

пять его членов. Последовательные положения границы раздела ( $\lambda = 0, \beta = 0, A = 0,3$ ), рассчитанные по формулам (2.2) и (2.5), нанесены штриховой линией на фиг. 2. Можно отметить удовлетворительное согласование с результатом расчета на ЭЦВМ по уравнению (1.1) для значительного промежутка времени.

Выражения (2.2) и (2.5) описывают также выход поверхности раздела на стационарное положение. Как следует из (2.2), устойчивое положение достигается, когда  $a_n(t)$  перестают зависеть от времени  $t$ . Это возможно лишь при  $t \rightarrow \infty$ , что дает  $a_n = (3A)^{-1}$ .

Таким образом, форма поверхности стационарного конуса описывается выражением

$$f(r) = 1 + \frac{1}{3A\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{[r^2 + (2n-1+\beta)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (2n-1-\beta)^2]^{1/2}} \right\} \quad (2.6)$$

Можно убедиться, что (2.6) — решение уравнения (2.1) при условии равенства нулю скорости движения границы  $f_t(r, t)$ . Формула (2.6) сохраняет физический смысл для таких значений  $A$ , которые обеспечивают выполнение неравенства  $f(0) \leq \beta$ . Его верхняя граница определяет значения  $A_*$ , которые соответствуют предельному безводному дебиту (1.6). Штриховая линия на фиг. 3 дает значения  $A_*^{-1}$ , рассчитанные по формуле (2.6).

3. Аналогично можно изучить процесс оседания возмущенной границы раздела под действием силы тяжести при прекращении отбора жидкости из скважины. Линеаризованное уравнение движения границы раздела получается из (2.1), если положить последний член в фигурных скобках равным нулю. Решение задачи дается формулой (2.2), где

$$a_n(t) = e^{-0.5At(1+\lambda)} \left[ a_n^0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^0 \left( \sum_{p=0}^{n-1-i} c_{n-1-i}^p \lambda^p z_{n-1-p} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$c_{n-1-i}^p = \frac{(n-1-i)!}{p!(n-1-i-p)!}, \quad z_{n-1-p} = [(1-\lambda^2)At]^{n-1-p} \prod_{q=1}^{n-1-p} (2q)^{-1}$$

Здесь  $a_n^0$  соответствуют положению границы раздела в момент отключения скважины, от которого ведется отсчет времени в формуле (3.1). Как следует из (3.1), время, необходимое для полного оседания границы раздела, бесконечно.

Автор благодарен В. Л. Данилову за внимание к работе и ценные советы.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1957, № 11.
2. Кюхеман Д., Вебер И. Аэродинамика реактивных двигателей. Изд. иностр. лит., 1956.
3. Стклянин Ю. И., Телков А. П. Расчет предельных безводных дебитов в анизотропных пластах с осевой симметрией. ПМТФ, 1961, № 5.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ С ТОЧЕЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ  
В ИСКРИВЛЕННЫХ СЛОЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

К. Н. БЫСТРОВ (Москва)

1. Введение. В предположениях, что жидкость идеальна и несжимаема, течение установившееся, безвихревое и двумерное, а на криволинейной поверхности, лежащей в основании слоя жидкости, выбраны изотермические координаты  $X$  и  $Y$ , потенциал скорости  $\phi$  и функция тока  $\psi$  течения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{H(X, Y)} \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{H(X, Y)} \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (1.1)$$

где  $H(X, Y)$  — закон изменения толщины слоя жидкости.

Течения в слоях переменной толщины представляют интерес для газовой динамики и гидродинамической теории турбомашин [1]. Уравнения (1.1) справедливы для фильтрационных течений в пластах переменной проницаемости и мощности [2, 3]. Сходные уравнения возникают в двумерных стационарных задачах различной физической природы для неоднородной среды, например, в задачах диффузии, теплопроводности, электростатики, электропроводности, магнитостатики и т. п. в случае, когда характерный для данной задачи физический параметр, роль которого в гидродинамической интерпретации выполняет толщина слоя  $H$ , изменяется от точки к точке.

