho \frac{\partial H}{\partial s} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (Gv) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H^2}{8\pi} \right) \right)$$

$$p = \rho RT, \quad \epsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T, \quad \sigma = \sigma(T)$$

Здесь  $t$  — время,  $s$  — массовая координата,  $x$  — эйлерова координата,  $p$  — статическое давление,  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $v$  — продольная компонента скорости



Фиг. 1

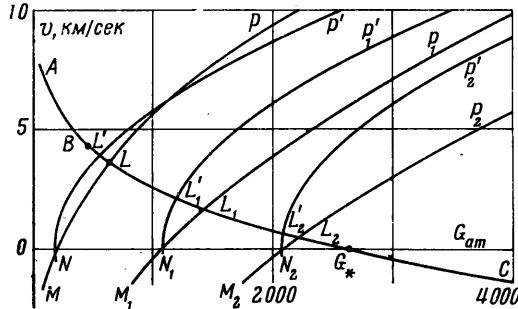
сти,  $\epsilon$  — внутренняя энергия,  $H$  — напряженность магнитного поля,  $\sigma$  — электропроводность,  $G$  — полное давление.

Постановка начальных условий ясна из фиг. 1. Вопрос о граничных условиях обсуждается ниже.

Прежде чем привести результаты численного решения системы (1.2), рассмотрим два частных случая, когда за счет специальных предположений относительно закона  $\sigma(T)$  решение задачи может быть получено в аналитическом виде. Эти решения — хорошие приближения для предельных случаев, когда преломленная волна испытывает либо незначительное, либо максимально возможное ослабление. Численное решение полной системы, в частности, позволит оценить границы применимости указанных приближений.

**2. Случай  $\sigma = \infty$ .** Предположим, что среда является идеальным проводником, т. е. во всем пространстве проводимость плазмы бесконечна ( $\sigma = \infty$ ). Тогда задача сводится к изучению распада магнитогидродинамического разрыва в случае «вмороженности», и ее решение может быть найдено простым способом<sup>1</sup>.

Заметим, что за фронтом ударной волны магнитное поле в начальный момент отсутствует. В силу «вмороженности» проникнуть сюда оно не сможет, и, следовательно, все процессы, происходящие здесь, будут чисто газодинамическими. Построим на плоскости  $v, G$  для начального состояния  $v_1, G_1 = p_1$  (точка  $B$ ) адиабату Гюгонио, соответствующую ударной волне, которая отразилась от магнитной стенки налево (см. кривую  $BC$  на фиг. 2)



Фиг. 2

$v_-(G, v_1, G_1) = v_1 -$

$$\frac{G - G_1}{\sqrt{1/2(\gamma + 1)(G - G_1) + \gamma G_1 \rho_1}} \quad G \geq G_1 \quad (2.1)$$

Здесь из-за отсутствия поля полное давление  $G$  равно статическому давлению  $p$ . Для значений  $G \leq G_1$  кривую (2.1) продолжим адиабатой Пуассона, соответствующей простым волнам разрежения (кривая  $AB$ )

$$v_-(G, v_1, G_1) = v_1 - \frac{2}{\gamma + 1} \left( \gamma \frac{G_1}{\rho_1} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{G}{G_1} \right)^{1/2(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] \quad (2.2)$$

Кривые (2.1) и (2.2) имеют в точке  $B$  общую касательную.

Движение справа от первоначального разрыва будет иметь магнитогидродинамический характер. Построим на плоскости  $vG$  адиабату Гюгонио для преломленных магнитогидродинамических ударных волн, распространяющихся по начальному фону ( $v_0 = 0, G_0 = H_0^2 / 8\pi$ ) направо (кривая  $NP$ )

$$v_+(G, v_0, G_0) = \frac{\sqrt{2/\rho_0(G - G_0)}}{\sqrt{1/2(\gamma + 3)(G - G_0) + 2G_0 + \sqrt{1/2(\gamma - 1)(G - G_0) + 2G_0}^2 + 4(2 - \gamma)G_0(G - G_0)}} \quad G \geq G_0 \quad (2.3)$$

Для  $G \leq G_0$  кривая (2.3) может быть продолжена гладким образом линией  $MN$ , отвечающей магнитогидродинамическим волнам разрежения.

Кривые (2.1), (2.2), (2.3) однозначно определяют картину распада разрыва, возникающую при ударе волны о магнитную стенку для случая «вмороженности».

В той точке, где ударная волна пришла в соприкосновение с магнитным полем, образуется контактный разрыв.

