

## СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ГОРЮЧЕЙ СМЕСЬЮ ГАЗОВ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ

С. М. ГИЛИНСКИЙ, Г. Г. ЧЕРНЫЙ

(Москва)

Пусть осесимметричное затупленное тело либо симметричный профиль помещены в равномерный сверхзвуковой поток горючей смеси газов с параметрами  $M_1$ ,  $p_1$ ,  $T_1$ . Перед телом образуется отходящая головная ударная волна, при прохождении которой смесь подвергается уплотнению и нагреванию. При этом в зависимости от условий в набегающем потоке могут реализоваться различные режимы течения за ударной волной. При небольших скоростях, температуре или давлении в набегающем потоке нагревание смеси может оказаться недостаточным для ее воспламенения и будет происходить обычное адиабатическое обтекание тела. В другом предельном случае температура за адиабатическим скачком и степень уплотнения газа в нем настолько велики, что смесь мгновенно воспламеняется и сгорает непосредственно за ударной волной в бесконечной тонкой зоне, т. е. образуется детонационная волна. Промежуточный случай соответствует режиму, при котором ширина зоны реакции сравнима с характерным линейным размером задачи, например радиусом кривизны тела в критической точке.

Задача о сверхзвуковом обтекании тела горючей смесью с образованием детонационного фронта решалась в работах [1, 2]. Исходная смесь и продукты сгорания считались совершенными газами с различными значениями показателя адиабаты  $\gamma$ .

В этих работах изучено влияние величины теплового эффекта реакции и скорости потока на картину течения и распределение газодинамических функций за детонационной волной.

В частности, расчеты показали, что сильная детонационная волна, образующаяся перед сферой, постепенно ослабевая, переходит в волну Чепмена — Жуге на конечном расстоянии от оси симметрии. Для плоского течения на примере обтекания кругового цилиндра показано, что режим Чепмена — Жуге устанавливается лишь асимптотически, т. е. в бесконечности.

Этот результат соответствует выводам работ [3, 4], в которых дается теоретический анализ асимптотического поведения нестационарных течений с плоскими, сферическими и цилиндрическими волнами детонации.

Имеющиеся эксперименты указывают на то, что в ряде случаев детонационная волна при ослаблении не вырождается в волну Чепмена — Жуге, а на некотором расстоянии от тела расщепляется на адиабатическую ударную волну и фронт медленного горения.

В рамках теории детонационного фронта нулевой толщины положение точки расщепления не может быть определено [1] и для его определения необходимо рассматривать структуру зоны горения в детонационной волне. В простейших предположениях такое рассмотрение было произведено в работе [5].

В настоящей работе приводится численное решение задачи обтекания сферы горючей смесью с простейшей моделью структуры зоны горения, при которой все течение за головной ударной волной состоит из двух областей адиабатического течения — индукционной области и области равновесного течения продуктов сгорания, разделенных фронтом горения, в котором смесь сгорает мгновенно. Решение дано только для дозвуковой и транзвуковой областей течения.

**1. Модель структуры зоны горения.** Известно, что для процесса горения водорода в воздухе характерным является наличие трех стадий. В течение начальной стадии происходит образование активных центров; концентрация последних изменяется на несколько порядков, но эти изменения не сопровождаются заметным тепловыделением. В следующей стадии скорость изменения концентраций промежуточных продуктов уменьшается, а вследствие экзотермичности реакции рекомбинации происходит интенсивное тепловыделение. В конечной стадии температура медленно продол-

жает расти (плотность соответственно падать) и асимптотически приближается к своему равновесному значению.

Расчету одномерных течений с большим числом неравновесно протекающих химических реакций посвящены, например, работы [6, 7]. Численное решение двумерной задачи обтекания тел в такой постановке сопряжено с вычислительными трудностями. Поэтому целесообразно изучить сначала течение с помощью простых моделей, приближенно описывающих структуру зоны реакций. Последнее оправдано и тем, что в настоящее время имеется скудная и неточная информация относительно численных значений констант скоростей реакций при горении, так что полученные с учетом большого числа реакций результаты могут рассматриваться тоже лишь как приближенные.

Учитывая то, что продолжительность начальной и конечной стадий процесса горения водорода существенно больше продолжительности промежуточной стадии, будем рассматривать следующую упрощенную модель зоны реакции в детонационной волне. Будем полагать, что за скачком в течение периода индукции можно пренебречь влиянием химических процессов на течение: по истечении периода индукции происходит воспламенение и мгновенное сгорание смеси, после чего газ вновь движется адиабатически.

Как и в работах [1, 2] отличие состава продуктов сгорания от исходной смеси учитывается путем изменения показателя адиабаты за фронтом пламени.

Продолжительность периода индукции или времени задержки воспламенения в частице, прошедшей через адиабатический скачок, зависит от давления и температуры за скачком. Эту зависимость можно взять из экспериментальных исследований в ударных трубах либо из теоретического анализа одномерных течений. Согласно экспериментальным данным [8], она имеет следующий вид:

$$\Gamma = \frac{A}{p} \exp \frac{E}{T} \quad (1.1)$$

Здесь при измерении величин  $\Gamma$ ,  $p$  и  $T$ , соответственно, в секундах, атмосферах и °К константы  $A$  и  $E$  имеют значения  $A = 45 \cdot 10^{-10}$ ,  $E = 10^4$ . В отличие от одномерного движения, в потоке за криволинейной головной волной время задержки воспламенения частицы зависит не только от местных значений давления и температуры непосредственно за волной, но и от того, в какие условия попадает частица при дальнейшем движении вдоль траектории. Для учета влияния этих условий введем функцию  $\Phi(p, T)$  при помощи соотношения

$$d\Phi = \frac{dt}{\Gamma(p, T)} \quad (1.2)$$

Здесь функция  $\Gamma(p, T)$  имеет тот же вид, что и правая часть выражения (1.1), причем будем считать, что значение  $\Phi$  непосредственно за адиабатическим скачком равно нулю, а в конце периода индукции — единице. Если  $\Gamma = \text{const}$ , то  $\Phi$  есть время, отсчитываемое от момента прохождения частицы через скачок, отнесенное к полному периоду индукции. Соответствующий смысл имеет функция  $\Phi$  и при  $\Gamma \neq \text{const}$ . Можно также интерпретировать  $\Phi$ , как концентрацию некоторого фиктивного компонента смеси, при достижении которой значения, равного единице, происходит мгновенное тепловыделение. В этом случае  $\Gamma^{-1}(p, T)$  есть скорость образования этого компонента.

