# СТРУКТУРА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ПСЕВДОТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ю. А. БУЕВИЧ, А. И. ЛЕОНОВ, В. М. САФРАЙ

*(Москва)*

В работе [1] была сформулирована задача о крупномасштабном («псевдотурбулентном») движении жидкости в неоднородной пористой среде. Поскольку практически локальная пористость $\varepsilon(x)$ неизвестна, она может считаться непрерывной случайной функцией точки. Отличие локальных значений пористости $\varepsilon(x)$ от среднего $\varepsilon^\circ$ для среды в целом обусловливает возникновение случайных псевдотурбулентных движений фильтрующейся жидкости, налагающихся на усредненный фильтрационный поток. Особенности крупномасштабных фильтрационных движений в среде с такого рода случайной пористостью были подробно рассмотрены в работе [1], где содержится формальное решение полученных уравнений для двухточечных корреляций, основанное на использовании соображений пространственной инвариантности. Там же дано качественное обсуждение влияния псевдотурбулентности фильтрующейся среды на процессы переноса в ней.

Необходимо заметить, что рассматриваемая задача о псевдотурбулентности фильтрующейся жидкости в неоднородном пористом теле не имеет ничего общего со статистической задачей о движении малых элементов жидкости в пересеченном поровом пространстве. Последняя задача интересна в связи с анализом процессов конвективной диффузии в пористом теле (как неоднородном, так и однородном) и, начиная с [3], рассматривалась в ряде работ, в том числе в [2].

В настоящей работе использован существенно иной по сравнению с работой [1] метод решения задачи, основанный на представлении об изменении локальной пористости от точки к точке как о случайном процессе с независимыми приращениями. Этот метод имеет то преимущество, что позволяет выразить необходимые корреляционные функции в виде квадратур при произвольных значениях характеристических парамэтров. Ниже для простоты рассмотрена осесимметричная задача в предположении, что двухточечная корреляция отклонений локальных значений пористости от среднего представима в виде изотропной гауссовой функции от расстояния между точками. В некотором приближении записаны также явные выражения для корреляций и обсуждены вытекающие из них физические следствия.

1. Линеаризованные уравнения (допустимость линеаризации подробно обсуждается в [1]) стационарного движения в пористой среде со случайной пористостью имеют вид

$$\varepsilon^\circ R w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -R\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - \alpha w_i \sigma - \beta v_i$$
$$\varepsilon^\circ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -w_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \qquad v_i = \frac{u_i'}{u^\circ}, \qquad w_i = \frac{u_i^\circ}{u^\circ} \tag{1.1}$$

Здесь $u_i^\circ$ — истинная средняя скорость жидкости (такой она была бы при отсутствии крупномасштабных флуктуаций пористости), связанная со скоростью фильтрации $u_{\phi i}$ соотношением $u_{\phi i} = \varepsilon^\circ u_i^\circ$; $\varepsilon^\circ$ — средняя пористость среды; $\sigma$ — отклонение локальной пористости от средней; $u_i'$ — псевдотурбулентные пульсации скорости, обусловленные случайным характером величины $\sigma$. Координаты $x_i$ в (1.1) обезразмерены по масштабу неоднородности пористости $H \gg l$, где $l$ — масштаб отдельных пор, а безразмерные параметры $\alpha$, $\beta$ и $R$ равны

$$\alpha = \frac{GH^2}{\varepsilon^\circ \eta} + \frac{gdH^2}{\eta u^\circ}, \quad \beta = \frac{GH^2}{\eta}, \quad R = \frac{u^\circ dH}{\eta} \tag{1.2}$$

Здесь $G(\varepsilon^\circ)$ — коэффициент пропорциональности между $u_i$ и силой сопротивления движению жидкости, отнесенной к единице объема тела; $\eta(\varepsilon^\circ)$ — эффективная вязкость фильтрующейся жидкости; $d$ — ее плотность. При написании (1.1) и (2.1) предполагается, таким образом, что сопротивление движению линейно по скорости; кроме того, для упрощения принято, что вектор ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$ направлен обратно $\mathbf{w}$.