Значения полного давления и продольной компоненты скорости на нем непрерывны и равны соответственно абсциссе и ординате точки пересечения кривых  $ABC$  и  $MNP$  (точка  $L$  на фиг. 2).

Нетрудно видеть, что при любой напряженности магнитного поля отраженная волна будет ударной (точка  $L$  на фиг. 2 может лежать только на ветви  $BC$ ).

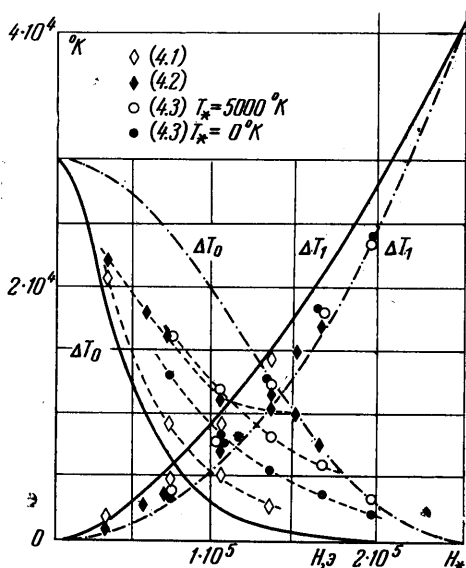
В зависимости от положения точки  $L$  на ветвях кривых  $MN$  и  $NP$  вправо от контактного разрыва распространяется ударная волна или волна разрежения. Скорости

<sup>1</sup> Подобная задача рассматривалась также в [2].

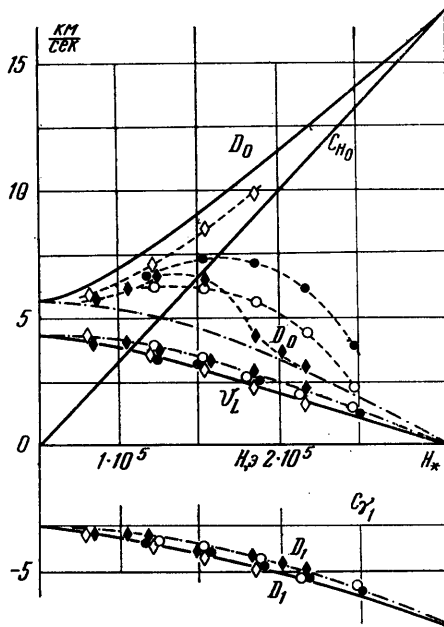
волн, а также параметры газа за фронтом можно определить из соотношений Гюгонио, зная координаты точки  $L$ . В зависимости от величины напряженности магнитного поля  $H_0$ , положение кривой  $MNP$  меняется. При малых  $H_0$  точка  $L$  лежит рядом с точкой  $B$ . В этом случае первоначальная ударная волна проходит направо почти без изменения, налево отражается слабая волна,двигающаяся относительно газа с адиабатической скоростью звука

$$c_{v1} = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$$

Из фиг. 2 видно, что существует некоторое критическое значение магнитного противодавления  $G_*$  и соответственно критическое значение напряженности поля  $H_* = \sqrt{8\pi G_*}$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

При  $H_0$ , близких к  $H_*$ , первоначальная ударная волна отражается от магнитного поля как от жесткой стенки; направо распространяется волна, скорость фронта которой относительно газа равна магнито-гидродинамической скорости звука

$$c_{H0} = \left( \gamma \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \right)^{1/2} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

При превышении критического значения поля  $H_0 > H_*$  характер распада меняется — направо распространяется волна разрежения. Значение критического поля определяется параметрами падающей волны и фоном

$$H_*^2/8\pi = \frac{2(3\gamma - 1)}{\gamma^2 - 1} D^2 \rho_0 \quad (2.4)$$

Фиг. 3–5 иллюстрируют зависимость от  $H_0$  различных параметров преломленных и отраженных волн для  $0 \leq H_0 \leq H_*$  при различных законах  $\sigma(T)$ : сплошные линии — модель  $\sigma = \infty$ , штрих-пунктирные — модель  $\sigma = 0$  (см. ниже); ромбики и кружки, соединенные пунктиром, отвечают результатам численных расчетов с законами (4.1) — (4.3). На фиг. 3 представлены амплитуды по температуре преломленных  $\Delta T_0$  и отраженных  $\Delta T_1$  волн; на фиг. 4 — скорости фронтов волн  $D_0$  и  $D_1$ , а также скорость  $v_L$  контактного разрыва; на фиг. 5 — амплитуда преломленной волны по полному давлению  $\Delta G_0$  и магнитному полю  $\Delta H_0$ .