Модель детонационной волны, подобная рассмотренной в этом разделе, использовалась в работе [9] при решении одномерных задач.

**2. Постановка и метод решения прямой задачи обтекания тела с учетом времени задержки воспламенения.** Согласно модели, описанной в п. 1, те-

чение за головной волной (фиг. 1) состоит из двух областей: индукционной области 1 и области равновесного течения продуктов сгорания 2, разделенных поверхностью разрыва — фронтом медленного горения. Задача нахождения течения состоит в решении двух связанных между собой краевых задач для областей 1 и 2.

Уравнения, описывающие движение газа в каждой из областей, имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla(\rho w) &= 0, & \rho(w\nabla)w + \nabla p &= 0 \\ (w\nabla) \left( \frac{w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) &= 0, & (w\nabla)\Phi &= \frac{1}{\Gamma(p, \rho)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $w$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность. Последнее уравнение следует рассматривать лишь в области 1. Граничными условиями в области 1 являются условия на адиабатической ударной волне и условие  $\Phi = 1$  на фронте пламени, а для области 2 — условия на фронте пламени и условие обтекания поверхности тела.

Введем декартовы координаты  $x, y$  и полярные координаты  $r, \varphi$ , и пусть проекции вектора скорости  $\bar{w}$  на радиальное и тангенциальное направления будут  $u, v$  (фиг. 1).

Припишем индексы 1, 2, 3, 4 соответственно параметрам в набегающем потоке, непосредственно за ударной волной, перед фронтом пламени и за фронтом пламени. Введем безразмерные переменные, отнеся линейные размеры к радиусу кривизны тела в критической точке  $R$ , скорость — к максимальной скорости набегающего потока  $V_{\max}$ , плотность — к  $\rho_1$ , давление — к  $\rho_1 V_{\max}^2$ .

Перейдем в системе (2.1) к новым зависимым переменным  $u, v, p, \psi$ , где  $\psi$  — функция, отнесенная к  $\rho_1 V_{\max} R^2$ . Для краткости выпишем лишь уравнение для определения функции  $\Phi$ , понимая, однако, в дальнейшем по этим уравнениям полную систему преобразованных уравнений:

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \omega_{\Phi} \quad (2.2)$$

где

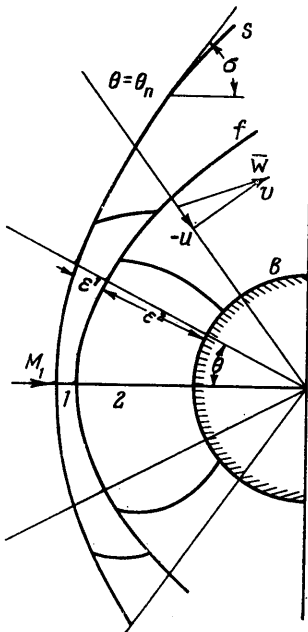
$$\begin{aligned} \omega_{\Phi} &= C \frac{p_1 R}{V_{\max}} \frac{p}{\exp[B\vartheta(\psi) p^{\gamma-1/\gamma}]} \\ \vartheta(\psi) &= \frac{p^{1/\gamma}}{\rho} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Константы  $C, B, V_{\max}$  связаны с параметрами набегающего потока  $\gamma_1, M_1, T_1$  следующим образом:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\gamma_1 M_1^2}{A V_1^2}, & B &= \frac{E V_1^2}{\gamma_1 T_1 M_1^2}, & V_1^2 &= \frac{(\gamma_1 - 1) M_1^2}{(\gamma_1 - 1) M_1^2 + 2} \\ V_{\max} &= \left[ \frac{\gamma_1 R_y T_1}{\mu_1} \left( M_1^2 + \frac{2}{\gamma_1 - 1} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $R_y$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu_1$  — молекулярный вес исходной смеси.

Для решения краевой задачи применим численный метод работ [10, 11].



Фиг. 1

Преобразуем область между ударной волной и фронтом пламени и область между фронтом пламени и контуром тела в полосы единичной ширины. Введем новые независимые переменные  $\xi^{(1)}$  и  $\theta$  для области 1, и переменные  $\xi^{(2)}$  и  $\theta$  для области 2 при помощи соотношений

$$\xi^{(1)} = \frac{r - r_f}{\varepsilon^{(1)}}, \quad \varepsilon^{(1)}(\theta) = r_s - r_f \quad (2.5)$$

$$\xi^{(2)} = \frac{r - r_b}{\varepsilon^{(2)}}, \quad \varepsilon^{(2)}(\theta) = r_f - r_b, \quad \theta = \varphi$$

Здесь  $r_s$ ,  $r_f$ ,  $r_b$  — длины радиусов-векторов точек ударной волны, фронта пламени и контура тела соответственно.

Запишем систему (2.2) в новых переменных и разрешим ее относительно производных по  $\xi$  (в дальнейшем индекс (1) и (2) опустим):

$$\partial f_k / \partial \xi = F_k(\xi, f_k, \partial f_j / \partial \theta) \quad (2.6)$$

( $k, j = 1, 2, \dots, 5$ )

Следуя идее метода, проведем  $2n + 1$  луч  $\theta = \text{const}$  в верхней и нижней полуплоскостях и производные по  $\theta$  аппроксимируем по значениям функций в  $2n + 1$  точке, при помощи интерполяционных полиномов

$$f_k = \sum_{j=0}^n f_{kj}^{(0)}(\xi) \theta^{2j}, \quad f_m = \sum_{j=0}^n f_{mj}^{(0)}(\xi) \theta^{2j+1}$$

соответственно для четных и для нечетных функций.

Система (2.6) такова, что достаточно вводить аппроксимацию по  $\theta$  лишь для трех функций  $u$ ,  $v$ ,  $\Phi$ .