Течения от точечного источника и точечного вихря в произвольной точке слоя жидкости переменной толщины определяются как результат внесения в слой отрезка нити источников или вихревой нити, пересекающей ограничивающие слой поверхности по нормали к ним. Течения с точечными особенностями играют важную роль в перечисленных выше задачах. В гидродинамике слоев переменной толщины рассмотрение уже простейших особенностей позволяет решать некоторые задачи обтекания. В фильтрации точечные источники и стоки позволяют моделировать скважины. В задачах, где рассмотрение точечных особенностей оказывается недостаточным, они кладутся в основу более сложных представлений, например, непрерывных распределений по контуру. Во всех случаях построение точечных особенностей необходимо для решения краевых задач, поскольку описывающие их функции входят в качестве ядер в соответствующие интегральные уравнения.

**2. Квазианалитический комплексный потенциал.** Течения в слоях переменной толщины целесообразно рассматривать в связи с теорией квазианалитических функций комплексного переменного, представляющих собой замкнутый подкласс обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа [4].

Замечая, что система уравнений (1.1) сохраняет свой вид при конформных отображениях и предполагая, что закон изменения толщины слоя представим в виде

$$H(X, Y) = h[y(X, Y)] \quad (2.1)$$

где  $h(y)$  — однозначная, непрерывная и, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемая функция  $y$ , а  $y(X, Y)$  — произвольная гармоническая функция переменных  $X$  и  $Y$ , перейдем от независимых переменных  $X$  и  $Y$  к сопряженным гармоническим функциям  $x(X, Y)$  и  $y(X, Y)$  в качестве новых независимых переменных. Последние предпочтительны, так как определяемая ими изотермическая координатная сетка совпадает с линиями равной толщины слоя и ортогональными к ним.

Система уравнений (1.1) в плоскости  $xy$  принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{h(y)} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{h(y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

В этой форме уравнения, описывающие течения в слоях переменной толщины, совпадают с уравнениями газовой динамики в плоскости годографа скорости.

Комплексный потенциал течения

$$w(z) = \varphi + i\psi \quad (2.3)$$

построенный на основе решения системы (2.2), представляет собой квазианалитическую функцию комплексного переменного  $z = x + iy$ .

В случае квазианалитических функций нет необходимости обращаться к указанному И. Н. Векуа интегральному представлению, сопоставляющему заданной в области аналитической функции некоторую обобщенную аналитическую функцию, поскольку квазианалитические функции комплексного переменного могут быть связаны между собой непосредственно при помощи определенных операций дифференцирования и интегрирования в комплексной области.

Эти операции применительно к комплексному потенциалу (2.3), следуя Берсу и Жильбаргу [5], определяются равенствами

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{h(y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} - ih(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$\int_c w dz = \int_c \left[ \varphi dx - \frac{\psi}{h(y)} dy \right] + i \int_c [\psi dx + h(y) \varphi dy] \quad (2.5)$$

Они сохраняют принадлежность обобщенной производной и обобщенного интеграла классу решений исходной системы уравнений (2.2) и, следовательно, могут служить для построения новых квазианалитических потенциалов по уже известным.

Умножение комплексного потенциала (2.3) на  $i$  переводит решения системы уравнений (2.2) в решения аналогичной системы, но для сопряженного слоя жидкости с законом изменения толщины  $h^* = 1/h$  и, таким образом, не решает задачу пово-

рота заданного течения в исходном слое на угол  $1/2\pi$ . Подчеркивая аналогию с плоскопараллельными течениями жидкости, операцию поворота некоторого течения в данном слое переменной толщины на угол  $1/2\pi$  против часовой стрелки целесообразно назвать формальным умножением мнимой единицы на заданный комплексный потенциал  $w(z)$  и обозначить это формальное умножение символом  $\odot$ , который был использован Бергманом [6] для выделения обобщенной степени с целым положительным показателем и мнимым коэффициентом.

