

Так, например, если $H = 15$ м, $\sigma = 20$ эрг/см², $m = 0.25$, $\Delta\gamma = 0.34$ г/см³, $k_1 = k_2 = 1$ дарси, $\mu_1 = 2$ снз, то $B = 5$, а $t_c = 25.5$ τ (суток), т. е. $t_c \approx 19$ суток для варианта, представленного на фиг. 3. Если проницаемость нижнего пропластка уменьшить в два (фиг. 1) и десять раз (фиг. 2), то $t_c = 41$ сутки и $t_c = 185$ суток, соответственно. Расчеты при $k_2/k_1 = 100$ дали $t_c \approx 4$ года.

Изучалось влияние отношения вязкостей на процесс сегрегации. Так, при $k_2/k_1 = 10$, $s^* = 0.4$, $B = 3.7$, $\mu_0 = 0.5$, $\mu_0 = 1$ и $\mu_0 = 0.1$ безразмерное время сегрегации τ равно, соответственно, 4, 4.8 и 3.2. Если, например, $\mu_2 = 1$ снз, то для $\mu_0 = 1$ время $t_c \approx 61$ сутки, а для $\mu_0 = 0.1$ время $t_c = 413$ суток.

Авторы благодарят Старцеву Т. В. и Аминову Л. Х. за помощь в проведении расчетов.

Поступило 26 VI 1967

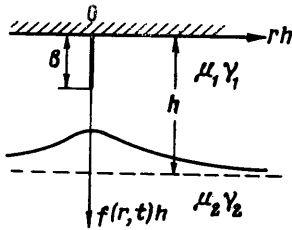
ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
2. Douglas I., Blair P. M., Wagner R. I. Calculation of Linear Waterflood Behavior Including the Effects of Capillary Pressure. Trans. AIME, 1958, vol. 213.

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Ю. С. АБРАМОВ (Киев)

Приводится интегро-дифференциальное уравнение пространственного движения границы раздела двух разновесомых разновязкостных жидкостей в пористой среде. Приведены результаты его численного решения. Дано общее решение задачи о динамике пологой границы раздела.



Фиг. 1

1. Рассматривается осесимметричная деформация первоначально плоской границы раздела между нефтью и водой в бесконечном по протяженности пласте. Кровля пласта непроницаема, нефтенасыщенный слой первоначальной мощности h вскрыт на глубину b скважиной-стоком с равномерно распределенным по длине расходом Q . Водонасыщенная мощность бесконечна (фиг. 1). Вязкости нефти и воды равны соответственно μ_1 и μ_2 , их удельные веса γ_1 и γ_2 . Проницаемость и пористость однородного пласта равны соответственно k и m . Жидкости и порода считаются несжимаемыми, фильтрация ламинарная, капиллярный эффект не учитывается, вытеснение идет при постоянных насыщениях в зоне замещения. Воспользовавшись методом,

изложенным в [1], можно показать, что движение границы раздела описывается следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением:

$$f_t(r, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi [\lambda f_t(\rho, t) + A(1 + \lambda)] \Phi(r, \rho, \psi, t) \rho d\rho d\psi = (1 + \lambda)[A + L(r, t)]$$

$$\Phi(r, \rho, \psi, t) = \frac{rf_r(r, t) - \rho f_r(\rho, t) \cos \psi + [f(\rho, t) - f(r, t)]}{\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + [f(\rho, t) - f(r, t)]^2\}^{3/2}} + \frac{rf_r(r, t) - \rho f_r(\rho, t) \cos \psi - [f(\rho, t) + f(r, t)]}{\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + [f(\rho, t) + f(r, t)]^2\}^{3/2}} \quad (1.1)$$

$$L(r, t) = \frac{1}{6\beta} \left\{ \frac{1 + r^{-1}f_r(r, t)[f(r, t) + \beta]}{\gamma r^2 + [f(r, t) + \beta]^2} - \frac{1 + r^{-1}f_r(r, t)[f(r, t) - \beta]}{\gamma r^2 + [f(r, t) - \beta]^2} \right\}$$

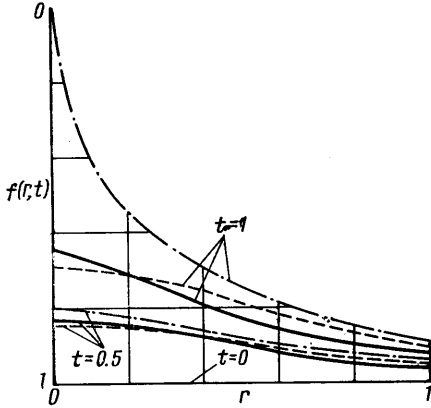
$$f_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \lambda = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad A = \frac{\pi k h^2 (\gamma_2 - \gamma_1)}{3Q\mu_1}, \quad t = \frac{3\tau Q}{2\pi m h^3}, \quad \beta = \frac{b}{h}$$

Здесь $r, \rho, f(r, t), f(\rho, t)$ — безразмерные цилиндрические координаты осесимметричной границы раздела (масштабом служит величина h); A — безразмерный динамический параметр; t — безразмерное время; τ — физическое время; β — степень вскрытия нефтенасыщенной мощности.