Уравнения ударной волны и фронта пламени также представляются в виде полиномов:

$$r_s = \sum_{j=0}^n r_{sj}^{(0)} \theta^{2j}, \quad r_f = \sum_{j=0}^n r_{fj}^{(0)} \theta^{2j} \quad (2.7)$$

Заменив в системе (2.6) производные  $\partial f_j / \partial \theta$  их аппроксимирующими выражениями и требуя удовлетворения этой системы вдоль каждого луча, получаем систему

$$\frac{df_{km}}{d\xi} = F_{km}(\xi, f_{jl}) \quad \left( \begin{array}{l} k, j = 1, 2, \dots, 5 \\ m, l = 0, 1, \dots, n \end{array} \right) \quad (2.8)$$

В частности, уравнение для  $f_5 = \Phi$  выглядит следующим образом:

$$\frac{d\Phi_m}{d\xi} = \frac{\varepsilon_m(\omega_{\Phi m} - v_m \Phi_m' / (r_{fm} + \xi \varepsilon_m))}{u_m - (r_{fm}' + \xi \varepsilon_m') v_m / (f_{fm} + \xi \varepsilon_m)} \quad m = 0, 1, \dots, n$$

На оси симметрии уравнения для  $v$  и  $\psi$  в системе (2.8) тождественно удовлетворяются, поэтому для повышения точности системы вводится уравнение для  $v_0^0 = [\partial v / \partial \theta]_{\theta=0}$ . Для замыкания системы (2.8) нужно знать функцию  $\theta(\psi)$ . Эта функция вычисляется при заданной форме разрывов (2.7) с использованием геометрического соотношения

$$r' = -r \operatorname{ctg}(\sigma + \theta) \quad (2.9)$$

из граничных условий на разрыве.

Выпишем в явном виде зависимости параметров газа за фронтом разрыва от угла наклона фронта  $\sigma$  к оси  $x$ , от величины безразмерного параметра  $q$ , равного отношению подведенного на фронте к единице массы газа тепла к полному теплосодержанию того же количества газа перед фрон-

том, от значений показателей адиабаты перед фронтом и за ним и от значений параметров газа перед фронтом. Для фронта пламени эти зависимости имеют следующий вид:

$$V_{n4} = \frac{V_3}{\sin \beta} \left\{ \frac{\gamma_4 \sin^2 \beta}{\gamma_4 + 1} + \frac{1}{\gamma_4 + 1} \left( \frac{\gamma_4}{\gamma_3 M_3^2} - \left[ \left( \frac{\gamma_4}{\gamma_3 M_3^2} - \sin^2 \beta \right)^2 - B \sin^2 \beta \right]^{1/2} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$$B = 2(\gamma_4^2 - 1) \left[ \frac{q}{2V_3^2} - \left( \frac{\gamma_4}{\gamma_4 - 1} - \frac{\gamma_3}{\gamma_3 - 1} \right) \frac{1}{\gamma_3 M_3^2} \right]$$

$$V_{x4} = V_3 \left( \cos^2 \beta + \frac{V_{n4}}{V_3} \sin \beta \right), \quad V_{y4} = (V_3 - V_{x4}) \operatorname{ctg} \beta$$

$$u_4 = V_{y4} \sin(\theta + \Delta) - V_{x4} \cos(\theta + \Delta), \quad v_{04}^0 = v_{03}^0 + \frac{r_{f0}''}{r_{f0}} (V_{x4} + u_3)_0$$

$$v_4 = V_{y4} \cos(\theta + \Delta) + V_{x4} \sin(\theta + \Delta), \quad \psi_4 = \psi_3$$

$$p_4 = \rho_3 V_3^2 \left[ \frac{1}{\gamma_3 M_3^2} - \sin \beta \left( \frac{V_{n4}}{V_3} - \sin \beta \right) \right], \quad \rho_4 = \rho_3 \frac{V_3}{V_{n4}} \sin \beta$$

Здесь  $\Delta$  — угол наклона к оси  $x$  линии тока перед фронтом и  $\beta = \sigma - \Delta$ . Для адиабатического скачка индексы 3 и 4 нужно заменить, соответственно, на 1 и 2; кроме того, при этом  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $q = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\rho_1 = 1$ .

Для расчета течения за фронтом разрыва, в частности для нахождения функции  $\psi_4(\psi)$ , необходимо знать зависимость  $\psi = \psi(\theta)$  вдоль фронта. Эту зависимость можно аппроксимировать полиномом по известным значениям  $\psi$  в узлах, либо получить более точно, вычисляя интеграл

$$\psi = \int_0^\theta (r \sin \theta)^\nu \rho (vr' - ur) d\theta$$

Здесь  $\nu = 0, 1$  для плоского и осесимметричного течений; зависимость  $\rho(\theta)$  аппроксимируется полиномом по известным значениям функции в узлах. Подставляя полиномиальные выражения для функций и их производных под знак интеграла, получим формулу для функции  $\psi$  (в осесимметричном случае)

$$\psi = \int_0^\theta \sum_{k,i,m,l=0} r_{fj}^{(0)} r_{fk}^{(0)} \rho_i^{(0)} (2lv_i^{(0)} - u_m^{(0)}) \theta^N \sin \theta d\theta =$$

$$= P_{8n}(\theta) \cos \theta + Q_{8n-1}(\theta) \sin \theta, \quad N = 2(k + i + m + l) \quad (2.11)$$

Суммирование проводится независимо по четырем индексам;  $P(\theta)$ ,  $Q(\theta)$  — полиномы по  $\theta$ .

Для заданного значения  $\psi$  сначала из (2.11) определяется  $\theta$  методом Ньютона, а затем с помощью (2.10) находится  $\psi(\theta)$ . В случае плоского течения зависимость  $\psi(\theta)$  представляет собой полином 6  $n$ -й степени.

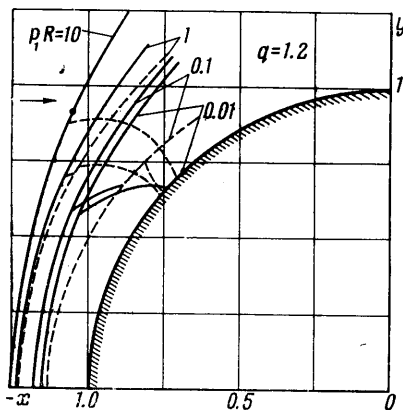
Для головного адиабатического скачка формула (2.11) значительно упрощается и становится хорошо известной

$$\psi = \frac{V_1}{1 + \nu} (r_s \sin \theta)^{1+\nu} \quad (2.12)$$

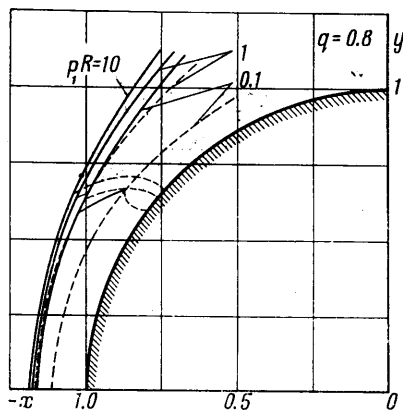
Итак, ищется решение краевой задачи для  $(5n - 1)$  обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8) относительно  $(5n - 1)$  неизвестных функ-

ций. Число уравнений можно сократить, заменив часть из них конечными соотношениями; однако целесообразнее использовать эти соотношения (например, интеграл Бернулли) в качестве одного из критериев точности расчетов.