Формальное произведение комплексной постоянной  $a = \alpha + i\beta$  и квазианалитического потенциала некоторого течения  $w$  определяется равенством

$$a \odot w = (\alpha + i\beta) \odot w = \alpha w + \beta(i \odot w) \tag{2.6}$$

Выполнение этой операции сводится к осуществлению линейной суперпозиции комплексного потенциала исходного течения  $w$  и комплексного потенциала однотипного, но повернутого на угол  $1/2\pi$  по отношению к исходному течения  $i \odot w$  с действительными коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ .

**3. Комплексные потенциалы течений с точечными особенностями.** Потенциал скорости точечного источника и функция тока точечного вихря в произвольной точке  $z_0$  слоя жидкости переменной толщины описываются, соответственно, фундаментальными решениями уравнений потенциала скорости и функции тока, получаемых исключением функций  $\psi$  или  $\phi$  из системы (2.2). На основе этих решений строятся комплексные потенциалы источника  $w_1(z, z_0)$  и вихря  $w_2(z, z_0)$ , нормированные по расходу жидкости или циркуляции скорости к  $2\pi$ . В предположении, что закон изменения толщины слоя удовлетворяет условию (2.1), уравнения потенциала скорости и функции тока в переменных  $x$  и  $y$  допускают разделение переменных. Таким образом, в общем случае закона изменения толщины слоя вида  $h(y)$  фундаментальные решения могут быть представлены разложениями по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка [7].

Определяющими для построения элементарных квазианалитических функций с точечными особенностями являются комплексный потенциал вихреисточника, который выступает в качестве квазилогарифмической функции комплексного переменного, и комплексный потенциал покоящейся жидкости, который описывается произвольной комплексной постоянной.

Формальное произведение комплексной постоянной  $a = \alpha + i\beta$  и квазианалитического логарифма  $\ln(z, z_0)$  определяется равенством

$$a \odot \ln(z, z_0) = \alpha w_1(z, z_0) - \beta w_2(z, z_0) \tag{3.1}$$

Формальное умножение мнимой единицы на комплексные потенциалы точечного источника  $w_1$  и точечного вихря  $w_2$  подчиняется правилам

$$i \odot w_1 = -w_2; \quad i \odot w_2 = w_1 \tag{3.2}$$

Выражение (3.1) определяет вихреисточник в произвольной точке  $z_0$  слоя переменной толщины с произвольным соотношением мощностей источника и вихря.

Формальное произведение комплексной постоянной  $a = \alpha + i\beta$  и квазианалитической степени  $Z^{-n}(z, z_0)$  с целым отрицательным показателем степени определяется равенством

$$a \odot Z^{-n}(z, z_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} [a \odot \ln(z, z_0)] \tag{3.3}$$

Применительно к рассматриваемым течениям с точечными особенностями операция дифференцирования (2.4) отражает процесс наложения однотипных течений с особенностями разного знака и одинаковой мощности и их последующего сближения вдоль линии равной толщины слоя с одновременным увеличением мощности. Поэтому обобщенное дифференцирование комплексного потенциала вихреисточника приводит к комплексному потенциалу точечного диполя с произвольной ориентацией момента. Дифференцирование последнего дает комплексный потенциал квадрупольного момента. Равенство (3.3), таким образом, решает задачу построения комплексных потенциалов точечных мультиполей всех порядков в произвольной конечной точке  $z_0$  слоя переменной толщины. Целесообразность рассмотрения комплексного потенциала точечного мультиполя  $n$ -го порядка в качестве квазианалитической степенной функции диктуется тем, что в простейшем случае слоя постоянной толщины определение (3.3) приводит к обычным аналитическим степеням  $a(z - z_0)^{-n}$  с целым отрицательным показателем степени. Полагая в определении (3.3) постоянную  $a$  равной действительной или мнимой единице, можно получить более частные аналоги аналитических функций  $(z - z_0)^{-n}$  и  $i \odot (z - z_0)^{-n}$ .

