

## МНОГОКОМПОНЕНТНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Д. СОВЕРШЕННЫЙ

(Москва)

При обтекании газовой смесью химически активных поверхностей в пограничном слое, формирующемся на обтекаемом теле, может содержаться большое количество компонент с различными диффузионными свойствами. Отсюда возникает необходимость изучения диффузии компонент в многокомпонентном пограничном слое.

Использование концепции «бинарного» пограничного слоя в общем случае не может давать удовлетворительных результатов, поскольку замена коэффициентов взаимной диффузии  $D_{ij}$  различных пар компонент одним коэффициентом диффузии  $D$  во многих случаях оказывается грубым приближением.

В общем случае число различных коэффициентов диффузии равно  $N(N-1)/2$  ( $N$  — число компонент). Обычно удается выделить группы компонент с близкими молекулярными весами. Тогда без большой ошибки число различных коэффициентов диффузии может быть уменьшено. Однако даже в сравнительно простом случае, когда удается все компоненты разделить на две группы с близкими молекулярными весами, приходится учитывать три различных коэффициента диффузии (по одному коэффициенту диффузии в каждой группе, а также коэффициент диффузии компонент одной группы относительно компонент другой группы). Лишь в частных случаях, когда газовая смесь состоит только из двух компонент с произвольными молекулярными весами, или если все компоненты газовой смеси имеют близкие молекулярные веса, можно обоснованно ввести один коэффициент диффузии (если при этом не делать ограничения на направление диффузии).

В настоящее время имеются работы, в которых исследуется ламинарный многокомпонентный пограничный слой. Аналитический метод решения уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя разработан Г. А. Тирским [1]. Имеются также работы, в которых получены конкретные результаты численными методами с использованием вычислительных машин (например, [2, 3]).

По турбулентным течениям, насколько известно автору, имеются работы (например, [4, 5]), в которых исследуется течение с химическими реакциями только в случае, когда все коэффициенты диффузии равны между собой ( $D_{ij} = D$ ).

В настоящей работе дается метод расчета турбулентного многокомпонентного пограничного слоя с учетом нескольких различных коэффициентов диффузии.

### Обозначения

$x, y$  — координаты,  
 $u, v$  — компоненты скорости,  
 $\rho$  — плотность,  
 $T$  — температура,  
 $h$  — теплосодержание,  
 $H$  — полное теплосодержание,  
 $c_i$  — массовая концентрация  $i$ -компоненты,  
 $c_i^{(1)}$  — концентрации элементов в твердом теле,  
 $J_i$  — диффузионный поток  $i$ -компоненты,  
 $m$  — молекулярный вес,  
 $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  
 $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  
 $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  
 $c_p$  — удельная теплоемкость,

$\gamma$  — показатель адиабаты,  
 $D_{ij}$  — бинарные коэффициенты диффузии,  
 $P$  — число Прандтля,  
 $S_{ij}$  — числа Шмидта,  
 $S_t$  — число Стентона,  
 $M$  — число Маха,  
 $\tau$  — трение,  
 $q$  — лучистый тепловой поток,  
 $\delta$  — толщина пограничного слоя,  
 $D$  — скорость перемещения границы газ — твердое тело,  
 $\Gamma$  — степень газификации,  
 $r_{ij}$  — весовая доля элемента  $i$  в компоненте  $j$ ,  
 $\nu_{ij}$  — стехиометрические коэффициенты,  
 $K_i$  — константы равновесия реакций  
 $l$  — число компонент, для которых

$$c_i = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad B = \frac{(\rho\nu)_w}{\rho_\infty u_\infty c_i}, \quad K = \frac{2S_t}{c_i}, \quad I_i = c_{iw} + \frac{J_{iw}}{(\rho\nu)_w}, \quad U = \frac{u}{u_\infty}$$

Индексы:  $i, j$  — номера компонент,  $w$  — относится к величинам при  $y = 0$ , \* — к величинам на границе ламинарного подслоя,  $(1)$  — к величинам в твердом теле,  $\infty$  — к величинам на внешней стороне пограничного слоя,  $e$  — к коэффициентам молярного переноса; штрих при стехиометрических коэффициентах обозначает, что компоненты образуются в процессе реакции.

1. Исследуется обтекание многокомпонентным турбулентным газовым потоком твердой поверхности, вещество которой способно вступать в химическое взаимодействие с газом, а также сублимировать. Предполагается, что химические реакции происходят только на поверхности твердого тела, причем на стенке осуществляется тер-

динамическое равновесие; в пограничном слое состав газа определяется диффузией. Так как часть вещества твердого тела поступает в пограничный слой (т. е. осуществляется некоторый вдув), граница между газом и твердым телом подвижна. Рассматривается установившееся течение, т. е. в подвижных координатах, связанных с границей газ — твердое тело, уравнения не зависят от времени.