Численный алгоритм решения задачи состоит в следующем: задаются  $(2n + 2)$  значений свободных параметров  $r_{sj}^{(0)}, r_{jj}^{(0)}$  ( $j = 0, 1 \dots n$ ), которые определяют положение и форму ударной волны и фронта пламени. По формулам (2.10) для адиабатического скачка с использованием (2.9)



Фиг. 2



Фиг. 3

вычисляются газодинамические функции за ударной волной в узлах. Для функции  $\Phi$  граничным условием будет  $\Phi = 0$  при  $r = r_s$  ( $\xi^{(1)} = 1$ ).

С этими начальными значениями решается система уравнений (2.8) до фронта пламени  $\xi^{(1)} = 0$ . На линии  $\xi^{(1)} = 0$  запоминается необходимая информация, в частности  $\Phi_m$  в узлах  $\theta = \theta_m$  ( $m = 0, 1 \dots n$ ) и коэффициенты интерполяционных полиномов для искомых функций. Далее вновь с помощью (2.10), (2.9) для фронта пламени рассчитываются начальные данные для области 2, т. е. на линии  $\xi^{(2)} = 1$ , и решается задача Коши для системы уравнений (2.8) до контура тела  $\xi^{(2)} = 0$ . Первоначально  $2n + 2$  свободных параметра задаются произвольно, поэтому  $2n + 2$  условия

$$\Phi_m = 1 \text{ при } \xi^{(1)} = 0, \quad u_m - \frac{r_b'}{r_b} v_m = 0 \text{ при } \xi^{(2)} = 0$$

не удовлетворяются. Подбор параметров осуществляется по схеме Ньютона и итерации ведутся до тех пор, пока эти условия не удовлетворятся с заданной степенью точности.

**3. Результаты расчетов.** По изложенной схеме были проведены расчеты обтекания сферы стехиометрической водородно-воздушной смесью в широком диапазоне изменения параметров набегающего потока и размеров сферы. Использовалась трехлучевая схема ( $n = 2$ ), дающая сравнительно невысокую точность решения, достаточно, однако, как показали оценки, для получения основных сведений о течении. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8) проводилось по схеме Рунге — Кутты с постоянным шагом  $\Delta\xi$ , который мог быть различным для областей 1 и 2. Величина шага варьировалась в диапазоне  $|\Delta\xi| = 0.2 - 0.05$ .

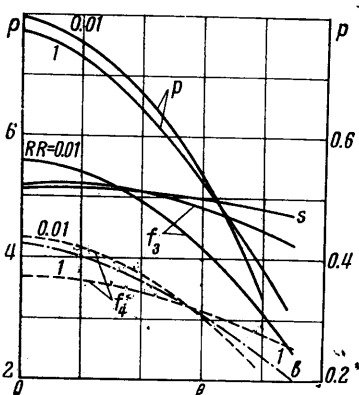
Параллельно с расчетом проводились различные оценки точности вычислений. Кроме того, расчеты вариантов, соответствующих режиму, близкому к детонационному, сопоставлялись с результатами работы [1], которые были получены с помощью 5-лучевой схемы. Все эти проверки показали, что случай, когда зона I относительно узкая, рассчитывается достаточно точно и погрешности расчета не превышают 1%.

Точность несколько падает, когда зона 2 становится узкой, однако и здесь положение ударных волн и фронтов пламени рассчитывается достаточно точно (погрешность порядка 2%); распределения функций в слое вычисляются с меньшей точностью, особенно в области 2. Погрешность здесь может достигать 10%.

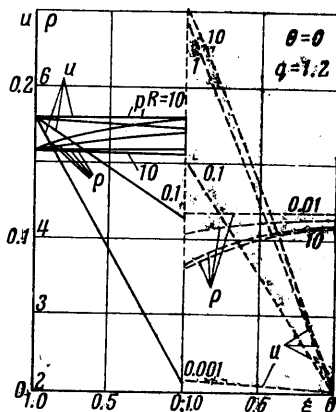
На фиг. 2—8 представлены некоторые результаты расчетов, характеризующие влияние на течение параметров набегающего потока и размеров сферы.

Для выбранной химической кинетики горения, как следует из формулы (2.3), важное значение имеет параметр  $K_1 = p_1 R / V_{\max}$ .

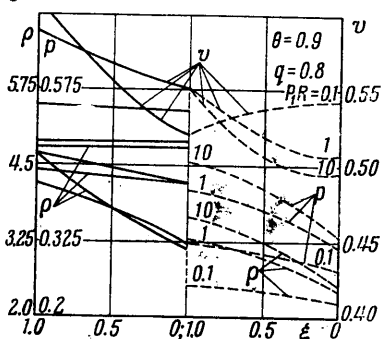
Влияние параметра  $p_1 R$  на картину течения около сферы иллюстрируют фиг. 2, 3, построенные для условий  $M_1 = 5.5$ ,  $T_1 = 300^\circ \text{K}$ ,  $q = 1.2$  и 0.8, соответственно. Пунктиром проведены фронты пламени и звуковые линии в области 2.



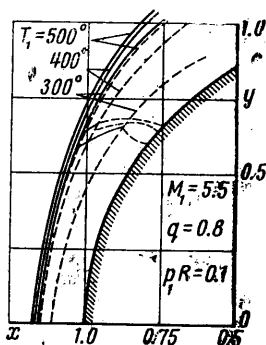
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Из графиков видно, что при  $p_1 R > 10$  ширина индукционной области пренебрежимо мала по сравнению с радиусом сферы на всем участке дозвуковой и трансзвуковой зон течения. С уменьшением  $p_1 R$  происходит отход фронта горения от ударной волны.