Линеаризованное уравнение стационарной конвективной диффузии скалярной примеси, концентрация которой есть $\Gamma+\gamma$, где $\gamma \ll \Gamma$ и $\Gamma$ — постоянная, запишется в виде [2]

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(d_{ij}\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}\right)-w_i\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}=\Gamma\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=-\frac{\Gamma}{\varepsilon^\circ}w_i\frac{\partial\sigma}{\partial x_i},\qquad d_{ij}=\frac{D_{ij}}{u^\circ H}\qquad(1.3)$$

Здесь $D_{ij}$ — эффективный тензор диффузии, описывающий как перенос субстанции за счет молекулярной диффузии, так и конвективную составляющую переноса, которая появляется в результате смешения струек жидкости, протекающих по отдельным порам, при движении в пересеченном поровом пространстве [2].

Запишем случайные функции $\sigma$, $p$, $v_m$, $\gamma$ в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса

$$\sigma(\mathbf{x})=\int e^{i\varkappa\mathbf{x}}dZ_\sigma(\varkappa),\qquad p(\mathbf{x})=\int e^{i\varkappa\mathbf{x}}dZ_p(\varkappa)$$
$$v_m(\mathbf{x})=\int e^{i\varkappa\mathbf{x}}dZ_m(\varkappa),\qquad \gamma(\mathbf{x})=\int e^{i\varkappa\mathbf{x}}dZ_\gamma(\varkappa)$$

Интегрирование здесь производится по всему волновому пространству.

Из (1.1) и (1.3) для случайных приращений функций $Z_\sigma(\varkappa)$ и др. получим уравнения

$$\begin{aligned}
i\varepsilon^\circ Rw_j\varkappa_j dZ_m &= -iR\varkappa_m dZ_p-\varkappa^2dZ_m-{}^1/_3\varkappa_j\varkappa_m dZ_j-\alpha w_m dZ_\sigma-\beta Z_m,\\
\varepsilon^\circ\varkappa_j dZ_j &= -w_j\varkappa_j dZ_\sigma \qquad (1.4)\\
-(d_{mj}\varkappa_m\varkappa_j+iw_j\varkappa_j)dZ_\gamma &= i\Gamma\varkappa_j dZ_j=-i\varepsilon^{-1}\Gamma w_j\varkappa_j dZ_\sigma
\end{aligned}$$

Решая систему (1.4), получим соотношения

$$dZ_p=-\frac{iw_j\varkappa_j}{\varepsilon^\circ R\varkappa^2}\left(i\varepsilon^\circ Rw_j\varkappa_j+\frac{4}{3}\varkappa^2+\beta-\alpha\varepsilon^\circ\right)dZ_\sigma=p^\circ(\varkappa)\,dZ_\sigma$$
$$dZ_m=\left(-\varkappa_m\frac{w_j\varkappa_j}{\varepsilon^\circ\varkappa^2}+\frac{\alpha}{\varkappa^2}\frac{\varkappa_m w_j\varkappa_j-w_m\varkappa^2}{i\varepsilon^\circ Rw_j\varkappa_j+\varkappa^2+\beta}\right)dZ_\sigma=v_m{}^\circ(\varkappa)\,dZ_\sigma\qquad(1.5)$$
$$dZ_\gamma=-\frac{i\Gamma\varkappa_j\,dZ_j}{d_{mj}\varkappa_m\varkappa_j+iw_j\varkappa_j}=\frac{i\Gamma w_j\varkappa_j\,dZ_\sigma}{\varepsilon^\circ(d_{mj}\varkappa_m\varkappa_j+iw_j\varkappa_j)}=\gamma^\circ(\varkappa)\,dZ_\sigma$$

Обобщение полученных соотношений на более сложные движения очевидно. Так, введение нелинейного закона сопротивления приводит лишь к некоторому усложнению линейной алгебраической системы (1.4), которое совершенно не принципиально, а отказ от аксиальной симметрии ведет к появлению новых членов в уравнениях (1.1), природа которых ясна из содержания работы [1].