Принимается, что в турбулентном пограничном слое могут быть выделены область развитого турбулентного течения и пристеночная область ламинарного течения (ламинарный подслой). Расчет пограничного слоя будет производиться по схеме, изложенной в работе [6], но с учетом многокомпонентности, которая существенно сказывается на уравнениях для ламинарного подслоя.

Запишем систему основных уравнений. Течение в ламинарном подслое принимается одномерным и описывается следующей системой уравнений неразрывности, движения, диффузии, энергии и состояния:

$$\frac{d\rho v}{dy} = 0, \quad \rho v \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

$$\rho v \frac{dc_i}{dy} = - \frac{dJ_i}{dy} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.2)$$

$$\rho v \frac{dH}{dy} = \frac{d}{dy} \mu \frac{dH}{dy} + \frac{d}{dy} \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{P} \right) \frac{d}{dy} \frac{u^2}{2} \right] - \frac{d}{dy} \left[ \sum_{k=1}^N h_k \left( J_k + \frac{\lambda}{c_p} \frac{dc_k}{dy} \right) \right] \quad (1.3)$$

$$p = \rho RT/m, \quad m = \left( \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i} \right)^{-1} \quad (1.4)$$

Здесь  $m$  — молекулярный вес смеси. Связь диффузионных потоков  $J_i$  с концентрациями компонент  $c_i$  дается соотношениями диффузии Максвелла [7], которые могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dy} (c_i m) = \frac{m^2}{\rho} \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j D_{ij}} (c_i J_j - c_j J_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.5)$$

Если предположить, что в турбулентной части пограничного слоя число Прандтля и все числа Шмидта, образованные по коэффициентам турбулентного переноса, равны единице, то в этой области имеется следующее подобие между распределением скорости, концентраций и полного теплосодержания (при течении вдоль плоской пластины)

$$\frac{u - u^*}{u_\infty - u^*} = \frac{c_i - c_i^*}{c_{i\infty} - c_i^*} = \frac{H - H^*}{H_\infty - H^*} \quad (1.6)$$

В турбулентной части пограничного слоя будет также рассматриваться уравнение движения в интегральной форме.

Уравнения решаются при следующих граничных условиях.

На стенке ( $y = 0$ ) принимается

$$u = 0, \quad (\rho v)_w = -\rho^{(1)} D \Gamma, \quad c_i^{(1)} - \sum_{j=1}^N r_{ij} J_j = 0 \quad (i = 1, \dots, a_1) \quad (1.7)$$

$$\prod_j^N p_j^{y_j} j^{1-y_j} = K_i(T) \quad (i = 1, \dots, a_2), \quad a_1 + a_2 = l, \quad p_\alpha = K_\alpha(T), \quad I_i = 0 \quad (l < i \leq N) \quad (1.8)$$

$$B \left[ \sum_{j=1}^N I_j h_{jw} - \frac{h_{-\infty}}{\Gamma} \right] = k' \left( H_\infty - \sum_{j=1}^N c_{j\infty} h_{jw} + \frac{q}{\rho_\infty u_\infty S_t} \right) \quad (1.9)$$

Здесь равенства (1.7) включают условия прилипания, сохранения массы, сохранения элементов; равенства (1.8) включают законы действующих масс, кривую упругости паров компоненты, сублимирующей с поверхности, условия сохранения инертных компонент; равенство (1.9) является условием сохранения энергии.

При выводе соотношения (1.9) тепловой поток на поверхности со стороны твердого тела принимался в виде

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} = -\rho^{(1)} D (h_w^{(1)} - h_{-\infty})$$

На внешней стороне пограничного слоя принимается

$$u = u_\infty, \quad c_i = c_{i\infty}, \quad H = H_\infty \quad \text{при } y = \delta \quad (1.10)$$

Границу между ламинарным подслоем и турбулентной частью пограничного слоя будем рассматривать как поверхность разрыва, на которой скорость, концентрации всех компонент и энтальпия являются непрерывными функциями, а их производные терпят разрыв таким образом, что на этой поверхности выполняются законы сохранения количества движения, массы каждой компоненты и энергии, т. е.

$$u = u^*, \quad c_i = c_i^*, \quad H = H^* \quad \text{при } y = y^* \\ \left( \mu_e \frac{\partial u}{\partial y} \right)^* = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)^*, \quad \left( \rho D_e \frac{\partial c_i}{\partial y} \right)^* = -J_i^*, \quad \left( \lambda_e \frac{\partial T}{\partial y} \right)^* = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)^* \quad (1.11)$$

Величины в левой части равенств (1.11) взяты со стороны турбулентного слоя, величины в правой части — со стороны ламинарного подслоя.

Приведенная выше система уравнений и граничных условий будет замкнутой, если ввести дополнительное соотношение для определения толщины ламинарного подслоя. Такое соотношение будет приведено ниже.

2. Получим решение системы уравнений, описывающих течение в ламинарном подслое.

