

ЛИТЕРАТУРА

1. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, 155, № 6.
2. Щенников В. В. Расчет ламинарного пограничного слоя у сублимирующей поверхности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
3. Анфимов Н. А. Горение графита в потоке воздуха при высоких температурах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
4. Лапин Ю. В. Турбулентный теплообмен на пластине при наличии сублимации и пористом подводе различных газов. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 5.
5. Denison M. R. The turbulent boundary layer on chemically active ablating surface. JAS, 1961, vol. 28, No. 6. (русск. перев., ВРТ, 1962, № 1).
6. Совершенный В. Д. Турбулентный пограничный слой на проницаемой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
7. Merk H. J. The macroscopic equations for simultaneous heat and mass transfer in isotropic, continuous and closed systems. Appl. Sci. Res. A., 1958, vol. 8, No. 1.
8. Совершенный В. Д. Течение многокомпонентного газа между параллельными проницаемыми плоскостями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, 1953.
10. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
11. Mann V. Cas u. Wasserfach Ing. 1930, B. 73, S. 570.
12. Bartlett E. P., Denison M. R. Experimental ablation rates in a turbulent boundary layer. J. of Heat Transfer, 1961, vol. 83, s. C. No. 4.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВИБРАЦИОННЫХ СИЛ

С. М. ЗЕНЬКОВСКАЯ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается конвекция в поле силы тяжести в жидкости, заключенной в сосуде, вибрирующем вдоль вертикальной оси по закону $a/\omega \sin \omega t$ ($\omega \rightarrow \infty$).

В [1] выведены осредненные по времени уравнения конвекции, описывающие основное движение в первом приближении. Кроме того, в [1] введены критерии, определяющие начало конвекции в этом случае, и рассмотрена модельная задача: случай пространственнопериодических возмущений. Получено, что в этом случае вибрации высокой частоты стабилизируют состояние относительно покоя.

В данной работе рассматривается конвекция в слое жидкости между двумя горизонтальными плоскостями, уравнения которых $z = \pm l/2$.

На нижней и верхней плоскостях задана температура T_1 и T_2 соответственно. Доказано (разд. 1), что при малых значениях вибрационного критерия выполняется принцип изменения устойчивости. В этом случае имеет место вариационный принцип (разд. 2), из которого следует, что вибрации высокой частоты препятствуют возникновению конвекции в горизонтальном слое жидкости. С помощью вариационного принципа произведен расчет зависимости значений критерия Рэлея от вибрационного критерия.

1. О принципе изменения устойчивости. Осредненные уравнения конвекции имеют вид [1]:

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{P} (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' = -P \nabla q' + \Delta \mathbf{v}' + j \lambda T'' + j \mu (\mathbf{w}' \cdot \nabla T'') - \mu (\mathbf{w}' \cdot \nabla) \mathbf{w}'$$

$$\left(P = \frac{\nu}{\chi}, \quad \lambda = \frac{(T_1 - T_2) \beta g l^3}{\gamma \nu}, \quad \mu = \frac{(T_1 - T_2)^2 \beta^2 a^2 l^2}{2 \chi \nu} \right)$$

$$\frac{\partial T''}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla T'' = \Delta T'', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0, \quad \mathbf{w}' = \Pi (j T''), \quad \text{div } \mathbf{w}' = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v}'(x, t)$ — относительная скорость движения жидкости, $T''(x, t)$ — температура, $q'(x, t)$ — давление, P — число Прандтля, λ — число Рэлея, μ — вибрационный критерий. Π — оператор ортогонального проектирования в L_2 на подпространство соленоидальных векторов [2]; j — единичный вектор вертикальной оси, направленный вверх.

