ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ

А. Н. АНТОНОВ, Е. Н. БОНДАРЕВ

(Москва)

Предложен однопараметрический интегральный метод расчета турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления, позволяющий рассчитывать трение, тепловой поток и толщину слоя как перед точкой отрыва, так и в некоторой области за точкой отрыва.

Обозначения

u — скорость,
ρ — плотность,
δ^* — толщина вытеснения,
δ^{**} — толщина потери импульса,
θ — толщина потери энергии,
M — число Маха,
r — радиус,
μ — динамическая вязкость,
c_p — теплоемкость при постоянном давлении,
R_{δ_0} — число Рейнольдса, рассчитанное по толщине пограничного слоя начального сечения,
P — число Прандтля,
p_1 — статическое давление в точке начала взаимодействия,
p_2 — статическое давление на «плато» давлений,
p_0 — давление торможения, T_0 — температура торможения,
I — энтальпия,
T_e — температура восстановления,
$T_w{}^0$ — температурный фактор,
H — формпараметр,
r_1 — коэффициент восстановления.

$$T_w{}^0 = \frac{T_w}{T_e}, \qquad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}, \qquad \Gamma = \frac{\delta^*}{\rho_1 u_1^2}\frac{dp}{dx}$$

Индексы: 0 — начальное сечение пограничного слоя, 1 — параметры берутся на границе пограничного слоя, w — параметры взяты при температуре стенки, $*$ — параметры относятся к течению на плоской пластине при $\Gamma = 0$, штрих означает дифференцирование по x.

Как и в методе В. С. Авдуевского [1], используются экспериментальные зависимости для коэффициента трения, числа Стантона и формпараметра H от чисел Маха M, Рейнольдса R, температурного фактора $T_w{}^0$ и т. д., но в отличие от работы [1], принято, что функция D, пропорциональная трению, функция F, пропорциональная тепловому потоку, и формпараметр H зависят от параметра градиента давления Γ, а зависимости $D(\Gamma)$, $F(\Gamma)$ и $H(\Gamma)$ определяются путем обработки экспериментальных данных. Метод позволяет относительно просто провести расчет течения в области взаимодействия турбулентного пограничного слоя со скачками уплотнения, аналогично расчету взаимодействия с ламинарным слоем, предложенному в работе [2].

1. Запишем интегральные уравнения движения и энергии для осесимметричного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе в следующем виде:

$$\frac{dY}{dx} + a_1 Y H^0 = b_1 D^0 \qquad \frac{dZ}{dx} = E F^0 \qquad \left(H^0 = \frac{H}{H^*},\; D^0 = \frac{D}{D^*},\; F^0 = \frac{F}{D^*}\right) \tag{1.1}$$

Следуя методу работы [1], запишем

$$Y = (r\varphi_1 u_1^2 \delta^{**})^{5/4}, \qquad Z = r\rho_1 u_1 (I_0 - I_w)\delta^{**}\beta$$

$$a_1 = \frac{5}{4} H^* \frac{u_1'}{u_1}, \qquad b_1 = \frac{5}{4} r^{5/4} \rho_w \mu^{1/4} u_1^{9/4} D^*$$

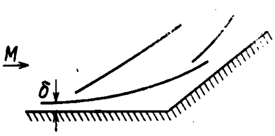
$$H^* = \frac{9}{7}\left[\frac{T_w}{T_0}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right] + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$D^* = 0.0129 (T_w{}^0)^{0.49} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} r_1 M^2\right)^{0.137}$$

$$E = r D^* P^{-27/40} \left(\frac{I_e - I_w}{I_0 - I_w}\right)^{1/8} \beta^{1/8} R_\theta^{-1/4} g \rho_w u_1 (I_e - I_w)$$