Из уравнения диффузии (1.2) с учетом уравнения неразрывности следует:

$$c_i + \frac{J_i}{(\rho v)_w} = I_i = \text{const} \quad (2.1)$$

Тогда уравнения Максвелла (1.5) можно представить в виде

$$\frac{d}{dy}(c_i m) = (\rho v)_w \frac{m^2}{\rho} \sum_{j=1}^N \frac{1}{m_j D_{ij}} (c_i I_j - c_j I_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.2)$$

Если в соотношениях (2.2) ввести новые переменные по формулам [8]

$$\xi = (\rho v)_w \int_0^y \frac{m dy}{\mu}, \quad g_i = c_i m \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

то система нелинейных уравнений (2.2) сводится к системе линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{dg_i}{d\xi} = \sum_{j=1}^N \frac{S_{ij}}{m_j} (I_j g_i - I_i g_j) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.4)$$

Предполагается, что числа Шмидта, определенные по бинарным коэффициентам диффузии, постоянны, т. е.  $S_{ij} = \text{const}$ .

Частные решения системы (2.4) ищутся в виде [9]

$$g_i = \gamma_i e^{\lambda \xi} \quad (i = 1, \dots, N)$$

Тогда система уравнений (2.4) приводится к системе алгебраических уравнений относительно  $\gamma_i$ :

$$(\sigma_{ii} - \lambda) \gamma_i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \gamma_j = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{m_i} S_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -I_i \frac{S_{ij}}{m_j} \quad (i \neq j)$$

Для получения нетривиального решения следует определить корни характеристического уравнения

$$\det \| \sigma_{ij} - \delta_{ij} \lambda \| = 0, \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{при } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad (2.5)$$

При известных значениях корней характеристического уравнения построение фундаментальной системы решений производится обычным методом [9].

Решение алгебраического уравнения  $N$ -й степени (2.5) представляет вычислительные трудности, это в значительной степени обуславливается тем, что коэффициенты  $\sigma_{ij}$  неизвестны до решения уравнения (2.5). Поэтому важно получить аналитическое решение для корней характеристического уравнения.

Можно доказать, что уравнение (2.5) не содержит свободного члена, следовательно, существует нулевой корень  $\lambda_1 = 0$ . В газовой смеси могут присутствовать компоненты, для которых  $I_i = 0$  (т. е. эти компоненты не вступают в химические реакции на стенке и не образуются посредством сублимации). В этом случае определяется  $(N - l)$  корней характеристического уравнения в виде

$$\lambda_i = \sum_1^l S_{ij} \frac{I_j}{m_j} \quad (i = l + 1, \dots, N)$$

Здесь  $l$  — число компонент, для которых  $I_i \neq 0$ .

Отсюда следует, что решение задачи не зависит от коэффициентов взаимной диффузии между компонентами, которые в реакциях на стенке не участвуют.

Таким образом, корни характеристического уравнения (2.5) могут быть получены в виде радикалов для смесей, в которых  $l \leq 5$ , при этом  $(N - l)$  может быть произвольным. Во многих случаях удается в смеси газов выделить группы компонент с близкими диффузионными свойствами. Это обстоятельство также может быть использовано для отыскания корней характеристического уравнения (2.5).

Рассмотрим два случая. а) Все компоненты газовой смеси, участвующие в реакциях на стенке (диссоциирующие, рекомбинирующие, образующиеся сублимацией и т. д.) могут быть разделены на две группы компонент с близкими молекулярными весами. Тогда приближенно можно рассматривать три различных коэффициента бинарной диффузии (по одному коэффициенту диффузии в каждой группе между компонентами данной группы —  $D_1, D_2$ , а также коэффициент диффузии компонент одной группы относительно компонент другой группы —  $D_3$ ). Кроме указанных двух групп, в смеси может присутствовать произвольное число ( $\alpha$ ) групп компонент с близкими молекулярными весами, которые не участвуют в реакциях на стенке. Тогда общее число различных коэффициентов бинарной диффузии, от которых зависит решение, увеличивается до  $3 + 2\alpha$ , т. е. приходится учитывать коэффициенты диффузии  $\alpha$  групп компонент относительно первых двух групп, для которых  $I_i \neq 0$ . В рассматриваемом случае корни характеристического уравнения (2.5) получаются в виде

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i = S_1\sigma_1 + S_3\sigma_2 = \beta_1 \quad (i = 2, \dots, k)$$

$$\lambda_i = S_3\sigma_1 + S_2\sigma_2 = \beta_2 \quad (i = k + 2, \dots, l), \quad \lambda_{k+1} = S_3\sigma = \beta_3$$

$$\lambda_i = S_{i1}\sigma_1 + S_{i2}\sigma_2 = \beta_{i1} \quad (l + 1 \leq i \leq l_1), \dots, \lambda_i = S_{i1}\sigma_1 + S_{i2}\sigma_2 = \beta_{i\alpha} \quad (l_{\alpha-1} < i \leq N)$$

