

О КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННОМ РАЗДЕЛЕНИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Б. И. ЛЕВИ, М. И. ШВИДЛЕР

(Уфа, Москва)

Перераспределение жидких фаз под действием капиллярных и гравитационных сил определяет течение ряда процессов технологии добычи нефти и газа, миграции углеводородов и образования месторождений, подземного хранения нефти и газа в водонасыщенных структурах. Решение динамической задачи и сравнение этого решения с асимптотическим позволяет, помимо детального распределения фаз, определить продолжительность интенсивного периода сегрегации, т. е. время, в течение которого она практически заканчивается.

Рассматривается задача о динамике одномерной сегрегации несмешивающихся жидкостей в горизонтальном слоистом пласте. Процесс в этом случае описывается нелинейным дифференциальным уравнением параболического типа с разрывными коэффициентами и нелинейными краевыми условиями. Отличительной особенностью этого уравнения является существование разрывов решения в точках разрыва коэффициентов уравнения. В статье предлагается и реализуется на ЭВМ численный метод решения задачи. Рассматривается и динамическая сегрегация в однородном пласте. Для каждой задачи динамики указано асимптотическое решение при $t \rightarrow \infty$. Найден критерий существования контакта между фазами.

1. Рассмотрим горизонтальный слоистый пласт, состоящий из d пропластков с проницаемостями k_j ($j = 1, \dots, d$). Уравнение процесса сегрегации в слоистом пласте можно получить из системы уравнений одномерной двухфазной фильтрации несмешивающихся и несжимаемых¹ жидкостей в неоднородной по проницаемости пористой среде

$$V_1 = -\frac{k(x)k_1(s)}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \gamma_1 \sin \alpha \right), \quad V_2 = -\frac{k(x)k_2(s)}{\mu_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \gamma_2 \sin \alpha \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = m \frac{\partial s}{\partial t}, \quad p_k = p_1 - p_2$$

Здесь x — координата длины, t — время, $k(x)$ — абсолютная проницаемость пористой среды, s — насыщенность несмачивающей фазой, α — угол наклона оси x к горизонту, V_i — скорость фильтрации фазы i , μ_i — ее вязкость, k_i — относительная фазовая проницаемость, γ_i — объемный вес, p_i — давление в фазе, p_k — капиллярное давление. Считается, что индекс $i = 1$ относится к несмачивающей, а $i = 2$ — к смачивающей фазе.

Пусть ось x , имеющая начало на подошве пласта, направлена вертикально вверх и x_j — координата общей границы j -го и $j + 1$ -го пропластков. Полагая суммарную скорость фильтрации $V = V_1 + V_2$ равной нулю, систему (1.1) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_j k_1(s)}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_k^j}{\partial x} - \Delta \gamma \right) \left[1 + \mu_0 \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right]^{-1} \right\} = m \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\Delta \gamma = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \mu_0 = \mu_2 / \mu_1$$

где $k_j = k(x)$ при $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ ($x_0 = 0$, $x_d = H$, H — мощность пласта), p_k^j — капиллярное давление в пропластке j .

В точках разрыва коэффициентов функции $k(x)$ должны выполняться условия сопряжения, вытекающие из требования непрерывности потоков и капиллярного давления

$$V_i(x_i - 0, t) = V_i(x_j + 0, t), \quad p_k^j(x_j - 0, t) = p_k^{j+1}(x_j + 0, t) \quad (1.3)$$

Из второго условия (1.3) следует, что распределение насыщенности в точках разрыва коэффициентов является разрывным. Это вызывает определенные трудности при численном интегрировании уравнения (1.2), поскольку известные однородные разностные схемы сквозного счета [1] для уравнений с разрывными коэффициентами неприменимы.

Для построения однородной разностной схемы сквозного счета «размажем» разрывы проницаемости, заменив кусочно-постоянную проницаемость непрерывной

¹ Можно показать, что при решении ряда задач газожидкостной сегрегации допустимо пренебрегать растворимостью и сжимаемостью газа.

функцией

$$k^*(\zeta) = \begin{cases} k_{j-1}/k_0 & \text{при } \zeta_{j-1} + \varepsilon \leq \zeta \leq \zeta_j - \varepsilon \quad (\zeta = x/H) \\ [(k_j - k_{j-1})(\zeta - \zeta_j) + (k_j + k_{j-1})\varepsilon] (2k_0\varepsilon)^{-1} & \text{при } \zeta_j - \varepsilon \leq \zeta \leq \zeta_j + \varepsilon \\ k_j/k_0 & \text{при } \zeta_j + \varepsilon \leq \zeta \leq \zeta_{j+1} - \varepsilon \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь ε — достаточно малое число, k_0 — характерная проницаемость. Очевидно, что при достаточно малых ε решение задачи с размазанными коэффициентами близко к решению задачи для слоистого пласта.