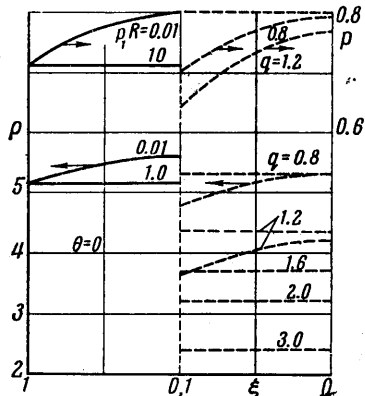
При  $p_1 R = 0.1$  ширина индукционной зоны составляет около половины ширины ударного слоя. Характерно, что фронт пламени с уменьшением  $p_1 R$  удаляется по нормали от ударной волны значительно сильнее в сверхзвуковой области, чем в окрестности оси симметрии, так что в окрестности критической точки при малых  $p_1 R$  образуется своеобразная шапка продуктов сгорания, сужающаяся вниз по потоку. При  $p_1 R = 0.01$  воспламенение происходит в непосредственной близости от поверхности сферы.

Отметим, что асимптотически при  $p_1 R$ , стремящемся к нулю, отход фронта пламени от сферы стремится к нулю вместе с величиной радиальной компоненты скорости  $u$ , перед фронтом. Поэтому  $d\Phi/d\xi \rightarrow \infty$  перед фронтом. При любом конечном значении параметра  $p_1 R$  на линии торможения происходит воспламенение. Последнее объясняется тем, что частица, прошедшая прямой скачок, достигает критическую

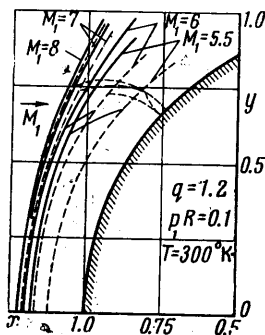
точку за бесконечно большое время, а период индукции, согласно (1.2), всегда конечен.

Интересна форма звуковых линий для различных режимов. Так как при  $p_1R > 10$  ширина индукционной области пренебрежимо мала, то звуковая линия в ней вырождается в точку; на фронте пламени звуковая линия имеет разрыв. В зоне продуктов сгорания она совпадает со звуковой линией, рассчитанной для соответствующего варианта обтекания сферы с детонационной волной нулевой ширины и имеет форму, выгнутую к сверхзвуковой части потока. Для меньших  $p_1R$  звуковая линия состоит из двух кусков с разрывом на фронте пламени. Начиная с  $p_1R \sim 0.2$  для  $q = 0.8$  звуковая линия в зоне продуктов сгорания имеет вогнутость в сторону сверхзвуковой части потока.

Разрывы звуковой линии качественно правильно отражают истинную картину распределения газодинамических функций с учетом неравновесного протекания реакций. Найденная форма звуковых линий является предельной при неограниченном



Фиг. 8



Фиг. 9

сужении зоны тепловыделения. Влияние параметра  $p_1R$  на распределение функций вдоль ударного слоя и поперек него для случаев  $M_1 = 5.5$ ,  $T_1 = 300^\circ \text{K}$ ,  $q = 0.8$  и 1.2 представлено на фиг. 4—6. Здесь индексы  $s$ ,  $f_s$ ,  $f_i$ ,  $b$  соответствуют распределениям за волной, перед фронтом пламени, за фронтом пламени, на теле. При уменьшении  $p_1R$  распределение плотности вдоль адиабатического скачка меняется мало, за фронтом пламени и вдоль поверхности сферы значительно сильнее. При этом градиенты параметров в направлении вдоль тела растут в трансзвуковой области.

Большое влияние на режим обтекания оказывает температура набегающего потока (фиг. 7). Изменение  $T_1$  от 300 до 700° K приводит к изменению течения в ударном слое от режима, близкого к адиабатическому обтеканию, к режиму, близкому к детонационному. Это связано с экспоненциальной зависимостью времени задержки от температуры.

Фиг. 8 иллюстрирует влияние величины теплового эффекта реакции  $q$  на распределение функций вдоль оси течения для трех различных режимов. При переходе к режиму, близкому к адиабатическому, влияние  $q$  на картину течения ослабевает. Когда фронт пламени находится в непосредственной окрестности поверхности сферы, скачок плотности и температуры на фронте практически не сказывается на течении в индукционной зоне.

Отметим, что для детонационной волны условие Жуге налагает ограничение на величину безразмерного параметра  $q$ , а именно он не должен превышать предельного значения, соответствующего детонации Чепмена — Жуге за прямым скачком:

$$q^* = (\gamma_1^2 - 1)^{-1} \quad (M_1^2 \gg 1) \quad (3.1)$$

Для предельного случая, когда фронт пламени располагается на теле, теплопровод может быть сколь угодно большим.

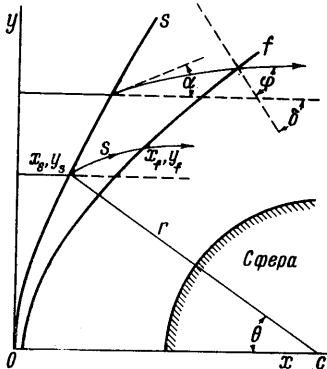
В заключение укажем на сильное влияние числа  $M_1$ , при росте которого течение за ударной волной переходит от близкого к адиабатическому до близкого к детонационному (фиг. 9).

При взятых значениях  $q$  и  $\gamma$  расстояние от тела до детонационной волны (при бесконечной скорости реакций) существенно больше, чем расстояние от тела до адиабатического скачка (при нулевой скорости реакций), при тех же значениях числа  $M_1$ . Поэтому при учете конечной скорости реакций расстояние головного скачка от тела с ростом числа  $M_1$  меняется немонотонно и в некотором диапазоне чисел  $M_1$  при росте  $M_1$  головная волна удаляется от тела.



**4. Обратный метод.** Рассмотрим режимы течения, близкие к детонационным, т. е. такие режимы, при которых ширина индукционной области за наиболее интенсивным участком ударной волны достаточно мала. Для этих режимов можно простым способом приближенно рассчитать такое значение параметра  $p_1 R$ , начиная с которого не происходит расщепления волны и при ее ослаблении устанавливается режим Чепмена — Жуге. Излагаемый ниже метод будет развитием метода изложенного в работе [5].