Здесь  $k, (l - k), (l_1 - l), \dots, (l_\alpha - l_{\alpha-1})$  — число компонент в каждой из групп с одинаковыми диффузионными свойствами

$$S_i = \frac{\mu}{\rho D_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad S_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}} \quad (l < i \leq N, j = 1, 2),$$

$$\sigma_1 = \sum_1^k \frac{I_j}{m_i}, \quad \sigma_2 = \sum_{k+1}^l \frac{I_j}{m_j}, \quad \sigma = \sum_1^l \frac{I_j}{m_j}$$

Здесь  $D_{11}, D_{12}$  — коэффициенты бинарной диффузии инертных компонент относительно первых двух групп. Окончательное решение системы (2.4) получается в виде

$$g_i = f I_i + (g_i^* - \varphi_i^* - f_m I_i) e^{\beta m(\xi - \xi^*)} + \frac{\sigma_n}{\sigma} (f_m - f_n) I_i e^{\beta n(\xi - \xi^*)} + \varphi_i(\xi)$$

$$g_{i+1} = g_{i+1}^* e^{\beta i_1(\xi - \xi^*)}, \quad \dots, \quad g_N = g_N^* e^{\beta i_\alpha(\xi - \xi^*)} \quad (2.6)$$

Здесь  $m = 1, n = 2$  при  $1 \leq i \leq k$ ;  $m = 2, n = 1$  при  $k + 1 \leq i \leq l$ :

$$f = \frac{1}{\sigma} \left( \sum_1^l \frac{g_j^* - \varphi_j^*}{m_j} \right), \quad f_1 = \frac{1}{\sigma_1} \left( \sum_1^k \frac{g_j^* - \varphi_j^*}{m_j} \right), \quad f_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left( \sum_{k+1}^l \frac{g_j^* - \varphi_j^*}{m_j} \right)$$

$$\frac{\varphi_i}{I_i} = \sum_{i_1=l_1}^{i_\alpha} \left[ D_{ii} (S_3 - S_{m i_1}) \sum_{i_1} \frac{g_{j_1}^*}{m_{j_1}} e^{\beta i_1(\xi - \xi^*)} \right] \quad (i = 1, \dots, l),$$

$$D_{i1} = (\beta_{i1} - \beta_3) - 1$$

В сумме  $\sum_{l_i}$  суммирование производится по всем компонентам  $l_i$  группы.

Соотношения (2.6) дают распределение концентраций в ламинарном подслое. Рассмотренному случаю может соответствовать течение диссоциированного воздуха, состоящего из атомов и молекул; при этом будет три различных коэффициента диффузии.

в) Аналогичным образом рассмотрим случай, когда все компоненты, участвующие в реакциях на стенке, могут быть разделены на три группы компонент с близкими молекулярными весами в каждой группе. В этом случае число различных коэффициентов диффузии между компонентами, участвующими в реакциях на стенке, равно шести (по одному коэффициенту диффузии в каждой группе между компонентами данной группы —  $D_1, D_2, D_3$ , а также три коэффициента взаимной диффузии компонент, принадлежащих к различным группам —  $D_4, D_5, D_6$ ). Если при этом присутствует  $\alpha$  групп инертных компонент с близкими молекулярными весами, число различных коэффициентов диффузии увеличивается до  $6 + 3\alpha$ . В рассматриваемом случае корни характеристического уравнения (2.5) получаются в виде

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \lambda_i &= S_1\sigma_1 + S_4\sigma_2 + S_5\sigma_3 = \beta_1 & (i = 2, \dots, k) \\ \lambda_i &= S_4\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_6\sigma_3 = \beta_2 & (i = k + 2, \dots, p), \\ \lambda_i &= S_5\sigma_1 + S_6\sigma_2 + S_3\sigma_3 = \beta_3 & (i = p + 2, \dots, l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1, p+1} &= \frac{1}{2} \{S_4\sigma_2 + S_5\sigma_3 + S_4\sigma_1 + S_6\sigma_3 + S_5\sigma_1 + S_6\sigma_2 \pm \\ &\pm [(S_1(S_4 - S_5) + \sigma_2(S_4 - S_6) + \sigma_3(S_5 - S_6))^2 - 4\sigma_1\sigma_3(S_4 - S_5)(S_5 - S_6)]^{1/2}\} = \beta_{4,5} \\ \lambda_i &= S_{i1}\sigma_1 + S_{i2}\sigma_2 + S_{i3}\sigma_3 \quad (l < i \leq N) \end{aligned}$$

Здесь  $k, (p - k), (l - p)$  — число компонент в каждой из групп с одинаковыми диффузионными свойствами,  $(N - l)$  — число инертных компонент

$$S_i = \frac{\mu}{\rho D_i} \quad (i = 1, \dots, 6), \quad S_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}} \quad (l < i \leq N, j = 1, 2, 3).$$

$$\sigma_1 = \sum_1^k \frac{I_j}{m_j}, \quad \sigma_2 = \sum_{k+1}^p \frac{I_j}{m_j}, \quad \sigma_3 = \sum_{p+1}^l \frac{I_j}{m_j}$$

$D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}$  — коэффициенты бинарной диффузии инертных компонент относительно первых трех групп.