Выражения, аналогичные аналитическим степеням с целыми положительными показателями степени, для рассматриваемой системы уравнений строились Берсом и Жильбартом [5], а также Бергманом [6]. На основе использования операции интегри-

рования (2.5) формальное произведение комплексной постоянной  $a = \alpha + i\beta$  и квазианалитической степени  $Z^n(z, z_0)$  с целым положительным показателем степени определяется равенством

$$a \odot Z^n(z, z_0) = n! \underbrace{\int_{z_0}^z dz \int_{z_0}^z dz \dots \int_{z_0}^z dz}_{n \text{ раз}} \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) определяет квазианалитические аналоги течений от мультиполя произвольного порядка  $n$  в бесконечно удаленной точке с нулями в точке  $z = z_0$ .

Последовательность основных течений с точечными особенностями, соответствующим комплексным потенциалам (3.1), (3.3) и (3.4), дает возможность строить более сложные течения посредством суперпозиции основных. Квазианалитические степени (3.4) приводят к рассмотрению квазианалитических полиномов и ряда Тейлора, позволяют ввести квазианалитические функции  $\sin(z, z_0)$ ,  $\cos(z, z_0)$  и  $\exp(z, z_0)$ . Степени (3.4) и (3.3) приводят к обобщенному ряду Лорана, которому соответствует разложение течения в кольце по мультиполям в центре кольца и в бесконечности. Рассмотрение непрерывных распределений особенностей по контуру приводит к обобщенному интегралу типа Коши.

Для функции  $w(z)$ , квазианалитической в области, обобщенная интегральная формула Коши записывается в виде

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c w(\xi) \odot Z^{-1}(\xi, z) d\xi \quad (3.5)$$

что позволяет представить комплексный потенциал течения внутри области по его значениям на контуре посредством непрерывного распределения точечных диполей по контуру области.

**4. Конформное соответствие слоев и течений.** Инвариантность формы уравнений (1.1) относительно конформных отображений использовалась выше для рационального выбора изотермической сетки на поверхности основания слоя переменной толщины при сохранении неизменным его рельефа. Если, однако, как новые независимые переменные  $x$  и  $y$ , так и прежние независимые переменные  $X$  и  $Y$  рассматривать в качестве декартовых координат плоскости основания слоя переменной толщины, то заданной аналитической функции  $x(X, Y) + iy(X, Y)$  будет соответствовать переход от рассмотрения течений в слое с законом изменения толщины  $H(X, Y)$ , подчиненным условию (2.1), к рассмотрению течений в слое с законом изменения толщины  $h(y)$  и новым рельефом. Соответствие областей течений и рельефов исходного и полученного слоев определяется видом конформного отображения.

Если основные течения с точечными особенностями построены для слоя с законом изменения толщины  $h(y)$ , то построение аналогичных течений для слоя с законом изменения толщины  $H(X, Y)$  сводится к суперпозиции уже полученных течений и конформному отображению. Так, суперпозиция нескольких точечных источников на плоскости основания слоя с законом изменения толщины  $h(y)$  позволяет получить течение от источника в пределах некоторой области этого слоя. Конформное отображение этой области на плоскость дает возможность построить течение от точечного источника в слое с законом изменения толщины  $H(X, Y)$ . В частности, построение течения от источника в слое, толщина которого изменяется в функции полярного радиуса, т. е.  $H = H(\sqrt{X^2 + Y^2})$ , сводится к получению течения от источника в полосе слоя с законом изменения толщины  $h(y)$  и с границами, параллельными оси  $y$ . Последнее течение реализуется рассмотрением бесконечной цепочки (решетки) источников равной мощности, размещенных на равных расстояниях один от другого вдоль прямой, параллельной оси  $x$ . Отображение полосы на плоскость посредством экспоненциальной функции приводит к течению от источника в слое с радиально меняющейся толщиной.

Таким образом, построение течений с точечными особенностями на плоскости основания слоя, толщина которого зависит от одной из декартовых координат, является исходным пунктом для построения аналогичных течений в слоях с более общими законами изменения толщины  $H(X, Y)$ .