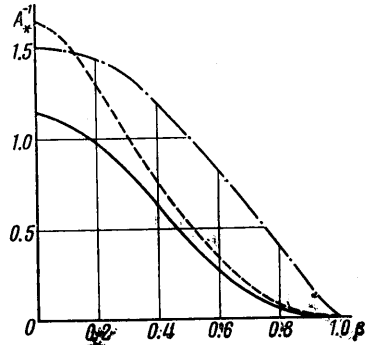
Уравнение (1.1) справедливо до момента достижения границей раздела скважины. Начальное положение границы известно

$$f(r, 0) = 1 \quad (1.2)$$

Задача отыскания функции $f(r, t)$, описывающей форму и положение границы раздела, сводится к задаче Коши для уравнения (1.1) при условии (1.2). Величина



Фиг. 2



Фиг. 3

$f_t(r, 0)$ определяется из уравнения (1.1), которое при $t = 0$ принимает вид

$$f_t(r, 0) + \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{f_t(\rho, 0) \rho d\rho d\psi}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + 4)^{3/2}} = \frac{1 + \lambda}{6\beta} \left[\frac{1}{[r^2 + (1 + \beta)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (1 - \beta)^2]^{1/2}} \right] \quad (1.3)$$

— уравнение Фредгольма второго рода относительно $f_t(r, 0)$. Его решение дается выражением

$$f_t(r, 0) = \frac{1 + \lambda}{6\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2n - 1 + \beta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2n - 1 - \beta)^2}} \right\} \quad (1.4)$$

Формула (1.4) получена при помощи соотношения

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\rho d\rho d\psi}{(\rho^2 + d^2)^{1/2} (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + c^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{c [r^2 + (d + c)^2]^{1/2}} \quad (1.5)$$

Решение задачи (1.1) — (1.4) требует применения ЭЦВМ. Для вычислений может быть применена явная суммирующе-разностная схема [4]. При этом один из повторных интегралов (по переменной ψ) в (1.1) вычисляется в квадратурах, а второй (по переменной ρ) — по формуле Симпсона после перехода к конечному промежутку интегрирования. Логарифмическая особенность в точке $r = \rho$ была выделена в отдельный интеграл, который вычислялся преобразованием Вондри [2]. Производная по времени f_t заменялась разностным отношением, а f_r вычислялась по формулам центральных производных.

Эта схема была реализована на ЭЦВМ «Минск-2». При расчетах получены последовательные положения границы раздела вплоть до момента достижения ею скважины. Перемещение границы раздела в одном из рассчитанных вариантов ($\beta = 0, \lambda = 0, A = 0.3$) показана на фиг. 2 (сплошные линии). Для сравнения штрих-пунктиром нанесены положения границы раздела при $A = 0, \lambda = 0$ («разноцветные» жидкости).

При численном решении реализуется выход поверхности раздела на стационарное положение. Причем форма и положение стационарной поверхности раздела не

зависят от соотношения вязкостей фильтрующихся жидкостей (т. е. от λ), а определяются только значением динамического параметра A .

Теоретически время, необходимое для формирования стационарной границы раздела, бесконечно. Однако практически при расчете за него принимался промежуток, в течение которого скорость движения границы по главной линии тока ($r=0$) уменьшалась в сто раз по сравнению с начальной, определяющейся по формуле (1.4). Темп формирования стационарной границы растет с увеличением λ . Предельное нижнее значение параметра A_* , при котором не происходит прорыва вытесняющей жидкости в скважину, соответствует предельному безводному дебиту скважины.

$$Q_* = \frac{\pi k h^2 (\gamma_2 - \gamma_1)}{3A_* \mu_1} \quad (1.6)$$

На фиг. 3 приведены значения величины A_*^{-1} , зависящие только от степени вскрытия пласта β (сплошная линия). Для сравнения приведены значения A_*^{-1} , полученные по методике [3], основывающейся на приближенной теории стационарного конуса подошвенной воды Маскета — Чарного (штрих-пунктирная линия). Эта методика была перефразирована для условий полубесконечного пласта. Подтверждается тот факт, что она дает верхний предел Q_* .

2. Как следует из фиг. 2, на значительном отрезке времени граница раздела имеет пологую форму и сравнительно мало отклоняется от первоначального положения. Это делает естественной линеаризацию исходного уравнения (1.1) методом, применяющимся в аэродинамике и теории длинных волн. Для этого делаются следующие допущения: $f_r(r, t) \approx 0$, $f(r, t) - f(\rho, t) \approx 0$. Тогда (1.1) после преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} f_t(r, t) + \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{f_t(\rho, t) \rho d\rho d\psi}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + 4)^{3/2}} = \\ = A(1 + \lambda) - \frac{A(1 + \lambda)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{[f(\rho, t) + f(r, t)] \rho d\rho d\psi}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + 4)^{3/2}} + \\ + \frac{1 + \lambda}{6\beta} \left\{ \frac{1}{[r^2 + (1 + \beta)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (1 - \beta)^2]^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для этого уравнения можно найти решение задачи Коши при условии (1.2). Решение отыскивается в виде

$$f(r, t) = 1 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n(t) \left\{ \frac{1}{[r^2 + (2n-1+\beta)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (2n-1-\beta)^2]^{1/2}} \right\} \quad (2.2)$$

Коэффициенты $a_n(t)$ подлежат определению.