Решение системы (2.4) в этом случае получается в виде (для простоты записи инертные компоненты не рассматриваются, т. е.  $l = N$ )

$$g_i = fI_i + (g_i^* - f_n I_i) e^{\beta_n(t-t^*)} + X_n I_i e^{\beta_n(t-t^*)} + Y_n I_i e^{\beta_n(t-t^*)} \quad (2.7)$$

Здесь  $n = 1$  при  $1 \leq i \leq k$ ,  $n = 2$  при  $k + 1 \leq i \leq p$ ,  $n = 3$  при  $p + 1 \leq i \leq l$

$$f = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) f_1 + (a_2 - b_2) f_2 + (b_1 - a_1) f_3}{(a_1 - 1)(b_2 - 1) - (b_1 - 1)(a_2 - 1)}, \quad f_1 = \frac{1}{\sigma_1} \sum_1^k \frac{g_j^*}{m_j}$$

$$f_2 = \frac{1}{\sigma_2} \sum_{k+1}^p \frac{g_j^*}{m_j}, \quad f_3 = \frac{1}{\sigma_3} \sum_{p+1}^l \frac{g_j^*}{m_j}$$

$$X_1 = \frac{X_2}{a_1} = \frac{X_3}{a_2} = \frac{(b_1 - b_2) f_1 + (b_2 - 1) f_2 + (1 - b_1) f_3}{(a_1 - 1)(b_2 - 1) - (b_1 - 1)(a_2 - 1)}$$

$$Y_1 = \frac{Y_2}{b_1} = \frac{Y_3}{b_2} = \frac{(a_2 - a_1) f_1 + (1 - a_2) f_2 + (a_1 - 1) f_3}{(a_1 - 1)(b_2 - 1) - (b_1 - 1)(a_2 - 1)}$$

$$a_1 = (S_4 A_{22} + S_5 S_6 \sigma_3) \sigma_1 / \Delta_1, \quad a_2 = (S_5 A_{11} + S_4 S_6 \sigma_2) \sigma_1 / \Delta_1, \quad \Delta_1 = A_{11} A_{22} - S_6^2 \sigma_2 \sigma_3$$

$$b_1 = (S_4 B_{22} + S_5 S_6 \sigma_3) \sigma_1 / \Delta_2, \quad b_2 = (S_5 B_{11} + S_4 S_6 \sigma_2) \sigma_1 / \Delta_2, \quad \Delta_2 = B_{11} B_{22} - S_6^2 \sigma_2 \sigma_3$$

$$A_{11} = \beta_4 - S_5(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_2(S_4 + S_6), \quad A_{22} = \beta_4 - S_4(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3(S_5 + S_6)$$

$$B_{11} = \beta_5 - S_5(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_2(S_4 + S_6), \quad B_{22} = \beta_5 - S_4(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3(S_5 + S_6)$$

Соотношения (2.7) определяют состав газовой смеси в ламинарном подслое. Рассмотренный случай является достаточно общим. По предложенной схеме можно исследовать некоторые течения газовых смесей, состоящих из атомов с близкими весами, а также тяжелых и легких молекул.

Кроме рассмотренных, могут представиться также другие случаи. Например, в одной из групп компонент, отличающихся одна от другой молекулярными весами, может содержаться лишь одна компонента. В этом случае число различных коэффициентов диффузии уменьшается на единицу.

Решение уравнений движения и энергии для ламинарного подслоя не представляет труда и может быть получено в виде

$$\frac{u}{u^*} = \frac{\exp \eta - 1}{\exp \eta^* - 1}, \quad \frac{H\varphi(\xi)c_{pw}/c_p - H_w + \Psi(\xi)}{H^*\varphi(\xi^*)c_{pw}/c_p^* - H_w + \Psi(\xi^*)} = \frac{\varphi(\xi) - 1}{\varphi(\xi^*) - 1} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\varphi(\xi) = \exp\left(-\int_0^\xi \frac{c_p^\circ P}{c_p m} d\xi\right), \quad c_p = \sum_1^N c_{hk} c_{pk}, \quad c_p^\circ = \sum_1^N I_k c_{pk}, \quad \eta = \int_0^\xi \frac{d\xi}{m}$$

$$\Psi = \int_0^{\xi^*} \left\{ (P-1) \frac{du^2}{d\xi} + \frac{1}{c_p} \frac{u^2}{2} \left[ \frac{dc_p}{d\xi} + \frac{P}{m} (c_p^\circ - c_p) \right] \right\} \frac{c_{pw}}{c_p} \varphi(\xi) d\xi$$