Предполагая, что случайные приращения $dZ_\sigma$ и др. описывают случайные процессы с независимыми приращениями, имеем для корреляции $\langle\sigma\sigma\rangle$

$$\langle\sigma^*(\mathbf{x})\,\sigma(\mathbf{x}+\xi)\rangle=\iint e^{-i\varkappa_1\mathbf{x}+i\varkappa_2(\mathbf{x}+\xi)}\langle dZ_\sigma{}^*(\varkappa_1)\,dZ_\sigma(\varkappa_2)\rangle$$

При этом ввиду статистической ортогональности $dZ_\sigma(\varkappa_1)$ и $dZ_\sigma(\varkappa_2)$

везде, где $d\varkappa_1$ и $d\varkappa_2$ не перекрываются, имеем

$$\lim_{d\varkappa\to 0}\frac{\langle dZ_\sigma^*(\varkappa_1)\,dZ_\sigma(\varkappa_2)\rangle}{d\varkappa_1\,d\varkappa_2\,d\varkappa_3}=\begin{cases}0\ , & \varkappa_1\neq\varkappa_2\\ \varphi(\varkappa)\,d\varkappa, & \varkappa_1=\varkappa_2\end{cases}\qquad d\varkappa=d\varkappa_1=d\varkappa_2$$

Фактически предположение о существовании предела при $\varkappa_1=\varkappa_2$ эквивалентно допущению о наличии спектральной плотности $\varphi(\varkappa)$ процесса $Z_\sigma(\varkappa)$. Ниже считаем, что $\varphi(\varkappa)$ — изотропная функция модуля $\varkappa$, которая получается из априори заданной величины $\langle\sigma\sigma\rangle$, представляющей гауссову функцию от $r^2=\xi\xi$, в результате обратного преобразования Фурье

$$\varphi(\varkappa)=\varphi(\varkappa^2)=\frac{\sigma_0^2}{8\pi^{3/2}}\exp\left(-\frac{\varkappa^2}{4}\right),\qquad \langle\sigma\sigma\rangle=\sigma_0^2e^{-r^2}$$

Для определенности рассмотрим корреляции [1]

$$S_{p,\sigma}(\xi)=\langle p^*(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}+\xi)\rangle,\qquad N_{m,\sigma}(\xi)=\langle v_m^*(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}+\xi)\rangle$$

$$Q_{m,j}(\xi)=\langle v_m^*(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}+\xi)\rangle,\qquad \Gamma_{m,\gamma}(\xi)=\langle v_m^*(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x}+\xi)\rangle$$

Эти корреляции удовлетворяют условиям однородности и симметрии, рассмотренным в [1]. Вводя сферические координаты $\rho^2=\varkappa^2$, $\rho\eta=\varkappa\mathbf{w}$, для соответствующих спектральных плотностей из (1.5) получим выражения:

$$s_{p,\sigma}(\varkappa)=\left(\eta^2+i\frac{4}{3}\frac{\rho\eta}{\varepsilon^\circ R}+i\frac{\beta-\alpha\varepsilon^\circ}{\varepsilon^\circ R}\frac{\eta}{\rho}\right)\varphi(\rho^2)\tag{1.6}$$

$$n_{m,\sigma}(\varkappa)=\left(-\varkappa_m\frac{\eta}{\varepsilon^\circ\rho}+\alpha\frac{\varkappa_m(\eta/\rho)-w_m}{\rho^2+\beta-i\varepsilon^\circ R\rho\eta}\right)\varphi(\rho^2)$$

$$q_{m,j}(\varkappa)=\left\{\frac{\varkappa_m\varkappa_j}{\varepsilon^{\circ 2}}\frac{\eta^2}{\rho^2}\left[1+\frac{\alpha^2\varepsilon^{\circ 2}-2\alpha\varepsilon^\circ(\rho^2+\beta)}{(\rho^2+\beta)^2+\varepsilon^{\circ 2}R^2\rho^2\eta^2}\right]+\frac{w_mw_j\alpha^2}{(\rho^2+\beta)^2+\varepsilon^{\circ 2}R^2\rho^2\eta^2}+\right.$$
$$+w_m\varkappa_j\frac{\alpha}{\varepsilon^\circ}\frac{(\rho^2+\beta-\alpha\varepsilon^\circ)\eta+i\varepsilon^\circ R\rho\eta^2}{\rho[(\rho^2+\beta)^2+\varepsilon^{\circ 2}R^2\rho^2\eta^2]}+$$
$$\left.+w_j\varkappa_m\frac{\alpha}{\varepsilon^\circ}\frac{(\rho^2+\beta-\alpha\varepsilon^\circ)\eta-i\varepsilon^\circ R\rho\eta^2}{\rho[(\rho^2+\beta)^2+\varepsilon^{\circ 2}R^2\rho^2\eta^2]}\right\}\varphi(\rho^2)$$