$$\beta = \theta / \delta^{**}, \qquad r_1 = 0.89$$

2. Рассмотрим течение в области взаимодействия турбулентного слоя со скачками уплотнения при температурном факторе $T_w{}^0$ близком к единице и будем считать, что толщины теплового и динамического слоев приблизительно одинаковы (фиг. 1). Под воздействием скачка уплотнения возмущение давления передается вверх по потоку по пограничному слою и распределение давления на стенке становится достаточно плавным. Пограничный слой не может выдержать больших градиентов давления и при некотором значении Г происходит отрыв пограничного слоя. В области отрывного течения устанавливается плато давления и значения Г уменьшаются. Допустим, что отрыв происходит в точке максимального значения $\Gamma = \Gamma_M$ на поверхности тела (эксперименты для почти теплоизолированной поверхности подтверждают это предположение). Введем обозначение $\Gamma^0 = \Gamma / \Gamma_M$ и попытаемся определить вид функций H^0, D^0, F^0 от Γ^0. Предположим, что эти функции зависят от чисел M, R, γ, P, $T_w{}^0$ так же, как и при $\Gamma = 0$. Для определения $D^0(\Gamma^0)$ использовались экспериментальные данные работы [3], в которой приведены профили скорости в области положительных градиентов давления для сжимаемого турбулентного пограничного слоя. Построенная зависимость $D^0(\Gamma^0)$ приведена на фиг. 2.

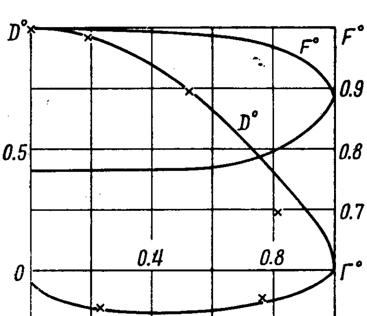


Фиг. 1

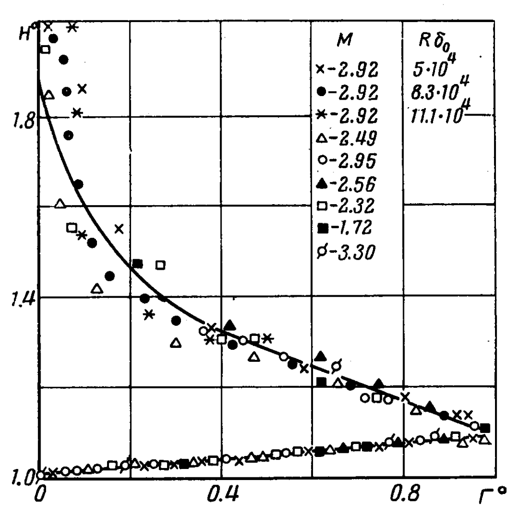
Далее предположим, что распределение давления в области взаимодействия определяется распределением толщины вытеснения δ^* и приближенно описывается уравнением для течения Прандтля — Майера

$$\frac{d^2\delta^*}{dx^2} = \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma p M^2} \frac{dp}{dx} \tag{2.1}$$

Чтобы определить $H^0(\Gamma^0)$, надо совместно решить систему уравнений (1.1), (2.1). Для этого надо знать распределение давления по области взаимодействия и величины $\delta_0{}^*$, $\delta_0{}^{**}$, $(d\delta^* / dx)_0$, M_0 в начальном сечении x_0. Все эти величины брались из экспериментальных работ [3, 4]. Далее после решения шаг за шагом по x системы уравнений (1.1 — 2.1) и вычисления на каждом шаге H^0 и Γ^0 были построены зависимости $H^0(\Gamma^0)$, представленные на фиг. 3 для различных значений M_0 и R_{δ_0}. Зависимость $H^0(\Gamma^0)$ для присоединенного пограничного слоя можно аппроксимировать прямой $H^0 = 1 + 0.1\ \Gamma^0$