3. Получим соотношения для определения скорости, концентраций всех компонент и энтальпии на границе ламинарного подслоя; для этого продифференцируем равенства (1.6) и воспользуемся соотношениями (1.11) и решениями уравнений ламинарного подслоя

$$U^* = u^*/u_\infty = (e^{\eta^*} - 1)/B, \quad c_i^* = [c_{i\infty} e^{\eta^*} + I_i(B+1 - e^{\eta^*})](B+1)^{-1} \quad (3.1)$$

$$\frac{H^*}{H_\infty} = \frac{c_p^* c_{pw} e^{\eta^*} [\varphi(\xi^*) - 1] - c_p^\circ (B+1 - e^{\eta^*}) (H_w - \Psi)/H_\infty}{c_{pw} c_{p\infty} e^{\eta^*} [\varphi(\xi^*) - 1] - c_p^\circ (B+1 - e^{\eta^*})} \quad (3.2)$$

Введем число Стэнтона по формуле

$$S_t = \frac{1}{\rho_\infty u_\infty} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \left( H_\infty - \sum_1^N c_{k\infty} h_{kw} \right)^{-1}$$

Если воспользоваться соотношениями (2.8) и (3.2), можно получить связь числа Стэнтона и коэффициента трения в виде

$$\frac{2S_t}{c_f} = B \frac{c_p^\circ \varphi(\xi^*) e^{\eta^*} + \Phi}{c_{p\infty} e^{\eta^*} [1 - \varphi(\xi^*)] + c_p^\circ (B+1 - e^{\eta^*})} \quad (3.3)$$

$$\Phi = \frac{1/2 H_\infty (\gamma - 1) [(B+1 - e^{\eta^*}) c_p^\circ + c_{p\infty} e^{\eta^*}] M^2}{B^2 [1 + 1/2 (\gamma - 1) M^2] c_{p\infty}} \left( H_\infty - \sum_1^N c_{k\infty} h_{kw} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\xi^*} e^{2\eta} \frac{P}{m} \frac{c_p^\circ}{c_p} \varphi(\xi) d\xi + \varphi(\xi^*) \left[ 1 - (e^{\eta^*} - 1)^2 \frac{c_p^\circ}{c_p^*} \right] - 1 \right\}$$

Величина  $\Phi$  обусловлена диссипацией; для дозвуковых течений (малые  $M$ ) этой величиной можно пренебречь. Кроме того,  $\Phi$  равна нулю в случае, если  $c_{pi} = c_{pj}$  ( $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq N$ ),  $P = 1$ .

4. Для определения трения на поверхности, обтекаемой многокомпонентным турбулентным потоком газа с химическими реакциями и с уносом вещества на стенке, применим приближенный метод, основанный на использовании интегрального уравнения движения. Необходимый для решения интегрального уравнения движения профиль скорости в турбулентной части пограничного слоя определим из уравнения движения для одномерного течения

$$(\rho v)_w u = \tau - \tau_w, \quad \tau = \rho l^2 (du/dy)^2 \quad (4.1)$$

Здесь  $l$  — длина пути перемешивания.

Принимаем гипотезу о том, что зависимость длины пути перемешивания от координаты степенная [6], а именно

$$l/L = \kappa(y/L)^\beta \quad (4.2)$$

где  $\kappa$  и  $\beta$  — постоянные,  $L$  — характерная длина. Из соотношений (4.1) и (4.2) получается профиль скорости в турбулентной части пограничного слоя (подробнее см., [6]). Если предположить, что в частном случае течения несжимаемого газа без вдува профиль скорости сводится к известному степенному профилю [10]

$$u/v^* = D(n)(yv^*/\nu)^{1/n}, \quad v^* = (\tau_w/\rho_w)^{1/2}$$

то можно определить следующие величины:

$$\beta = 1 - 1/n, \quad \kappa = n/D(n), \quad L = \nu_w/v^*, \quad R^* = (\tau^*/\rho^*)^{1/2}y^*/v^* = [D(n)]^{n/(n-1)} \quad (4.3)$$

В дальнейшем сохраним полученные выражения для  $\beta$ ,  $\kappa$ ,  $L$  и критического числа Рейнольдса на границе ламинарного подслоя  $R^*$  и в случаях течений многокомпонентного газа с химическими реакциями.

С использованием профиля скорости для турбулентной части пограничного слоя можно получить связь коэффициента трения с толщиной потери импульса. После чего при использовании интегрального уравнения движения не представляет труда получить зависимость коэффициента трения от параметров задачи. В случае пластины это выражение имеет вид

$$\frac{c_f}{2} = \left\{ \frac{n+1}{n+3} \frac{n}{(1+B)[D(n)]^n} \frac{\mu_w}{\mu_\infty} \left( \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} I \right\}^{2/(n+3)} R_x^{-2/(n+3)} \quad (4.4)$$

$$I = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_\infty} U(1-U)W(U) \left[ \int_0^U W(U)dU + A \right]^{n-1} dU, \quad W(U) = \left( \frac{\rho/\rho_\infty}{1+BU} \right)^{1/2}$$

$$A = \frac{e^{-\eta^*/2}D(n)}{2R^*} \left[ R^* \left( \frac{\rho_w}{\rho^*} \right)^{1/2} \frac{\mu^*}{\mu_w} e^{-\eta^*/2} \right]^{1/n} - \int_0^{U^*} W(U)dU, \quad R_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty}$$