$$\gamma_{m,\gamma}(\varkappa)=\frac{i\Gamma\rho\eta}{\varepsilon^\circ\{[d_1\eta+d_2(1-\eta^2)^{1/2}]\rho^2+i\rho\eta\}}\times$$
$$\times\left(-\varkappa_m\frac{\eta}{\varepsilon^\circ\rho}+\alpha\frac{\varkappa_m(\eta/\rho)-w_m}{\rho^2+\beta-i\varepsilon^\circ R\rho\eta}\right)\varphi(\rho^2)$$

Здесь $d_1$ и $d_2$ — собственные значения осесимметричного тензора диффузии. Все корреляции просто выражаются через спектральные плотности. Например,

$$\langle\sigma^*(\mathbf{x})\,\sigma(\mathbf{x}+\xi)\rangle=\int e^{i\xi\varkappa}\varphi(\rho^2)\,d\varkappa,\qquad S_{p,\sigma}(\xi)=\int e^{i\xi\varkappa}s_{p,\sigma}(\varkappa)\,d\varkappa$$

Тем же путем нетрудно получить выражения для корреляционных функций других типов.

2. Величина $G(\varepsilon^\circ)$ в (1.2) связана с проницаемостью пористого тела $k(\varepsilon^\circ)$ соотношением $G(\varepsilon^\circ)=\varepsilon^\circ\eta(\varepsilon^\circ)k^{-1}(\varepsilon^\circ)$. Оценим величины $R/\beta$ и $\varepsilon^\circ\alpha/\beta$ и $1/\beta$. Имеем

$$\frac{R}{\beta}=\frac{u^\circ dk(\varepsilon^\circ)}{\varepsilon^\circ\eta(\varepsilon^\circ)H},\qquad \frac{\varepsilon^\circ\alpha}{\beta}=1+\frac{gdk(\varepsilon^\circ)}{u^\circ\eta(\varepsilon^\circ)},\qquad \frac{1}{\beta}=\frac{k(\varepsilon^\circ)}{\varepsilon^\circ H^2}\tag{2.1}$$

Реальные значения $k(\varepsilon^\circ)$ составляют от 0.01 до 10 дарси (или $10^{-10}$—$10^{-7}$ ед. CGS), величину $H$ можно считать равной 1—10 *см*. Легко видеть тогда, что в большинстве случаев, представляющих практический интерес, величины $R/\beta$ и $1/\beta$ пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Величина $e^{-\frac{1}{2}\rho^2}$ существенно отлична от нуля вплоть до $\rho_m \approx 2$—3. Поэтому $\rho^2/\beta$ в худшем случае лишь на порядок выше $1/\beta$ и также мало по сравнению с единицей. Наоборот, величина $\varepsilon^\circ\alpha/\beta$ в ряде практически интересных случаев (проницаемый пласт, малые градиенты давления и т. п.) может быть существенно отлична от единицы. Эти оценки позволяют пренебречь при интегрировании выражений (1.6) членами порядка $\rho^2/\beta$ и $R/\beta$, что значительно упрощает интегрирование.