Известно, что конвекция начинается при потере устойчивости состояния относительно покоя. Для исследования устойчивости относительно бесконечно малых возмущений применяется метод линеаризации. Тогда для возмущений получается

следующая задача:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{\partial v}{\partial t} &= -P\nabla q + \Delta v + j\lambda T - j\mu (w \cdot j) \\ \partial T / \partial t &= jv + \Delta T, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{div} w = 0, \quad w = \Pi(jT) \\ v = T = wn &= 0, \quad \text{при } z = \pm 1/2 \\ &(\mathbf{n} - \text{внешняя нормаль}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

В системе (1.2) исключим функции v , q , T , а функцию wj будем искать в виде $e^{P\sigma t + i(\beta x + \gamma y)}\varphi(z)$, тогда получим уравнение

$$P\sigma^2 L^2 \varphi - \sigma(P+1)L^3 \varphi + L^4 \varphi + \lambda \alpha^2 L \varphi + \mu \alpha^4 \varphi = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\varphi = L\varphi = L^2 \varphi = DL^2 \varphi - P\sigma DL\varphi = 0 \quad \text{при } z = \pm 1/2 \quad (1.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad D = \frac{\partial}{\partial z}, \quad L = \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2.$$

Состояние относительного покоя неустойчиво, если среди всех собственных значений σ есть хотя бы одно с положительной вещественной частью. Поэтому момент наступления неустойчивости определяется появлением σ , у которого $\operatorname{Re} \sigma = 0$. В отсутствие вибрации ($\mu = 0$) доказано [3], что выполняется принцип изменения устойчивости: если $\operatorname{Re} \sigma = 0$, то $\operatorname{Im} \sigma = 0$. При наличии вибрации этого доказать не удастся для всех значений μ .

Покажем, что этот принцип выполняется при малых значениях μ . Для этого умножим обе части уравнения (1.3) на функцию $L^2 \varphi - P\sigma L\varphi$, проинтегрируем по $[-1/2, 1/2]$, учитывая граничные условия (1.4); в полученном равенстве разделим вещественную и мнимую части, полагая $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. Получим два уравнения для σ_r и σ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_i \left\{ 2P\sigma_r \int_{-1/2}^{1/2} |L^2 \varphi|^2 dz + P^2 |\sigma|^2 \int_{-1/2}^{1/2} (|DL\varphi|^2 + \alpha^2 |L\varphi|^2) dz + \int_{-1/2}^{1/2} (|DL^2 \varphi|^2 + \alpha^2 |L^2 \varphi|^2) dz + \right. \\ \left. + \lambda \alpha^2 P \int_{-1/2}^{1/2} |L\varphi|^2 dz - \mu \alpha^4 P \int_{-1/2}^{1/2} (|D\varphi|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dz \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} P^2 \sigma_r^3 \int_{-1/2}^{1/2} (|DL\varphi|^2 + \alpha^2 |L\varphi|^2) dz + \sigma_r^2 P(P+2) \int_{-1/2}^{1/2} |L^2 \varphi|^2 dz + \\ + \sigma_r \left\{ P^2 \sigma_i^2 \int_{-1/2}^{1/2} (|DL\varphi|^2 + \alpha^2 |L\varphi|^2) dz + (2P+1) \int_{-1/2}^{1/2} (|DL^2 \varphi|^2 + \alpha^2 |L^2 \varphi|^2) dz - \right. \\ \left. - \lambda \alpha^2 P \int_{-1/2}^{1/2} |L\varphi|^2 dz + \mu \alpha^4 P \int_{-1/2}^{1/2} (|D\varphi|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dz \right\} + \sigma_i^2 P^2 \int_{-1/2}^{1/2} |L^2 \varphi|^2 dz + \\ + \int_{-1/2}^{1/2} |L^3 \varphi|^2 dz - \lambda \alpha^2 \int_{-1/2}^{1/2} (|DL\varphi|^2 + \alpha^2 |L\varphi|^2) dz + \mu \alpha^4 \int_{-1/2}^{1/2} |L\varphi|^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из последнего уравнения следует, что при значениях $\lambda \leq 0$ имеет место устойчивость ($\sigma_r < 0$). Далее рассматриваем случай $\lambda > 0$. В уравнении (1.5) положим $\sigma_r = 0$ и введем обозначения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} (|DL\varphi|^2 + \alpha^2 |L\varphi|^2) dz, \quad I_2 = \int_{-1/2}^{1/2} (|D\varphi|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dz, \\ I_3 &= \int_{-1/2}^{1/2} (|DL^2 \varphi|^2 + \alpha^2 |L^2 \varphi|^2 + \lambda \alpha^2 P |L\varphi|^2) dz \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$\sigma_i \{P^2 \sigma_i^2 I_1 - \mu I_2 + I_3\} = 0$$