Будем считать, что расщепление детонационной волны происходит в сверхзвуковой области течения за волной. Тогда, пренебрегая влиянием конечной (но малой) ширины индукционной зоны на форму адиабатической



Фиг. 10

ударной волны, можно принять, что ударная волна будет совпадать с детонационной волной, рассчитанной в предположении бесконечно малой толщины зоны реакции (см. работу [1]).

Выберем декартову систему координат  $x, y$  с началом в вершине ударной волны. В работе [1] ударная волна задается в дозвуковой и трансзвуковой областях в виде полинома

$$r = r_0^{(0)} + r_1^{(0)}\theta^2 + r_2^{(0)}\theta^4 + r_3^{(0)}\theta^6 + r_4^{(0)}\theta^8 \quad (4.1)$$

а в сверхзвуковой части — в виде таблицы значений координат волны и угла наклона ее к оси симметрии  $\sigma$ .

При заданной форме головного адиабатического скачка можно найти положение и форму фронта пламени, а также значения параметров газа за ним. Вследствие предположения о малой толщине слоя газа между ударной волной и фронтом пламени можно приближенно записать (фиг. 10)

$$M_{n3} = \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial s} s \right) \cos \varphi = \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial s} s \right) \cos(\alpha + \delta + \kappa_s) \quad (4.2)$$

Здесь  $s$  — длина отрезка линии тока между ударной волной и фронтом пламени;  $\varphi$  — угол между линией тока и нормалью к фронту пламени;  $\alpha$  — угол наклона линии тока за ударной волной к оси  $x$ ,  $\delta$  — угол между нормалью к фронту и осью  $x$ ,  $\partial M_2 / \partial s$  — производная числа  $M$  по длине дуги линии тока, вычисленная в точке непосредственно за ударной волной,  $\kappa_s$  — кривизна линии тока в этой же точке.

Для производных  $\partial p_2 / \partial s$  и  $\partial \alpha / \partial s$ , справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial s} &= \frac{\rho_1 V_1^2}{1 - M_2^2 \sin^2(\sigma - \alpha)} \left\{ \frac{\sin 2\sigma \sin(\sigma - \alpha) \sin \alpha}{2 \cos(\sigma - \alpha) y} - \right. \\ &\quad \left. - \kappa_s \left[ \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos(\sigma - \alpha)} - \frac{4}{\gamma + 1} \cos(\sigma - \alpha) \sin 2\sigma \right] \right\} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \frac{\cos(\sigma - \alpha)}{1 - M_2^2 \sin^2(\sigma - \alpha)} \left\{ \frac{\sin(\sigma - \alpha) \sin \alpha}{y} - \right. \\ &\quad \left. - \kappa_s \left( \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\sigma} - \frac{4}{\gamma + 1} [1 - (2 - M_2^2) \sin^2(\sigma - \alpha)] \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $\kappa_s = d\sigma / d\tau$  — кривизна ударной волны. На оси симметрии функции  $\partial p_2 / \partial s$  и  $\partial \alpha / \partial s$  имеют особенности типа 0/0.

Раскрывая ее и обозначив

$$\left(\frac{d\alpha}{d\sigma}\right)_{\frac{1}{2}\pi} = 1 - \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right\}^{-1} = k_0 \quad (4.4)$$

находим

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial s}\right)_0 = \frac{\rho_1 V_1^2}{1 - M_2^2} \frac{2k_0 \kappa_{s0}}{1 - k_0}, \quad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)_0 = 0 \quad (4.5)$$

Величина производной по  $s$  от числа  $M$  за ударной волной вычисляется так:

$$\frac{\partial M_2}{\partial s} = \frac{p_2(M_2^2 - 2) - \rho_2 V_2^2}{2\gamma p_2^2 M_2^2} \frac{\partial p_2}{\partial s} \quad (4.6)$$

Пренебрегая изменением модуля скорости на отрезке линии тока до фронта пламени и используя зависимость времени задержки от давления и температуры (1.1), будем иметь

$$s = V_2 \Gamma = A \frac{a_1 M_2}{\rho_1 p_{21}} T_{21}^{\frac{1}{2}} \exp \frac{E}{T_1 T_{21}} \quad (4.7)$$

$$T_{21} = \frac{T_2}{T_1} \quad P_{21} = \frac{p_2}{p_1} \quad (4.8)$$

$a_1$  — скорость звука в невозмущенном потоке.

Введем, аналогично как и в разд. 2, безразмерные переменные и обозначим через  $x_s, y_s$  координаты ударной волны,  $x_f, y_f$  — координаты фронта пламени. Тогда для малых  $s$  ( $s$  — безразмерное) справедливы разложения

$$\begin{aligned} x_f &= x_s + s \cos \alpha - \frac{1}{2} s^2 \kappa_l \sin \alpha + o(s^3) \\ y_f &= y_s + s \sin \alpha + \frac{1}{2} s^2 \kappa_l \cos \alpha + o(s^3) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для наклона фронта пламени имеем формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta = \frac{dx_f}{dy_f} &= \left\{ \cos \sigma + s \kappa_s \left[ \cos \alpha \frac{d \ln s}{d\sigma} - \sin \alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \kappa_l s \frac{d \ln s}{d\sigma} \sin \alpha - \frac{1}{2} s \frac{d(\kappa_l \sin \alpha)}{d\sigma} \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \sin \sigma + s \kappa_s \left[ \sin \alpha \frac{d \ln s}{d\sigma} + \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa_l s \frac{d \ln s}{d\sigma} \cos \alpha + \frac{1}{2} s \frac{d(\kappa_l \sin \alpha)}{d\sigma} \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Все функции, входящие в правую часть (4.10), вычисляются через параметры, характеризующие форму скачка  $\sigma, \kappa_s, d\kappa_s/d\sigma$ . Формулы (4.9) и (4.10) дают координаты и наклон фронта пламени.

Теперь, используя величину  $M_{n3}$  и наклон фронта  $\delta$ , определим величину нормальной компоненты числа  $M$  за фронтом  $M_{n4}$ . Привлекая соотношения на разрыве (2.10) и используя уравнения состояния по обе стороны от фронта пламени, получаем связь температур смеси и продуктов сгорания в виде

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{\gamma_3 M_{n3}^2}{\gamma_4 M_{n4}^2} \left[ \frac{1 + \gamma_4 M_{n4}^2}{1 + \gamma_3 M_{n3}^2} \right] \frac{\mu_3}{\mu_4} \quad (4.11)$$

Здесь  $\mu_3, \mu_4$  — соответствующие молекулярные веса.