Выбирая в качестве полярной оси в волновом пространстве ось $\xi$, имеем

$$\eta = \cos(\mathbf{w}, \varkappa) = \cos(\xi, \mathbf{w})\cos(\xi, \varkappa) + \sin(\xi, \mathbf{w})\sin(\xi, \varkappa)\cos\varphi$$

$$d\varkappa = \rho^2 \sin(\xi, \varkappa)\, d(\xi, \varkappa)\, d\varphi\, d\rho$$

После довольно громоздких вычислений для введенных корреляционных функций получим представления

$$\begin{gathered}
S_{p,\sigma}(r,\mu) = \frac{\sigma_0^2}{2} e^{-r^2}\left(2\mu^2 - \frac{16}{3}\frac{\mu}{\varepsilon^\circ R} r + \frac{\mu}{\varepsilon^\circ R}\frac{\beta - \varepsilon^\circ\alpha}{r} + \frac{3\mu^2 - 1}{r^2}\right) - \\
- \frac{\sigma_0^2}{4}\sqrt{\pi}\,\Phi(r)\left(\frac{3\mu^2 - 1}{r^3} + \frac{\mu}{\varepsilon^\circ R}\frac{\beta - \varepsilon^\circ\alpha}{r^2}\right) \\
N_{m,\sigma}(r,\mu) \approx \frac{\sigma_0^2}{4} X \xi_m \mu \left[\frac{2}{r}\left(2 + \frac{3}{r^2}\right)e^{-r^2} - \frac{3\sqrt{\pi}}{r^4}\Phi(r)\right] + \\
+ \sigma_0^2 w_m\left[-\left(\frac{1}{\varepsilon^\circ} + X\right)e^{-r^2} + \frac{1}{4}X\left(-\frac{2}{r^2}e^{-r^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{r^3}\Phi(r)\right)\right] \\
Q_{m,j}(r,\mu) \approx -\sigma_0^2 \pi^{3/2} X^2 \xi_m \xi_j \left[\left(-\frac{8\mu^2}{r^2} + \frac{4 - 40\mu^2}{r^4} + \frac{15 - 105\mu^2}{r^6}\right)e^{-r^2} + \right. \\
\left. + \sqrt{\pi}\left(\frac{3 - 15\mu^2}{r^5} + \frac{105\mu^2 - 15}{2r^7}\right)\Phi(r)\right] - \sigma_0^2 X(\xi_m w_j + \xi_j w_m) \times \\
\times \mu\left\{\pi^{3/2} X\left[\left(\frac{8}{r^3} + \frac{30}{r^5}\right)e^{-r^2} + \sqrt{\pi}\left(\frac{6}{r^4} - \frac{15}{r^6}\right)\Phi(r)\right] + \right. \\
\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon^\circ} + X\right)\left[\left(\frac{4}{r} + \frac{6}{r^3}\right)e^{-r^2} - \frac{3\sqrt{\pi}}{r^4}\Phi(r)\right]\right\} - \\
- \sigma_0^2 X w_m w_j \left\{\pi^{3/2} X\left[-\frac{6}{r^4}e^{-r^2} + \sqrt{\pi}\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^5}\right)\Phi(r)\right] + \right. \\
\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^\circ} + X\right)\left(-\frac{2}{r^2}e^{-r^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{r^3}\Phi(r)\right)\right\} + \sigma_0^2\left(\frac{1}{\varepsilon^\circ} + X\right)^2 w_m w_j e^{-r^2} - \\
- \pi^{3/2}\sigma_0^2 X^2 \delta_{mj}\left[\left(\frac{4\mu^2}{r^2} + \frac{15\mu^2 - 3}{r^4}\right)e^{-r^2} + \sqrt{\pi}\left(\frac{3\mu^2 - 1}{r^3} + \frac{3 - 15\mu^2}{2r^5}\right)\Phi(r)\right] \\
\Gamma_{m,\gamma}(r,\mu) \approx (\Gamma/\varepsilon^\circ) N_{m,\sigma}(r,\mu) \\
\Phi(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-t^2}dt, \qquad X = \frac{gdk(\varepsilon^\circ)}{\varepsilon^\circ u^\circ \eta(\varepsilon^\circ)}, \qquad r\mu = \xi \mathbf{w}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Первая из этих формул — точная, все остальные получены с учетом оценок в начале параграфа. Выражения (2.2) совпадают с аналогичными выражениями, получаемыми по методу работы [1] (подробные вычисления были проведены для величины $S_{p,\sigma}$). Нетрудно показать, что величины (2.2) не имеют особенностей при $r = 0$.