Величина  $R^*(\tau^*/\rho_\infty u_\infty^2)^{1/2}$  слабо меняется и при числах  $R_x \approx 10^5 - 10^7$  близка к  $1/2$ , поэтому для упрощения расчетов здесь сделано допущение

$$R^*(\tau^*/\rho_\infty u_\infty^2)^{1/2} = 0.5 \quad (4.5)$$

Из равенств (4.3) и (4.5) устанавливается связь величин  $B$  и  $\eta^*$  в виде

$$B = 2e^{\eta^*} \left( \frac{\rho^*}{\rho_\infty} \right)^{1/2} \int_0^{\eta^*} \frac{\mu}{\mu^*} d\eta \quad (4.6)$$

Необходимое для расчета трения выражение плотности многокомпонентной смеси получим с использованием равенств (1.6) и уравнения состояния

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[ 1 + \left( \frac{c_p^*}{c_{p_\infty}} - 1 \right) \frac{1-U}{1-U^*} \right] \left[ 1 + \left( \frac{m_\infty}{m^*} - 1 \right) \frac{1-U}{1-U^*} \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{H^*}{H_\infty} - 1 \right) \frac{1-U}{1-U^*} \right] \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \frac{U^2}{2} \right\}^{-1}$$

Коэффициент вязкости смеси определим по формуле Мавна [11]; тогда, если предположить

$$\mu_i/\mu_{i\infty} = (T/T_\infty)^{0.75}$$

то выражение для вязкости получается в виде

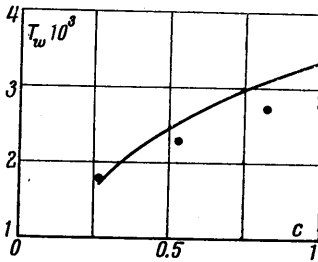
$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{0.75} \left( \sum_1^N \frac{g_{j\infty} \mu_{i\infty}}{m_j \mu_{j\infty}} \right) \left( \sum_1^N \frac{g_j \mu_i}{m_j \mu_j} \right)^{-1}$$

Здесь  $\mu_i$  — коэффициент вязкости одной из компонент.

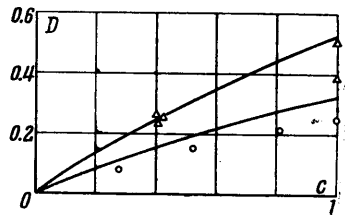
5. Температура и состав газа у поверхности, а также параметр  $B$ , характеризующий унос вещества с поверхности, определяются из системы конечных соотношений. Эта система включает условие сохранения элементов из (1.7), а также равенства (1.8), (1.9), при этом законы действующих масс с учетом (2.3) следует преобразовать к виду

$$\prod_j \left( \frac{g_j p}{m_j} \right)^{\nu_j i' - \nu_j i} = K_i(T) \quad (i = 1, \dots, a_2) \quad (5.1)$$

Система уравнений (1.7), (1.8), (1.9), (5.1) содержит  $(N+2)$  уравнений и  $(2N+2)$  неизвестных, которыми являются  $c_{i\omega}$ ,  $I_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $T_w$ ,  $B$ . Чтобы замкнуть систему следует привлечь дополнительно выражения для  $g_{i\omega}$ , являющиеся решениями уравнений (2.4) при  $y = 0$ ; в частных случаях эти соотношения можно получить из решений (2.6) или (2.7).



Фиг. 1



Фиг. 2

Поскольку в равенства (2.6), (2.7) входят неизвестные  $\eta^*$  и  $\xi^*$ , то к системе конечных соотношений следует также присоединить равенства

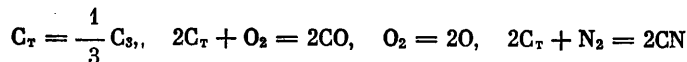
$$\eta^* = \int_0^{\xi^*} \frac{d\xi}{m}, \quad B = 2e\eta^* \left( \frac{\rho^*}{\rho_\infty} \right)^{1/2} \int_0^{\eta^*} \frac{\mu}{\mu^*} d\eta$$

Полученная система содержит  $2N+4$  уравнений и столько же неизвестных. Порядок системы может быть уменьшен, для чего можно исключить все  $g_{i\omega}$  посредством равенств (2.6) или (2.7). Кроме того, некоторые  $I_i$  могут быть исключены при помощи равенств (1.9). Тогда общий порядок системы уменьшится до  $(N+4-a_1)$ . Тем не менее, окончательные выражения получаются достаточно громоздкими, прямые расчеты по которым без использования вычислительных машин затруднительны.