Введем «нормальный» коэффициент скорости

$$\lambda_n = V_n / a_{*n}$$

где  $a_{*n}$  — критическая скорость, рассчитанная по нормальной к фронту компоненте скорости.

Тогда можем записать

$$T_i = T_{0i}^{(n)} \left( 1 - \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i + 1} \lambda_{ni}^2 \right) \quad (i=3,4) \quad (4.12)$$

Связь  $M_{ni}$  с  $\lambda_{ni}$  дается формулой

$$M_{ni}^2 = \frac{[2/(\gamma_i + 1)] \lambda_{ni}^2}{1 - [(\gamma_i - 1)/(\gamma_i + 1)] \lambda_{ni}^2} \quad (4.13)$$

так что

$$\frac{T_{03}^{(n)}}{T_{04}^{(n)}} = \frac{\gamma_4 \mu_4 \gamma_3 + 1}{\gamma_3 \mu_3 \gamma_4 + 1} \frac{\lambda_{n4}^2}{\lambda_{n3}^2} \left[ \frac{1 + \lambda_{n3}^2}{1 + \lambda_{n4}^2} \right]^2 \quad (4.14)$$

Здесь  $T_{0i}^{(n)}$  — температура торможения, соответствующая нормальной компоненте вектора скорости.

Исключая  $\mu_i$  из (4.14), получаем связь нормальных коэффициентов скорости по обе стороны от фронта пламени в виде

$$(\lambda_{n3} + \lambda_{n3}^{-1}) \frac{\sqrt{\gamma_3^2 - 1}}{\gamma_3} = (\lambda_{n4} + \lambda_{n4}^{-1}) \frac{\sqrt{\gamma_4^2 - 1}}{\gamma_4} \left( \frac{c_{p4} T_{04}^{(n)}}{c_{p3} T_{03}^{(n)}} \right)^{1/2} \quad (4.15)$$

И, наконец, выразив отношение полных теплосодержаний по обе стороны фронта пламени через параметр тепловыделения  $q$ , получаем квадратное уравнение относительно  $\lambda_{n4}$ , разрешая которое будем иметь

$$\lambda_{n4} = \frac{\lambda_{n3} + \lambda_{n3}^{-1}}{A} - \left( \frac{(\lambda_{n3} + \lambda_{n3}^{-1})^2}{A^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

где

$$A = 2 \frac{\gamma_3}{\gamma_4} \left( \frac{\gamma_4^2 - 1}{\gamma_3^2 - 1} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{q [(\gamma_3 - 1) M_{n3}^2 + 2 \cos^2 \varphi]}{[(\gamma_3 - 1) M_{n3}^2 + 2] \cos^2 \varphi} \right\}^{-1/2}$$

Нормальная компонента числа  $M$  за фронтом  $M_{n4}$  рассчитывается с помощью (4.3), после чего по обычным формулам адиабатического течения можно вычислить остальные газодинамические параметры. Если радиус сферы бесконечно большой, то величина безразмерного отхода фронта пламени от ударной волны  $s$  равна нулю, и в этом случае справедливо решение, полученное в работе [1].

Критерием установления режима Чепмена — Жуге является выполнение за фронтом пламени условия  $M_{n4} = 1$ .

В рассматриваемой постановке это условие при любом радиусе сферы будет выполняться при достаточном удалении от тела. Действительно, так как форма ударной волны берется из решения, соответствующего мгновенному сгоранию смеси, то имеется участок волны, соответствующий режиму Чепмена — Жуге. Очевидно, что за этим участком фронт пламени параллелен ударной волне и  $M_{n2} = M_{n3}$ . Следовательно, при удалении вдоль ударной волны от оси течения за фронтом пламени будет стремиться к течению, соответствующему мгновенному сгоранию смеси за ударной волной.

В качестве критерия расщепления детонационной волны на адиабатическую ударную волну и фронт пламени в рассматриваемой постановке может служить

наличие перегиба фронта пламени или нарушение монотонности в распределении  $M_n$  за фронтом. Последнее условие является более чувствительной характеристикой.

С помощью описанной методики можно приближенно рассчитать минимальный радиус сферы, при котором еще возможно наступление режима Чепмена — Жуге. Подчеркнем еще раз, что в расчете предполагается малость величины  $s$  и не учитывается влияние расщепления на форму головной волны. Поэтому полученные выводы справедливы лишь для случаев течения, мало отличающихся от тех, при которых наступает режим Чепмена — Жуге.

**5. Численные расчеты, результаты и обсуждение.** По описанной методике были проведены расчеты обтекания сферы горючей смесью с различной величиной  $q$ . Форма ударной волны задавалась таблицей значений величины радиуса вектора ударной волны  $r(\theta)$  при  $0 \leq \theta \leq \theta_J$  ( $\theta_J = \pi - \sigma_J$ ) для равноотстоящих узлов по  $\theta$  ( $\sigma_J$  — наклон волны Чепмена — Жуге). Шаг  $\Delta\theta$  выбирался достаточно малым ( $\sim 0,05$ ), чтобы обеспечить высокую точность вычисления угла наклона волны  $\sigma$ , кривизны волны  $\kappa$ , и производной  $d\kappa/d\sigma$ . Для вычисления последних необходимо знать в расчетной точке функцию  $r = r(\theta)$  вплоть до третьей производной. Вычисление производных производилось по симметричной пятиточечной схеме.

В процессе отработки схемы выяснилось, что в дозвуковой и транзвуковой областях формула (4.1) дает плавное изменение вдоль волны кривизны и ее производной, а в сверхзвуковой области  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_J^0$  ( $\theta_J^0$  — координата точки Жуге на волне) изменение этих функций имеет резко немономонный колебательный характер с большой частотой.

Такой результат можно было ожидать, поскольку при расчете сверхзвуковой области на волне используется разностная аппроксимация только для первых производных, старшие же производные на таком решении, как правило, ведут себя нерегулярно. Чтобы избежать указанной нерегулярности формы ударной волны, проводилось аналитическое сглаживание ударной волны с помощью суммы экспоненциальных функций. При этом требовалось, чтобы функция, описывающая положение и форму ударной волны, проходила через вершину исходной ударной волны  $O$  ортогонально оси  $x$  (условие  $A$ ) и чтобы эта функция имела асимптотой соответствующую волну Жуге.