**5. Приведенный потенциал. Течения в экспоненциальном слое.** Построение течения облегчено, когда потенциал скорости или функция тока течения от источника и вихря выражаются через известные функции математической физики. Для установления такой связи в ряде случаев удобно от потенциала скорости  $\varphi$  и функции тока  $\psi$  посредством замен

$$\varphi_* = h^{1/2}\varphi, \quad \psi_* = h^{-1/2}\psi \quad (5.1)$$

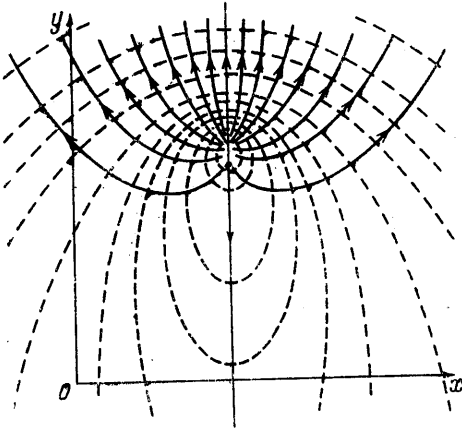
перейти к приведенному потенциалу  $\varphi_*$  и приведенной функции тока  $\psi_*$ , которые

удовлетворяют уравнениям

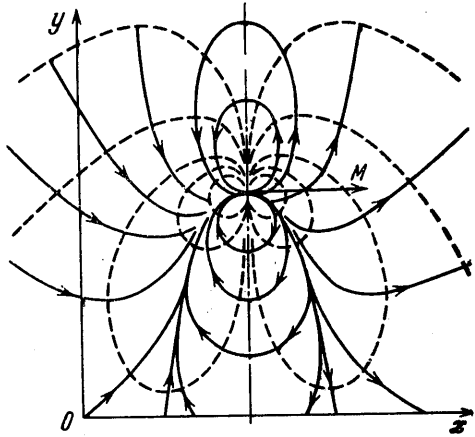
$$\Delta \psi_* - \frac{\Delta \sqrt{h}}{\sqrt{h}} \psi_* = 0, \quad \Delta \psi_* - \sqrt{h} \Delta \left( \frac{1}{\sqrt{h}} \right) \psi_* = 0 \quad (5.2)$$

Например, в случае слоя с экспоненциально изменяющейся толщиной  $h = e^{2\mu y}$ ,  $\mu = \text{const}$  (5.3)

уравнения приведенного потенциала и приведенной функции тока оказываются матагармоническими. Фундаментальное решение этого уравнения выражается через цилиндрическую функцию мнимого аргумента второго рода нулевого порядка  $K_0(\mu r)$  [7].



Фиг. 1



Фиг. 2

Потенциал скорости течения от точечного источника в произвольной точке  $(x_0, y_0)$  экспоненциального слоя записывается в виде

$$\varphi_1 = -\frac{\Pi}{2\pi} e^{-\mu y} e^{-\mu y_0} \times K_0[\mu \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}] \quad (5.4)$$

где  $\Pi$  — расход источника.

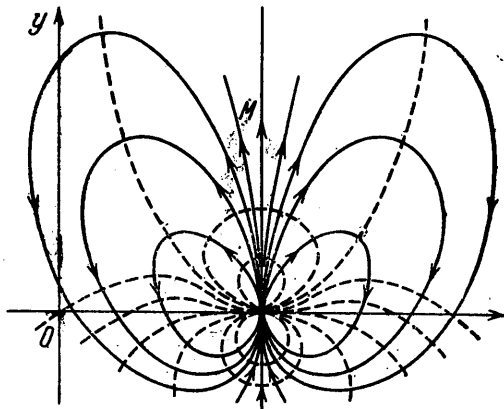
Сетка течения приведена на фиг. 1.

Функция тока течения от точечного вихря в экспоненциальном слое имеет аналогичное выражение

$$\psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} e^{\mu y} e^{\mu y_0} \times K_0[\mu \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}] \quad (5.5)$$

где  $\Gamma$  — интенсивность вихря.