Для преломленной волны следует отметить неожиданный, на первый взгляд, факт увеличения скорости фронта с ростом поля. Кроме того, отметим немонотонный характер изменения полного давления с ростом  $H_0$ , в то время как статическое давление  $p$  уменьшается монотонно.

3. Если проводимость среды растет с температурой достаточно быстро, как это, например, имеет место при законе «трех вторых» ( $\sigma \sim T^{3/2}$ , см. [3]), то рассмотренный выше случай  $\sigma = \infty$  может быть использован в качестве приближения при малых напряженностях поля  $H_0$ . При этом, преломленная волна ослабляется незначительно, температура, и, следовательно, проводимость за ее фронтом, остаются достаточно большими. По мере увеличения поля, это приближение теряет применимость. Кроме того, как известно, для реальных веществ закон «трех вторых» в области малых температур не выполняется, проводимость резко падает, и магнитное поле перестает взаимодействовать со средой.

Для приближенного описания этого случая предположим, что проводимость среды справа от контактного разрыва равна нулю, в то время как слева от него проводимость по-прежнему будем считать бесконечной. Тогда движение по обе стороны от контактного разрыва будет иметь чисто газодинамический характер, причем формулы (2.1) и (2.2) сохраняют силу. Для ударных волн, уходящих направо, учитывая давление, которое оказывает магнитное поле на контактный разрыв, можно записать уравнение адиабаты Гюгонио. (Кривая  $NP'$ )

$$v_+ = \left( \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_0} (G - G_0) \right)^{1/2}, \quad G \geq G_0 \quad (3.1)$$

При малых напряженностях поля результаты, полученные в обоих случаях близки.

При  $H_0 \sim H_*$  по-прежнему происходит полное отражение первоначальной волны. Однако, в отличие от случая  $\sigma = \infty$ , преломленная слабая волна распространяется относительно газа с адиабатической скоростью звука  $c_{*0} = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ , которая в предположении холодного фона  $T_0 = p_0 = 0$  равна нулю.

Как нетрудно видеть, плотность за фронтом преломленной волны не зависит от напряженности поля  $H_0$  и равна  $\rho_1$ . Изменение остальных параметров в преломленной и отраженной волнах с ростом поля от нуля до  $H_*$  носит монотонный характер.

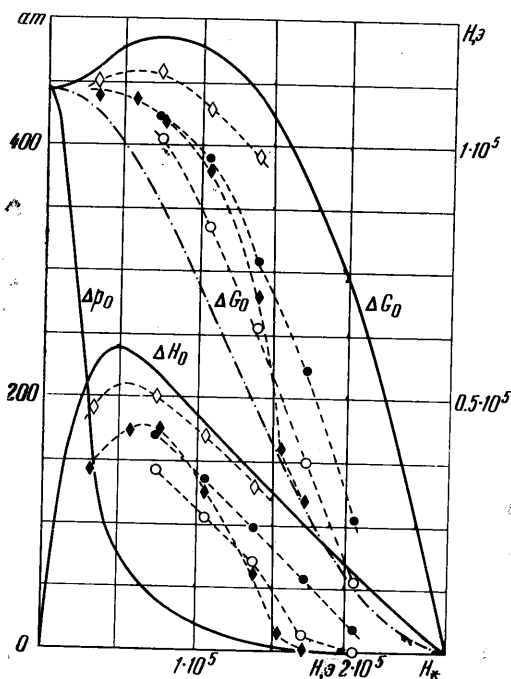
4. При произвольном законе  $\sigma(T)$  задача о взаимодействии ударной волны с магнитным полем может быть исследована только с применением численных методов. Система (1.2) решалась по неявным однородным разностным схемам методом последовательных прогонок. Для обеспечения возможности сквозного счета ударных волн в уравнение движения (1.2.1) и уравнение энергии (1.2.3) вводилась искусственная вязкость Неймана [4].

Способ вычислений, примененный в расчетах, подробно описан в [5]. Задача рассматривалась в массовых координатах между двумя границами. Левая граница — адиабатический поршень из идеального проводника, в силу чего на поверхности поршня нормальная производная поля равна нулю ( $\partial H / \partial s = 0$ ). Поршень вдвигается в газ с постоянной скоростью  $v_1$ , поддерживая бегущую перед ним ударную волну.