Аппроксимация достигается с помощью функции, заданной в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{aligned} x \cos \sigma_J + y \sin \sigma_J &= t \\ x \sin \sigma_J - y \cos \sigma_J &= a(b_1 e^{-t} + b_2 e^{-2t} + \dots + b_{n+1} e^{-(n+1)t} - 1) \\ b_1 + b_2 + \dots + b_n &= 1, \quad a = y_J \cos \sigma_J - x_J \sin \sigma_J \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $x_J, y_J$  — координаты точки Жуге. Свободные параметры  $b_i$  определяются из условия, что в качестве узлов интерполяции берутся заданные  $n$  точек ударной волны (включая точку на оси симметрии), и из условия  $A$ , т. е. как решение следующей алгебраической системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i e^{-it_j} = 1 - \frac{y_j + t_j \sin \sigma_J}{a \cos \sigma_J}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} i b_i = \frac{1}{a \operatorname{tg} \sigma_J} \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.2)$$

В полярной системе координат, в которой были расписаны основные формулы, (5.1) имеет вид

$$r \sin(\sigma_J + \theta) = r_0 \sin \sigma_J - a \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} b_i \exp \{i[r \cos(\sigma_J + \theta) - r_0 \cos \sigma_J]\} - 1 \right\} \quad (5.3)$$

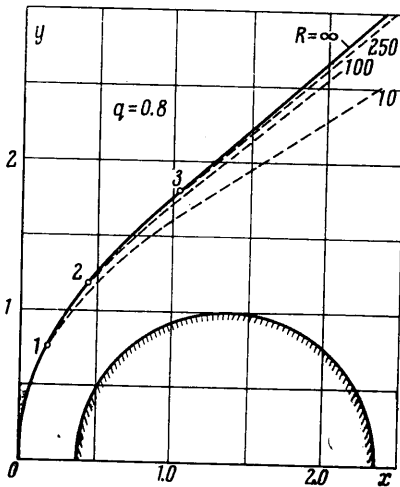
Здесь  $r_0$  — радиус-вектор вершины ударной волны.

Уравнение (5.3), трансцендентное относительно  $r$ , решалось численно по схеме Ньютона. Следует отметить, что хорошая аппроксимация для всех рассчитанных ударных волн с помощью функции (4.1) или (5.3) достигается уже при  $n = 3$ . При этом результаты, полученные с использованием (4.1) и (5.3) в дозвуковой и транзвуковой областях, отличаются мало, поэтому данные, представленные ниже, соответствуют ударным волнам (5.3).

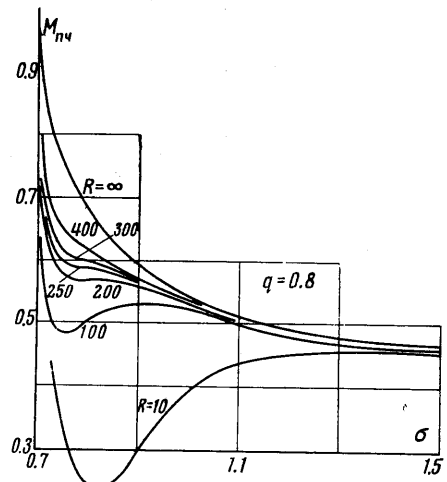
Не исследуя подробно влияния различных параметров, характеризующих течение горючей смеси, ограничимся примером расчета. Условия в набегающем потоке возьмем близкими к тем, которые были в экспериментах [12], [13] и в экспериментах, выполненных в Институте механики МГУ Н. А. Алексеевым и В. В. Семченко, а именно  $M_1 = 5.5$ ,  $T_1 = 300^\circ \text{K}$ ,  $p_1 = 0.25 \text{ атм}$ ; для стехиометрической смеси водорода с воздухом  $a_1 = 407 \text{ м/сек}$ ,  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 1.2$ .

На фиг. 11 для  $q = 0.8$  представлена картина течения около сфер различных радиусов, а на фиг. 12 — зависимость нормальной компоненты числа  $M$  за фронтом

пламени от угла наклона ударной волны в точке, откуда исходит соответствующая линия тока (фиг. 10).



Фиг. 11



Фиг. 12

Сравнение результатов для различных значений  $q$  указывает на сильное влияние теплового эффекта на структуру течения в ударном слое. Так, если для  $q = 1.0$  детонация Чепмена — Жуге реализуется уже при радиусе сферы  $\sim 20$  мм, то для  $q = 0.8$  размер сферы должен быть для этого увеличен примерно в 15 раз. Такой результат связан с очень сильной зависимостью времени задержки воспламенения от местной температуры за ударной волной.

Поступило 30 VIII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гилинский С. М., Запрынов З. Д., Черный Г. Г. Сверхзвуковое обтекание сферы горючей смесью газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Гилинский С. М., Запрынов З. Д. О переходе сверхзвукового течения горючей смеси газов к режиму Чепмена — Жуге. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
3. Черный Г. Г. Асимптотический закон распространения плоской детонационной волны. Докл. АН СССР. сер. «Математика, физика», 1967, т. 172, № 3.
4. Левин В. И., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн. ПММ, 1967, т. 31, № 2.
5. Самозванцев М. П. О стабилизации детонационных волн при помощи плохобтекаемых тел. ПМТФ, 1964, № 4.
6. Moretti G. A new technique for the numerical analysis of nonequilibrium flows. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 2. (русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 2).
7. Pergament H. S. A theoretical analysis of nonequilibrium hydrogen-air reactions in flow systems. AIAA — ASME Paper 63—113, 1963, April.
8. Ferri A., Libby P. A., Zakay V. Theoretical and experimental investigation of supersonic combustion. Third ICAS Congress, Stockholm, Sweden (August, 1962).
9. Gilbert R. B., Strehlow R. A. Theory of detonation initiation behind reflected shock waves. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 10 (русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 10).
10. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отходящей ударной волной. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
11. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отходящей ударной волной. Вычислительные методы и программирование, Сб. работ ВЦ МГУ, 1967.
12. A technique for studying supersonic combustion in the vicinity of hypersonic missile. Nat. Bur. Stand Techn. News Bull., 1960, vol. 44, No. 11.
13. Behrens H., Struth W., Wechen F. Studies of hypervelocity firings into mixtures of hydrogen with air or with oxygen. 10th Sympos (Internat) Combust. 1965, p. 245—252.