Отсюда видно, что $\sigma_i = 0$ при всех значениях μ , удовлетворяющих неравенству

$$I_3 - \mu I_2 \geq 0 \tag{1.7}$$

Нетрудно получить оценку, где постоянная

$$I_3 \geq C I_2, \quad C = \lambda \left(1 + \frac{C_1}{\alpha^2} \right) + \frac{Q_4(\alpha^2)}{P \alpha^4}$$

Здесь C_1 положительная константа, $Q_4(\alpha^2)$ — полином четвертой степени относительно α^2 с положительными коэффициентами. Тогда при всех значениях $\mu \leq C$ выполняется принцип изменения устойчивости.

Заметим, что область значений параметра μ , гарантированных этой оценкой, расширяется с ростом параметра λ .

Далее в уравнении (1.3) и в граничных условиях (1.4) полагаем $\sigma = 0$ и будем интересоваться, при каких значениях параметра λ происходит потеря устойчивости, и как эти значения зависят от параметра μ . Для определения критических значений λ получим следующую задачу на собственные значения:

$$L^4 \varphi + \lambda \alpha^2 L \varphi + \mu \alpha^4 \varphi = 0 \tag{1.8}$$

$$\varphi = L \varphi = L^2 \varphi = DL^2 \varphi = 0 \text{ при } z = \pm 1/2 \tag{1.9}$$

2. Вариационный принцип. Нетрудно убедиться, что уравнение (1.8) является уравнением Эйлера вариационной задачи

$$J_1(\varphi) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} (L^3 \varphi)^2 dz + \mu \alpha^4 \int_{-1/2}^{1/2} (L \varphi)^2 dz = \min$$

$$J_2(\varphi) \equiv \alpha^2 \int_{-1/2}^{1/2} [(DL \varphi)^2 + \alpha^2 (L \varphi)^2] dz = 1$$

Значит, первое собственное число $\lambda = \lambda_*$ задачи (1.8) — (1.9) есть минимум функционала J_1 при условии $J_2 = 1$, причем минимум ищется на функциях, удовлетворяющих условиям (1.9). Из этого вариационного принципа можно сделать вывод о характере влияния вибрационного критерия μ : критические значения параметра λ возрастают с ростом параметра μ . Следовательно, вибрационные силы высокой частоты препятствуют возникновению конвекции в слое жидкости¹.

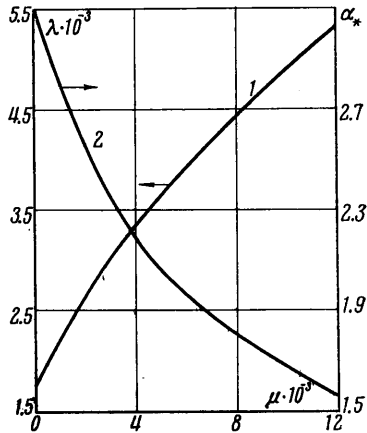
Далее производится расчет зависимости значений λ_* от параметра μ . Находится условный минимум функционала J_1 на четных функциях, удовлетворяющих условиям (1.9).

В случае отсутствия вибрации ($\mu = 0$) это оправдано [4], так как из осциллируемости оператора соответствующего интегрального уравнения следует, что первое собственное число задачи (1.8) — (1.9) простое и соответствующая ему собственная функция положительна. Из теории возмущений следует, что при малых значениях $\mu > 0$ эти свойства сохраняются. Будем решать вариационную задачу (2.1) методом Рунца. В качестве координатных функций возьмем функции $\varphi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots$), являющиеся решениями задачи

$$L^2 \varphi_k = \cos^2 \pi z \cos 2k\pi z, \quad \varphi_k = D^2 \varphi_k = 0 \text{ при } z = 1/2 \tag{2.2}$$

Ограничимся первым приближением, тогда

$$\varphi(z) = A \left\{ M \alpha \operatorname{ch} \alpha z + N \alpha^2 z \operatorname{sh} \alpha z + \frac{A_1 + 2}{4 \alpha^4} + \frac{A_1 + 1}{2(4\pi^2 + \alpha^2)} \cos 2\pi z + \frac{A_1 \cos 4\pi z}{4(16\pi^2 + \alpha^2)^2} \right\}$$



¹ Этот вывод справедлив в случае, когда выполняется принцип изменения устойчивости.