Сетка течения совпадает с изображенной на фиг. 1, если поменять местами линии тока и линии равного потенциала, одновременно изменив направление оси  $y$  на обратное. Дифференцирование комплексных потенциалов источника и вихря в обобщенном смысле (2.4) приводит к комплексным потенциалам диполей, ориентированных параллельно координатным осям



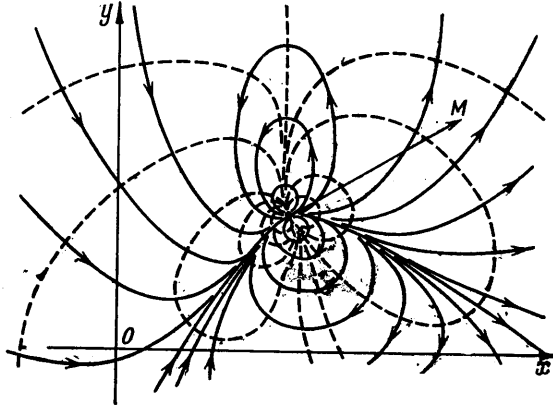
Фиг. 3

$$w = -\frac{M}{2\pi} \mu e^{-\mu y} e^{-\mu y_0} \left\{ K_1(\mu r) \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + i e^{2\mu y} \left[ -K_0(\mu r) - K_1(\mu r) \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right] \right\} \quad (5.6)$$

$$w = -\frac{M}{2\pi} \mu e^{-\mu y} e^{-\mu y_0} \left\{ K_1(\mu r) \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} - K_0(\mu r) + ie^{2\mu y} K_1(\mu r) \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right\} \quad (5.7)$$

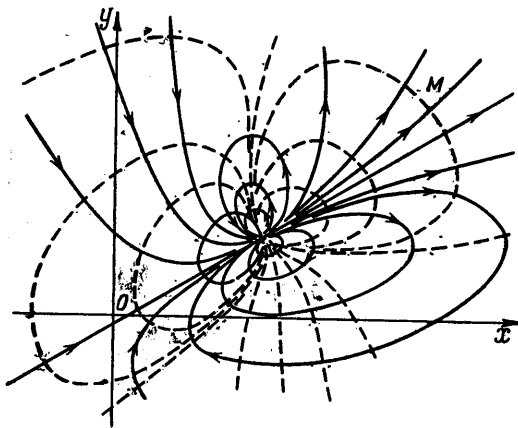
$$(r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

Сетки соответствующих течений приводятся на фиг. 2 и 3.



Фиг. 4

Суперпозиция диполей, ориентированных параллельно координатным осям, определяет диполь с произвольно ориентированным моментом. На фиг. 4 приведена сетка течения от диполя, момент которого образует угол  $1/6\pi$  с осью  $x$ .



Фиг. 5

Можно заметить, что наложив на течение, вызванное диполем произвольной ориентации, течение от точечного вихря интенсивности  $-M\mu e^{-\mu y_0}$ , находящегося в той же точке, что и диполь, удастся получить течение с функцией тока, которая в полярных координатах  $r$  и  $\theta$  с полюсом в точке  $(x_0, y_0)$  запишется в виде

$$\psi = \frac{(M_x \sin \theta - M_y \cos \theta)}{2\pi} \times e^{\mu r \sin \theta} \mu K_1(\mu r) \quad (5.8)$$

или, если положить  $M_x = M \cos \theta_1$  и  $M_y = M \sin \theta_1$ , в виде

$$\psi = \frac{M}{2\pi} e^{\mu r \sin \theta} \mu K_1(\mu r) \sin(\theta - \theta_1) \quad (5.9)$$

Такая суперпозиция диполя и вихря интересна в том отношении, что она обладает прямолинейной линией тока  $\theta = \theta_1$ . Сетка течения приведена на фиг. 5.