Подстановка (2.2) в уравнение (2.1) с применением формулы (1.5) приводит к следующей системе линейных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $a_n(t)$:

$$da_n(t) / dt - a_n(t) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.3)$$

$$a_n(t) = -\frac{1 + \lambda}{6} \left\{ 3A \left[a_n(t) - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}(t) \lambda^{i-1} \right] - \lambda^{n-1} \right\} \quad (2.4)$$

Решение этой системы при системе начальных условий $a_n(0) = 0$ (что следует из (1.2) и (2.2)) дается формулой

$$\begin{aligned} a_n(t) = \frac{1}{3A} [1 - e^{-0.5 A t (1 + \lambda)}] + \\ + \frac{1}{24} e^{-0.5 A t (1 + \lambda)} \left[4(\lambda^{n-1} - 1)t + \sum_{i=2}^{n-1} 6^{2-i} (\lambda^{n-i} - 1)(1 - \lambda^2)^{i-1} A^{i-1} t^i \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Формулы (2.2) и (2.5) дают полное решение задачи динамики границы раздела. Ряд в (2.2) сходится хорошо, при практических расчетах достаточно учесть четыре —

пять его членов. Последовательные положения границы раздела ($\lambda = 0, \beta = 0, A = 0,3$), рассчитанные по формулам (2.2) и (2.5), нанесены штриховой линией на фиг. 2. Можно отметить удовлетворительное согласование с результатом расчета на ЭЦВМ по уравнению (1.1) для значительного промежутка времени.

Выражения (2.2) и (2.5) описывают также выход поверхности раздела на стационарное положение. Как следует из (2.2), устойчивое положение достигается, когда $a_n(t)$ перестают зависеть от времени t . Это возможно лишь при $t \rightarrow \infty$, что дает $a_n = (3A)^{-1}$.

Таким образом, форма поверхности стационарного конуса описывается выражением

$$f(r) = 1 + \frac{1}{3A\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{[r^2 + (2n-1+\beta)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + (2n-1-\beta)^2]^{1/2}} \right\} \quad (2.6)$$

Можно убедиться, что (2.6) — решение уравнения (2.4) при условии равенства нулю скорости движения границы $f_t(r, t)$. Формула (2.6) сохраняет физический смысл для таких значений A , которые обеспечивают выполнение неравенства $f(0) \leq \beta$. Его верхняя граница определяет значения A_* , которые соответствуют предельному безводному дебиту (1.6). Штриховая линия на фиг. 3 дает значения A_*^{-1} , рассчитанные по формуле (2.6).

3. Аналогично можно изучить процесс оседания возмущенной границы раздела под действием силы тяжести при прекращении отбора жидкости из скважины. Линеаризованное уравнение движения границы раздела получается из (2.1), если положить последний член в фигурных скобках равным нулю. Решение задачи дается формулой (2.2), где

$$a_n(t) = e^{-0.5At(1+\lambda)} \left[a_n^0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^0 \left(\sum_{p=0}^{n-1-i} c_{n-1-i}^p \lambda^p z_{n-i-p} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$c_{n-1-i}^p = \frac{(n-1-i)!}{p!(n-1-i-p)!}, \quad z_{n-i-p} = [(1-\lambda^2)At]^{n-i-p} \prod_{q=1}^{n-i-p} (2q)^{-1}$$

Здесь a_n^0 соответствуют положению границы раздела в момент отключения скважины, от которого ведется отсчет времени в формуле (3.1). Как следует из (3.1), время, необходимое для полного оседания границы раздела, бесконечно.

Автор благодарен В. Л. Данилову за внимание к работе и ценные советы.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1957, № 11.
2. Кюхеман Д., Вебер И. Аэродинамика реактивных двигателей. Изд. иностр. лит., 1956.
3. Стклянин Ю. И., Телков А. П. Расчет предельных безводных дебитов в анизотропных пластах с осевой симметрией. ПМТФ, 1961, № 5.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ С ТОЧЕЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ
В ИСКРИВЛЕННЫХ СЛОЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

К. Н. БЫСТРОВ (Москва)

1. Введение. В предположениях, что жидкость идеальна и несжимаема, течение установившееся, безвихревое и двумерное, а на криволинейной поверхности, лежащей в основании слоя жидкости, выбраны изотермические координаты X и Y , потенциал скорости ϕ и функция тока ψ течения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{H(X, Y)} \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{H(X, Y)} \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (1.1)$$

где $H(X, Y)$ — закон изменения толщины слоя жидкости.