Здесь постоянные M, N определяются из первых двух граничных условий (1.9). Подставляя функцию $\varphi(z)$ в функционалы J_1, J_2 , получим для параметра λ выражение

$$\lambda(\mu, \alpha, A_1) = \frac{(f + \mu f_1) + (g + \mu g_1)A_1 + (h + \mu h_1)A_1^2}{l + mA_1 + nA_1^2}$$

Здесь коэффициенты $f, f_1, g, g_1, h, h_1, l, m, n$ есть функции от числа α . Вычисляем критические числа $\lambda_*(\mu) = \min_{A_1, \alpha} \lambda(\mu, \alpha, A_1)$ приближенно: сначала найдем минимум по A_1 из условия $\partial \lambda / \partial A_1 = 0$, затем численно минимум по α . Давая различные значения параметру μ , получим зависимости $\lambda_*(\mu)$ и $\alpha_*(\mu)$, где α_* есть значение числа α , при котором $\lambda(\alpha) = \lambda_*$ при фиксированном μ .

В результате вычислений, проведенных на электронной вычислительной машине «Урал», получены зависимости $\lambda_*(\mu)$ и $\alpha_*(\mu)$ для значений μ в промежутке от 0 до 12000. Графики этих зависимостей изображены на фигуре. Результат проведенных вычислений при $\mu = 0$ сравним с соответствующими значениями в [3].

В данной работе получено $\lambda_*(0) = 1731$ и достигается при $\alpha_* = 3.11$, в то время как в работе Пеллю и Саусвелла [3] точное значение $\lambda_*(0) = 1708.3$ и достигается при $\alpha_* = 3.13$. Следовательно, погрешность не превышает 1.4%.

Кривая 1 показывает, что $\lambda_*(\mu)$ возрастает, но постепенно рост его замедляется. Из кривой 2 следует, что значения $\alpha_*(\mu)$ уменьшаются с ростом μ . В связи с этим можно заметить, что если после потери устойчивости возникает новое течение, которое при $\mu = 0$ имеет шестиугольную структуру [3, 4], то при малых $\mu > 0$ эта структура сохранится, но размеры шестиугольников будут больше, так как сторона d шестиугольника определяется [3] из уравнения $d\alpha_*/l = 4\pi/3$.

Автор благодарит И. Б. Симоненко и В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

Поступило 12 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
3. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1940, vol. 176.
4. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, № 6.

К ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФфуЗИИ НА РАСТУЩУЮ КАПЛЮ

К. ГОЛУБ, В. С. КРЫЛОВ

(Прага, Москва)

В рамках модели медленного вытекания капли вязкой жидкости из бесконечно тонкого капилляра во внешнюю среду найдено распределение скоростей в жидкости вне и внутри капли с учетом как радиального, так и тангенциального движения поверхности раздела. С помощью этого распределения решена задача о конвективной диффузии растворенного вещества из внешней жидкости к поверхности капли.

Задача о диффузионном потоке растворенного вещества к поверхности капли, вытекающей из тонкого капилляра во внешнюю среду (чистую жидкость или раствор), имеет непосредственное отношение к теории полярографического метода, широко применяемого в электрохимии, а также к теории концевой эффeкта в процессах жидкостной экстракции. Эксперименты показывают, что в процессе формирования капель в массообменном аппарате массопередача происходит значительно более интенсивно, чем в процессе последующего движения капель по аппарату. По этой причине весьма важно знать, какой вклад от общего количества переданного вещества приходится на начальную стадию массопередачи. Нестационарная гидродинамическая картина вытекания обуславливает существенно нестационарный характер процесса массопереноса к поверхности растущей капли и лимитирует скорость этого процесса. Полярографическими исследованиями установлено, что на практике очень часто реализуется режим вытекания, характеризуемый почти полным отсутствием тангенциального движения поверхности капель [1-4]. При описании этого режима исходят из предположения о чисто радиальном характере расширения капли [5], что позволяет получить очень простое выражение для распределения скорости жидкости во внешней среде. Однако в целом ряде случаев существенную роль играет тангенциальное движение. Известно, в частности, что оно является причиной возникно-