При известном значении параметра  $B$  скорость перемещения границы газ — твердое тело определяется по формуле

$$D = -(\rho_\infty / \rho^{(1)}) u_\infty (c_f / 2) B / \Gamma$$

6. Как иллюстрация предложенного метода рассмотрено горение графитовой поверхности, помещенной в газовый поток, состоящий из смеси кислорода и азота. Диапазон температуры на горячей поверхности ограничен интервалом от 2000 до 4000° К. Рассматривались следующие реакции химического взаимодействия:



Здесь  $C_T$  означает углерод в твердом состоянии.

Проведены расчеты при значениях параметров, соответствующих условиям эксперимента, опубликованного в работе [12]. При этом предполагалось, что степень газификации  $\Gamma = 1$  и лучистый поток отсутствуют ( $q = 0$ ).

Зависимость температуры на горячей поверхности (°К) от концентрации кислорода в ядре потока ( $C$ ) приведена на фиг. 1. Нанесены также экспериментальные значения из работы [12].

Сравнение расчетных и экспериментальных [12] значений по скорости уноса графита ( $D$  [мм/сек]) с поверхности при горении в зависимости от концентрации кислорода в ядре потока ( $C$ ) приведено на фиг. 2. Кривые 1 и 2 соответствуют давлению в ядре потока 6.3 и 11.5 *атм*.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, 155, № 6.
2. Щенников В. В. Расчет ламинарного пограничного слоя у сублимирующей поверхности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
3. Анфимов Н. А. Горение графита в потоке воздуха при высоких температурах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
4. Лапин Ю. В. Турбулентный тепломассообмен на пластине при наличии сублимации и пористом подводе различных газов. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 5.
5. Denison M. R. The turbulent boundary layer on chemically active ablating surface. JAS, 1961, vol. 28, No. 6. (русск. перев., ВРТ, 1962, № 1).
6. Совершенный В. Д. Турбулентный пограничный слой на проницаемой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
7. Merk H. J. The macroscopic equations for simultaneous heat and mass transfer in isotropic, continuous and closed systems. Appl. Sci. Res. A., 1958, vol. 8, No. 1.
8. Совершенный В. Д. Течение многокомпонентного газа между параллельными проницаемыми плоскостями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, 1953.
10. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
11. Mann V. Cas u. Wasserfach Ing. 1930, B. 73, S. 570.
12. Bartlett E. P., Denison M. R. Experimental ablation rates in a turbulent boundary layer. J. of Heat Transfer, 1961, vol. 83, s. C. No. 4.

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВИБРАЦИОННЫХ СИЛ

С. М. ЗЕНЬКОВСКАЯ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается конвекция в поле силы тяжести в жидкости, заключенной в сосуде, вибрирующем вдоль вертикальной оси по закону  $a/\omega \sin \omega t$  ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

В [1] выведены осредненные по времени уравнения конвекции, описывающие основное движение в первом приближении. Кроме того, в [1] введены критерии, определяющие начало конвекции в этом случае, и рассмотрена модельная задача: случай пространственнопериодических возмущений. Получено, что в этом случае вибрации высокой частоты стабилизируют состояние относительно покоя.

В данной работе рассматривается конвекция в слое жидкости между двумя горизонтальными плоскостями, уравнения которых  $z = \pm l/2$ .

На нижней и верхней плоскостях задана температура  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Доказано (разд. 1), что при малых значениях вибрационного критерия выполняется принцип изменения устойчивости. В этом случае имеет место вариационный принцип (разд. 2), из которого следует, что вибрации высокой частоты препятствуют возникновению конвекции в горизонтальном слое жидкости. С помощью вариационного принципа произведен расчет зависимости значений критерия Рэлея от вибрационного критерия.

1. О принципе изменения устойчивости. Осредненные уравнения конвекции имеют вид [1]:

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{P} (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' = -P \nabla q' + \Delta \mathbf{v}' + j \lambda T'' + j \mu (\mathbf{w}' \cdot \nabla T'') - \mu (\mathbf{w}' \cdot \nabla) \mathbf{w}'$$

$$\left( P = \frac{\nu}{\chi}, \quad \lambda = \frac{(T_1 - T_2) \beta g l^3}{\gamma \nu}, \quad \mu = \frac{(T_1 - T_2)^2 \beta^2 a^2 l^2}{2 \chi \nu} \right)$$

$$\frac{\partial T''}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla T'' = \Delta T'', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0, \quad \mathbf{w}' = \Pi (j T''), \quad \text{div } \mathbf{w}' = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}'(x, t)$  — относительная скорость движения жидкости,  $T''(x, t)$  — температура,  $q'(x, t)$  — давление,  $P$  — число Прандтля,  $\lambda$  — число Рэлея,  $\mu$  — вибрационный критерий.  $\Pi$  — оператор ортогонального проектирования в  $L_2$  на подпространство соленоидальных векторов [2];  $j$  — единичный вектор вертикальной оси, направленный вверх.

Известно, что конвекция начинается при потере устойчивости состояния относительно покоя. Для исследования устойчивости относительно бесконечно малых возмущений применяется метод линеаризации. Тогда для возмущений получается