Параметр $X$ в (2.2) представляет собой отношение сил тяжести к силам вязкого сопротивления и мал при больших скоростях фильтрации; члены $\sim X^2$ в формулах (2.2) должны отбрасываться, если нарушаются неравенства $X^2 \gg R/\beta$, $X^2 \gg 1/\beta$. При вычислении $\Gamma_{m,\gamma}$ было принято $d_1, d_2 \ll 1$. Это связано с тем, что $D_1, D_2 \sim u^\circ l$, а $d_1, d_2 \sim l/H \ll 1$. Выражения (2.2) представляют собой истинно тензорные величины в смысле работы [1]. Отсюда следует, что псевдотензорные составляющие корреляционных функций, наличие которых отмечено в [1], имеют высший порядок малости по величинам $R/\beta$ и $1/\beta$.

При $X \ll 1$ из (2.2) имеем

$$N_{m,\sigma} \approx -w_m \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon^\circ} e^{-r^2}, \qquad Q_{m,j} \approx w_m w_j \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon^{\circ 2}} e^{-r^2} \tag{2.3}$$

Эти соотношения справедливы при фильтрации под действием градиента давления, который значительно превосходит удельный вес жидкости, и наиболее интересны в практическом отношении.

Первая величина в (2.3) описывает уменьшение фильтрационного потока, отнесенного к градиенту приложенного давления, при переходе от однородного пористого тела к неоднородному с тем же значением средней пористости. Таким образом, дополнительный фильтрационный поток, наличие которого отмечалось в [1], имеет второй порядок по $\sigma_0$ и отрицателен.

Как легко видеть из (2.3), при слабом влиянии внешнего поля фильтрационная псевдотурбулентность имеет существенно «продольный» характер в том отношении, что компоненты случайной скорости в направлениях, перпендикулярных к направлению усредненного потока, практически отсутствуют. Скорость жидкости изменяется от точки к точке таким образом, что дисперсия локального потока жидкости равна нулю, и рассеяния жидкости на неоднородностях пористой среды не происходит. Это обстоятельство до некоторой степени оправдывает аналогичное предположение, использованное в [4] при исследовании пульсационных движений фаз во взвешенном слое. Как видно из (2.3), в рассматриваемом случае все двухточечные корреляции имеют тот же характер, что и исходная корреляция $\langle\sigma\sigma\rangle$.

С увеличением $X$ (например, при относительном уменьшении градиента давления) появляются и начинают играть роль поперечные компоненты случайной скорости. Дополнительный поток жидкости $\Delta Q$ начинает, в частности, зависеть от направления среднего потока (или силы тяжести). Из (2.2) имеем для потока $\Delta Q$, отнесенного к единице площади, выражение

$$\Delta \mathbf{Q} = -\sigma_0^2 \left( \frac{1}{\varepsilon^\circ} + \frac{2}{3} X \right) \mathbf{w} \tag{2.4}$$

Так как $X > 0$, если $\mathbf{q}$ и $\mathbf{w}$ направлены в разные стороны, видим, что уменьшение потока оказывается менее значительным при фильтрации в направлении силы тяжести, чем в противоположном случае. Если $X \sim \varepsilon^{-1}$, этот эффект может стать весьма значительным. Возможно, именно этой причиной хотя бы отчасти объясняется наблюдаемое различие в эффективности медленного вытеснения нефти водой из пласта в направлении по или против силы тяжести[1]. Другой интересный эффект, связанный с на-

[1] Авторы признательны А. Х. Мирзаджанзаде, сообщившему о наличии такого рода эффектов в промысловой практике.

личием внешнего поля, заключается в том, что наряду с компонентами в выражениях для корреляций, затухающими как $e^{-r^2}$, появляются компоненты, затухающие как различные отрицательные степени $r$. Эти компоненты играют существенную роль в процессах переноса и т. п. при $X \lesssim \varepsilon^{-1}$.