Фиг. 2



Фиг. 3

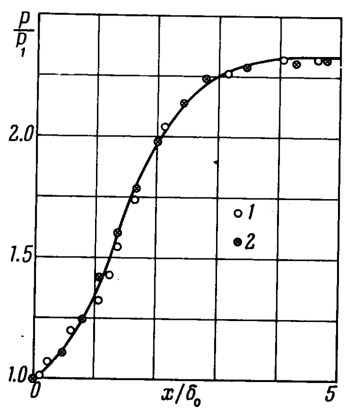
в исследованном диапазоне чисел M_0 от 2 до 3.3 и R_{δ_0} от $3 \cdot 10^4$ до $11 \cdot 10^4$. По данным Г. М. Бам-Зеликовича [7], в точке отрыва $\Gamma_M = 0.015$ для несжимаемого течения. В данной работе для области взаимодействия турбулентного пограничного слоя со скачками уплотнения в диапазоне чисел M от 2 до 3.3 значение Γ_M было равно примерно 0.023. Для расчета функции $F^0(\Gamma^0)$ решалось второе уравнение системы (1.1), причем значение θ_0 задавалось по экспериментальным данным, а величина F^0 на каждом шаге подбиралась так, чтобы вычисленное значение теплового потока q_w совпадало с экспериментально измеренным. На фиг. 2 приведены зависимости H^0 и F^0 от Γ^0 для области течения турбулентного пограничного слоя как до точки отрыва, так и после нее.

Следует отметить, что по форме зависимости H^0, F^0 и D^0 от Γ^0 очень похожи на аналогичные зависимости для ламинарного слоя, которые можно рассчитать, воспользовавшись результатами работ [5, 6] как для безотрывного течения, так и для отрывного.

3. Теперь можно решить обратную задачу и рассчитать течение в области взаимодействия турбулентного пограничного слоя и проверить степень чувствительности рассчитанных значений давления, теплового потока, трения, толщины к погрешностям экспериментально определенных зависимостей H^0, F^0 и D^0 от Γ^0. Рассчитывался только участок течения от начала взаимодействия до области «плато» давления. Для решения этой задачи использовалась следующая система уравнений:

$$\frac{d\delta^*}{dx} = \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dp}{dx}\,\frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho_1 u_1^2}, \qquad \frac{dZ}{dx} = EF^0$$

$$\frac{dp}{dx} = \Gamma\frac{\rho_1 u_1^2}{\delta^*} \qquad \frac{dY}{dx} + a_1 H^0 Y = b_1 D^0 \qquad (3.1)$$



Фиг. 4

В отличие от метода расчета в работе [2] для ламинарного слоя, в систему уравнений для расчета течения в области взаимодействия явно включено уравнение $dp / dx = \Gamma\rho_1 u_1^2 / \delta^*$, что позволяет избавиться от итераций и сильно упрощает вычисления. Замыкают систему уравнений зависимости H^0, F^0 и D^0 от Γ^0. Предполагается, что перед областью взаимодействия турбулентный слой развивается на пластине ($H^0 = F^0 = D^0 = 1$, $\Gamma^0 = 0$) и в начальном сечении x_0 известны δ_0^*, δ_0^{**}, M_0, p_0. Кроме того, считается известным «критическое» отношение давления в области «плато» к давлению в начале зоны отрыва p_2 / p_1. Тогда решив пристрелкой краевую задачу для системы уравнений (3.1), можно найти величину φ_0. На фиг. 4 приведен пример расчета распределения давления в зоне отрыва для $M_0 = 2.95$. Здесь 1 — эксперимент работы [4], 2 — расчет, выполненный по методу данной работы. Результаты расчетов показывают, что в исследованном диапазоне чисел M и R_{δ_0} функции $H^0(\Gamma^0)$, $F^0(\Gamma^0)$ и $D^0(\Gamma^0)$ с достаточной точностью универсальны и могут быть использованы для расчетов течений турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления.

Поступило 12 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдуевский В. С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 4.
2. Бондарев Е. Н. Приближенный расчет взаимодействия сверхзвукового потока с ламинарным слоем в области отрывного течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
3. Богдонов, Кеплер. Отрыв турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Вопросы ракетной техники, 1956, № 6.
4. Kuehn D. M. Turbulent boundary — layer Separation induced by flares on cylinders at zero angle of attact NASA Techn Rep. R-117, 1961.
5. Cohen C. B., Rechotko E. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NASA Rep., 1293, 1956.
6. Stewartson K. Further solutions of the Folkner — Skan Equation Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc. vol. 50, p. 3, July, 1954.
7. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.