Правая граница — неподвижная стенка, на ней поддерживается заданное значение напряженности магнитного поля  $H_0$ , что может быть осуществлено, например, при помощи токов, текущих по стенке.

Волны, возникающие в результате распада, расходятся вправо и влево достигают границ и отражаются от них. До момента отражения влияние границ сказывается слабо, и образующаяся картина течения с достаточной точностью соответствует задаче об ударе волны о «магнитную стенку».

Расчеты проводились на примере одной и той же начальной ударной волны с параметрами: скорость фронта  $D = 5.7$  км/сек, плотность за фронтом  $\rho_1 = 7.10 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> при плотности  $\rho_0 = 1.78 \cdot 10^3$  г/см<sup>3</sup>, скорость газа за фронтом  $v_1 = 4.3$  км/сек, скорость



Фиг. 5

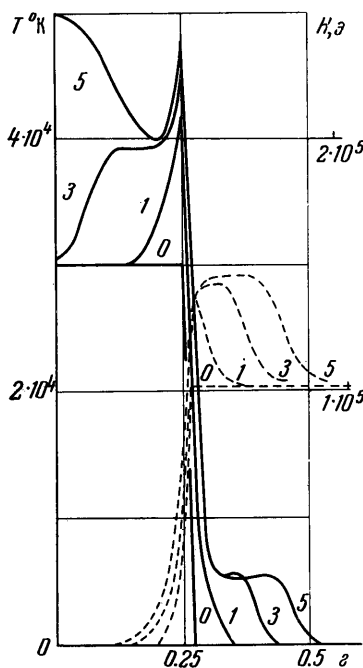
на фоне  $v_0 = 0$ , температура за фронтом  $T_1 = 30\,000^\circ\text{K}$ , температура фона  $T_0 = 0$ , рассматривался одноатомный газ ( $\gamma = 5/3$ ) с молекулярным весом  $\mu = 40$  г/моль. В этих условиях критическое поле составляет  $H_* \sim 250\,000$  э.

Были проведены серии расчетов с различными законами  $\sigma(T)$

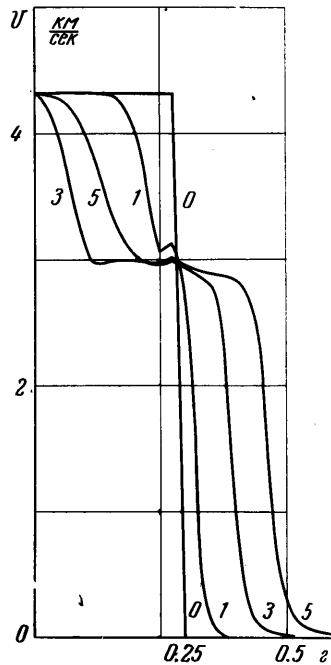
$$\sigma(T) = 159(0.0189(T^\circ\text{K} / 1000^\circ\text{K})^{3/2} + \sigma_0) \text{ мо/см} \quad (4.1)$$

$$\sigma(T) = \sigma_0 \cdot 159 \text{ мо/см при } T \leq 10\,000^\circ\text{K}, \quad \sigma(T) = 10 \cdot 159 \text{ мо/см при } T > 10\,000^\circ\text{K} \quad (4.2)$$

Зависимость (4.1) есть обычный закон «трех вторых», справедливый при больших температурах. Зависимость (4.2) носит модельный характер. Она использована



Фиг. 6



Фиг. 7

для выяснения особенностей процесса в среде, проводимость которой резко меняется с температурой. Величина  $\sigma_0$ , которая выбиралась равной  $\sigma_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ , введена в связи с трудностями расчета системы (1.2) при малых проводимостях  $\sigma$ . В последнее время разработан способ, основанный на применении к уравнению для магнитного поля (1.2.2) потокового варианта прогонки, позволяющий снять указанное ограничение.

При помощи этого способа была проведена серия расчетов, в которых закон  $\sigma(T)$  брался в виде

$$\sigma(T) = 0 \text{ при } T \leq T_*, \quad \sigma(T) = 10^3 \cdot 0.0189(T^\circ\text{K} / 1000^\circ\text{K})^{3/2} \text{ мо/см при } T > T_* \quad (4.3)$$

для значений  $T_*$ , равных  $0^\circ\text{K}$  и  $5000^\circ\text{K}$ .