Воспользуемся соотношением Леверетта

$$p_{k^j} = \sigma \sqrt{m/k_j f(s)}$$

Здесь σ — межфазное натяжение, f — функция Леверетта. Уравнение (1.2) приведем к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\sqrt{k^*(\zeta)} \varphi(s) \frac{\partial s}{\partial \zeta} \right] + \frac{\partial \rho(s, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial s}{\partial \tau} \quad (1.5)$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{B} \frac{k_1(s) k_2(s) f'(s)}{k_2(s) + \mu_0 k_1(s)}, \quad B = \frac{H \Delta \gamma \sqrt{k_0}}{\sigma \sqrt{m}}, \quad \tau = \frac{\Delta \gamma k_0 t}{m \mu_1 H}$$

$$\rho(s, \zeta) = - \frac{k_1(s) k_2(s)}{k_2(s) + \mu_0 k_1(s)} \left[k^*(\zeta) + \frac{dk^*(\zeta)/d\zeta}{\sqrt{k^*(\zeta)}} \frac{f(s)}{2B} \right]$$

Краевые условия для уравнения (1.5) следуют из равенства нулю скоростей фильтрации обеих жидких фаз на кровле и подошве пласта. Учитывая, что $dk^*(\zeta)/d\zeta = 0$ при $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ получим

$$\sqrt{k^*(\zeta)} \partial s / \partial \zeta = g(s, \zeta), \quad g(s, \zeta) = B k^*(\zeta) / f'(s) \quad (1.6)$$

В начальный момент $\tau = 0$ зададим распределение насыщенности несмачивающей фазой

$$s(\zeta, 0) = s^0(\zeta) \quad (1.7)$$

Краевую задачу (1.5)–(1.7) аппроксимируем следующей неявной разностной схемой:

$$\sqrt{k_{i+1/2}^*} \varphi_{i+1/2}^n (S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}) - \sqrt{k_{i-1/2}^*} \varphi_{i-1/2}^n (S_i^{n+1} - S_{i-1}^{n+1}) + h(\rho_{i+1/2}^n - \rho_{i-1/2}^n) = (S_i^{n+1} - S_i^n) h^2 / l \quad (1.8)$$

$(i = 1, \dots, N-1; N = 1/h)$

$$\sqrt{k_{1/2}^*} \varphi_{1/2}^n (S_1^{n+1} - S_0^{n+1}) = h \varphi_0^n g_0^n + 0.5 h^2 [(S_0^{n+1} - S_0^n) / l - 2(\rho_{1/2}^n - \rho_0^n) / h]$$

$$\sqrt{k_{N-1/2}^*} \varphi_{N-1/2}^n (S_N^{n+1} - S_{N-1}^{n+1}) =$$

$$= h \varphi_N^n g_N^n - 0.5 h^2 [(S_N^{n+1} - S_N^n) / l - 2(\rho_N^n - \rho_{N-1/2}^n) / h]$$

$$s_i^0 = s^0(ih), \quad (i = 0, \dots, N)$$

$$s_i^n = s(ih, nh), \quad \varphi_{i+1/2}^n = \varphi(s_{i+1/2}^n), \quad \rho_{i+1/2}^n = \rho(s_{i+1/2}^n, \zeta_{i+1/2}^n),$$

$$s_{i+1/2}^n = 0.5(s_i^n + s_{i+1}^n), \quad g_0^n = g(s_0^n, 0), \quad g_N^n = g(s_N^n, 1)$$

Здесь h и l — шаги по осям ζ и τ , соответственно.

Отметим, что для повышения точности разностной схемы, в особенности при большом числе пропластков, целесообразно перейти к неравномерной сетке в окрестности точек ζ_j , уменьшив шаг по оси ζ . Очевидно, при любом τ имеет место закон сохранения средней насыщенности

$$\int_0^1 s(\zeta, \tau) d\zeta = \int_0^1 s^0(\zeta) d\zeta = s^* \quad (1.9)$$

что позволяет в процессе счета контролировать приближенное решение.

2. Для оценки времени сегрегации необходимо найти асимптотическое решение сформулированной задачи при $t \rightarrow \infty$. Поскольку на временной асимптотике s от времени не зависит, скорости фаз равны нулю, из (1.5) вытекает уравнение, имеющее в случае однородного пласта проницаемости k_0 следующий вид

$$k_1(s)k_2(s) \left[f'(s) \frac{ds}{d\zeta} - B \right] = 0 \quad (2.1)$$

Очевидно, что $B > 0$, если смачивающая фаза тяжелее несмачивающей, т. е. пласт «гидрофилен», и $B < 0$ в случае гидрофобного пласта.

Для выделения единственного решения уравнения (2.1) воспользуемся уравнением (1.9).