Продолжение процесса обобщенного дифференцирования комплексного потенциала вихресточника позволяет описать течение от точечного мультиполя порядка  $n$  в экспоненциальном слое посредством выражений, содержащих цилиндрические функции мнимого аргумента второго рода до  $n$ -го порядка включительно.

Комплексные потенциалы мультиполей в бесконечности для экспоненциального слоя, построение которых осуществляется на основе операции обобщенного интегрирования (2.5) и определения (3.4), выражаются в элементарных функциях. На фиг. 6 и 7 приведены соответственно сетки течений  $Z^2(z, 0)$  и  $i \odot Z^2(z, 0)$  для экспоненциального слоя, соответствующих аналитическим функциям  $z^2$  и  $iz^2$ .

6. Течения в степенных слоях. Для семейства степенных слоев с законами изменения толщины

$$h = y^n \tag{6.1}$$

где  $n$  — целое, определяющими являются слой с линейно изменяющейся толщиной (при  $n = 1$ ) и параболический слой (при  $n = 2$ ), поскольку течения в слоях с любым нечетным значением  $n$  строятся на основе течений в первом слое, а течения в слоях с любым четным значением  $n$  строятся на основе течений во втором слое с использованием принципа соответствия А. Вайнштейна [8]. Принцип соответствия устанавливает прямую связь между функциями, описывающими течение в слое с некоторым  $n$  и в слое со значением показателя степени  $n - 2$ .

Точечный источник и вихрь линейного слоя соответствуют круговой нити источников и круговой вихревой нити осесимметричной задачи гидродинамики [9].

Точечный источник в точке  $(x_0, y_0)$  линейного слоя описывается потенциалом скорости

$$\psi_1 = -\frac{\Pi}{2\pi} \frac{k}{\sqrt{yy_0}} K(k) \tag{6.2}$$

где  $\Pi$  — расход источника, а  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем

$$k = 2 \left( \frac{yy_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 4yy_0} \right)^{1/2} \tag{6.3}$$

Функция тока точечного вихря в точке  $(x_0, y_0)$  линейного слоя имеет вид

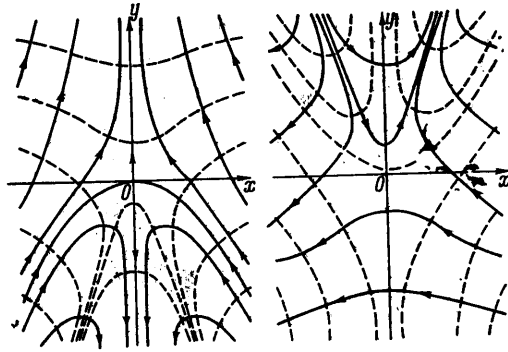
$$\psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sqrt{yy_0}}{k} [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)] \tag{6.4}$$

где  $\Gamma$  — циркуляция скорости, а  $E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Основные течения в параболическом слое качественно близки к соответствующим течениям в линейном слое, поскольку в обоих случаях имеются линия гидродинамического раздела на оси  $x$  и симметрия относительно этой оси. Уравнение приведенного потенциала скорости (5.2) для параболического слоя превращается в уравнение Лапласа. Потенциалы скорости и функции тока основных течений выражаются поэтому через гармонические функции.

Поступило 26 XI 1966

### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, 1962.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
3. Голубева О. В. Некоторые задачи ламинарной фильтрации в неоднородных искривленных слоях переменной толщины. ПММ, 1953, т. 17, вып. 4.
4. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, 1959.
5. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. of the Amer. Math. Soc., 1944, Vol. 56, No. 1.
6. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. Изд-во «Мир», 1964.
7. Титмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Изд-во иностр. лит., 1961, т. 2.
8. Вайнштейн А. Некоторые приложения теории обобщенного осесимметричного потенциала в механике сплошной среды. Приложения теории функций в механике сплошной среды (Тр. Международного симпозиума в Тбилиси 1963 г.) т. 2, Изд-во «Наука», 1965.
9. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.



Фиг. 6

Фиг. 7