Формула (4.3) эффективным образом учитывает резкое падение проводимости при малых температурах. Сравнение расчетов с законами (4.1) и (4.3) показывает, что величина  $\sigma_0$ , порождая искусственную проводимость на фоне, существенным образом влияет на результаты. Магнитное число Рейнольдса, рассчитанное по величине  $\sigma_0$  и магнито-гидродинамической скорости звука  $c_m$ , которая при отличной от нуля проводимости будет характерной скоростью на фоне, оказывается значительным ( $Re_m \sim 0.1-0.5$ ). Следствие этого — близость результатов к модели  $\sigma = \infty$ .

Результаты численных расчетов для различных законов  $\sigma(T)$  приведены на фиг. 3—5. Типичные профили различных параметров течения, полученные в результате численных расчетов, представлены на фиг. 6, 7 для напряженности поля  $H_0 \sim 100\,000$  э. На фиг. 6 представлена температура (сплошные линии) и магнитное поле (пунктирные линии) на различные моменты времени (0, 1, 3, 5). На фиг. 7 изображена скорость. Масштаб времени  $t_0 = 0.25 \cdot 10^{-4}$  сек. Графики выполнены в массовых

координатах. На фиг. 6 видно образование в районе контактного разрыва ( $s = 0.25 g$ ) высокотемпературного  $T$ -слоя.

5. Как видно из фиг. 3—5, все точки, соответствующие решению системы (1.2), с конечной проводимостью, заключены между двумя предельными кривыми, отвечающими случаям  $\sigma = \infty$  и  $\sigma = 0$ . Причем при малых напряженностях магнитного поля результаты счета оказываются близкими к случаю  $\sigma = \infty$ , а при напряженностях, близких к критической, к случаю  $\sigma = 0$ .

Характер закона  $\sigma(T)$  сравнительно слабо влияет на параметры отраженной волны и, напротив, сильно — на волну преломленную.

Факт увеличения скорости фронта преломленной волны с ростом магнитного поля, отмеченной на модели  $\sigma = \infty$ , наблюдается также в некотором диапазоне изменения  $H_0$  и при конечной проводимости. Это же имеет место относительно немонотонного изменения полного давления за фронтом преломленной волны с ростом  $H_0$ .

В численных расчетах наблюдается возникновение на контактном разрыве высокотемпературного слоя газа — так называемого  $T$ -слоя. Этот эффект обязан своим происхождением существованию нелинейных связей между электро- и газодинамическими величинами и происходит вследствие преимущественного выделения джоулева тепла в некоторой области. Он был обнаружен ранее при численном исследовании на ЭВМ нестационарного взаимодействия проводящей плазмы с магнитным полем (см. [1]).

В физическом эксперименте высокотемпературный  $T$ -слой может быть обнаружен, в частности, на основе его излучательных характеристик.

Дальнейший шаг теоретического и численного анализа должен заключаться в выяснении вопроса, как повлияет учет излучения и электронной теплопроводности на динамику процессов, происходящих при взаимодействии ударной волны с магнитным полем.

В заключение авторы благодарят Н. Г. Басова, А. А. Самарского и О. Н. Крохина за постановку задачи и плодотворные обсуждения, а также Д. А. Гольдину, А. А. Иванова за проведение численных расчетов.

Поступило 30 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П., Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4, стр. 806.
2. Гребенщиков С. Е., Райзер М. Д., Рухадзе А. А., Франк А. Г. Отражение и преломление ударных волн в магнитной гидродинамике. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, стр. 529.
3. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. изд. «Мир», 1965.
4. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. Изд. иностр. лит., 1960.
5. Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Ин-т прикл. матем., 1967.

### О ВЛИЯНИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛИА НА РАЗВИТИЕ ЗАКРУЧЕННОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Г. Р. АЛАВИДЗЕ (Москва)

При экспериментальном исследовании теплоотдачи от частично ионизованного газа было обнаружено, что тепловой поток на стенку при течении электропроводного газа в круглой трубе, помещенной в магнитное поле соленоида, зависит не только от величины магнитного поля, но и от его ориентации [1]: при магнитном поле, параллельном скорости, теплоотдача уменьшается на 15%, а при антипараллельном — всего на 1%, по сравнению с теплоотдачей без магнитного поля. Объяснения этого факта не было дано ни в [1], ни в последующем обсуждении [2]; более того, на основе построенных уравнений [1] оно вообще не может быть получено, так как их решение заведомо не изменится при перемене знака поля.

Ниже делается попытка объяснить указанный эффект процессами, происходящими при развитии закрученного течения анизотропно проводящей среды. Идея о возможности такого объяснения этого эффекта высказана в общем виде в обзоре [3].