По корреляциям (2.2) нетрудно рассчитать различные микро- и макромасштабы псевдотурбулентности и строить на этой основе полуэмпирическую теорию процессов переноса аналогично таким теориям для обычной турбулентности. Ясно, что при $X \ll 1$ псевдотурбулентность приводит в первую очередь к возникновению дополнительного продольного диффузионного потока. Для получения выражения эффективного тензора диффузии, обусловленной псевдотурбулентностью, рассмотрим, следуя Бэтчелору [5], тензор рассеяния $\langle y_i y_j \rangle$, который в однородном поле зависит только от времени. Здесь $y_i$ — путь, проходимый выделенной жидкой частицей за время $t$, а усреднение в $\langle y_i y_j \rangle$ проводится по различным начальным положениям частицы либо же по большому числу жидких частиц. Стандартным путем получим [5]

$$\langle y_i(t) y_j(t) \rangle = \langle y_i(0) y_j(0) \rangle + \int_0^t dt' \int_0^{t'} [R_{i;j}(\tau) + R_{j,i}(\tau)]\, d\tau$$

Здесь $R_{i,j}(\tau)$ — лагранжева корреляция случайных скоростей. Искомый тензор псевдотурбулентной диффузии по определению равен

$$d_{ij}^* = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y_i(t) y_j(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^t [R_{i;j}(\tau) + R_{j,i}(\tau)]\, d\tau$$

В общем случае о связи между лагранжевой и эйлеровыми пространственными и временными корреляциями ничего не известно, лагранжева корреляция может быть лишь формально выражена через пространственно-временную эйлерову корреляционную функцию. Однако рассматриваемая псевдотурбулентность по самой своей природе стационарна (см. [1]), поэтому имеем [5]

$$R_{i,j}(\tau) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \rangle, \qquad \xi_k = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v_k^{(L)}(t')\, dt'$$

где $v_k^{(L)}$ — полная скорость выделяемой жидкой частицы. Полагая, в силу сделанных ранее допущений, $v_k^{(L)} \approx w_k$, получим уравнение

$$d_{ij}^* \approx \frac{1}{2} \int_0^t [Q_{i,j}(w\tau) + Q_{j,i}(w\tau)]\, d\tau = \int_0^t Q_{i,j}(w\tau)\, d\tau$$

В частности, при $X \ll 1$ из (2.3) без труда получим для безразмерных коэффициентов $d_{ij}^*$ равенства

$$d_{ij}^* \approx \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon^\circ}\right)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(t) \delta_{i1} \delta_{j1} \tag{2.5}$$

Заметим, что при выводе всех предыдущих выражений не учитывалась возможность обмена выделенной жидкой частицы с другими частицами, а также со скелетом пористого тела. Формально учет такого обмена может быть проведен по методу Бюргерса [5].

При малых и больших временах имеем соответственно из (2.5)

$$d_{11}{}^* \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon^\circ}\right)^2 t, \qquad d_{11}{}^* \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon^\circ}\right)^2$$

Напомним, что входящая сюда и в (2.5) величина $t$ обезразмерена по масштабу $H / u^\circ$.

Эффективные коэффициенты тензора диффузии, связанной с пересеченностью порового пространства, имеют порядок (при $t \to \infty$) $d_{ij} \sim l / H$. Отсюда ясно, что перенос за счет псевдотурбулентности оказывается весьма существенным в общем продольном переносе, если $l / H \ll (\sigma_0 / \varepsilon^\circ)^2$, что вполне реально. Таким образом, учет псевдотурбулентности чрезвычайно важен в первую очередь при анализе «размывания» границ раздела между разнородными жидкостями в пористом теле, например, при вытеснении нефти водой при контурном заводнении нефтеносного пласта. Для очень медленных движений, когда существенно влияние поля тяжести, нужно учитывать также псевдотурбулентные составляющие в поперечном переносе скалярной примеси. Выражения для соответствующих $d_{ij}{}^*$ могут быть получены из (2.2) прежним путем.

Заметим в заключение еще раз, что развитый метод исследования фильтрационной псевдотурбулентности почти без изменений применим и к более сложным задачам при отсутствии какой-либо симметрии.

Поступило 28 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А., Леонов А. И. Фильтрация жидкости в среде со случайной пористостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
2. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
3. Scheidegger A. E. Statistical Hydrodynamics in Porous Media. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.
4. Буевич Ю. А. Приближенная статистическая теория взвешенного слоя. ПМТФ, 1966, № 6.
5. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. Физматгиз, 1963.