Как известно, кривые $k_i(s)$ обладают следующими характерными особенностями: общей областью определения этих функций является интервал (s_1, s_2) , причем $k_1(s_1) = 0$, $k_2(s_2) = 0$, а в остальных точках интервала $k_i(s) \neq 0$. Поэтому внутри интервала (s_1, s_2) из (2.1) следует уравнение

$$f'(s) ds / d\zeta - B = 0$$

интеграл которого имеет вид

$$f(s) = B\zeta + C \quad (2.2)$$

где C — постоянная интегрирования, подлежащая определению из дополнительных условий.

Обращая (2.2), запишем $s = s(\zeta, B, C)$. Таким образом, уравнение (2.1) в точке ζ допускает одно из трех различных решений:

$$s(\zeta) = s_1, \quad s(\zeta) = s_2, \quad s(\zeta) = s(\zeta, B, C)$$

Пусть λ_1 и λ_2 — точки сопряжения решения 3 с решением 1 и 2 соответственно. Тогда для определения λ_i и C имеем систему уравнений

$$s_1 \lambda_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} s(\zeta, B, C) d\zeta + s_2(1 - \lambda_2) = s^*, \quad f(s_v) - B\lambda_v = C \quad (v = 1, 2) \quad (2.3)$$

Нетрудно показать, что при условии монотонности и ограниченности функции $f(s)$ система (2.3) имеет единственное решение $-\infty < \lambda_i < \infty$. При этом следует иметь в виду, что при непопадании λ_i в интервал $(0, 1)$ соответствующая точка сопряжения решений в «пласте» отсутствует. Очевидно, точки сопряжения естественно назвать соответственно нижним и верхним «контактами». При этом λ_1 отделяет зону, насыщенную смачивающей фазой с заземленной несмачивающей от так называемой переходной зоны, где обе фазы способны двигаться. Точка $\zeta = \lambda_2$ — граница между переходной зоной и зоной, где заземлена смачивающая фаза.

Очевидно, при фиксированном S^* и заданной функции $f(s)$ параметр B определяет положение контактов. Пусть B_1 и B_2 такие критические значения параметра B , при которых реализуется появление нижнего и верхнего контактов в пласте. Решив (2.3) относительно λ_i и положив $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$, легко определить B_1 и B_2 . Отсюда следует, что положение параметра B относительно интервала (B_1, B_2) будет критерием существования или отсутствия контактов в пласте. Так, например, если $B_1 < B < B_2$, то в случае $B < B_1$ в пласте контактов нет. Если $B_1 < B < B_2$, в пласте есть нижний, но нет верхнего контакта. Наконец, если $B > B_2$ есть оба контакта. Если же окажется, что $B_1 > B_2$, то критерием является положение B относительно интервала (B_2, B_1) с той разницей, что в случае попадания B внутрь интервала, в пласте есть верхний контакт, но нет нижнего. Отметим, что знак неравенства $B_1 \leq B_2$ определяется положением s^* относительно некоторого числа s_0^* таким образом, что если $s^* < s_0^*$, имеет место соотношение $B_1 < B_2$ и наоборот, если $s^* > s_0^*$, то $B_1 > B_2$. Естественно, что при $s^* = s_0^*$ параметры B_1 и B_2 равны.

В ряде исследований отмечается существенный рост $f(s)$ при приближении s к s_2 и поэтому принимается, что $s = s_2$ — вертикальная асимптота кривой $f(s)$. Рассмотрение этого случая показывает, что $B_2 = \infty$ и, следовательно, верхний контакт в пласте не реализуется, а критерием существования нижнего контакта является знак неравенства между B и B_1 .

Решив систему (2.3), нетрудно построить и само распределение насыщенности $s(\zeta)$. В случае гидрофобного пласта $B < 0$ и критерием существования контактов является положение числа $|B|$ относительно интервала (B_1, B_2) . Распределение $s(\zeta)$ получается из кривой насыщенности, построенной для $|B|$ зеркальным отражением последней относительно прямой $s = 1/2$. Очевидно, что если отметка контакта для $|B|$ равна λ , то для λ' — отметки контакта в случае $-|B|$ — будем иметь $\lambda' + \lambda = 1$.

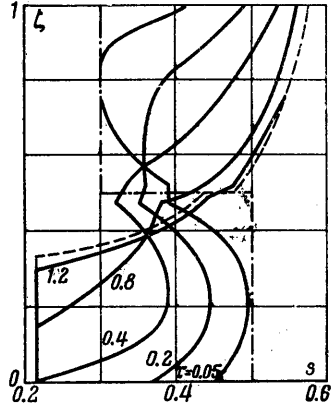
Отметим, что приведенная теория сравнительно просто обобщается для неоднородных пластов произвольной формы. Так, например, в случае слоистого горизонтального пласта B_i зависят также от проницаемостей и отношений мощностей пропластков. Кроме того, распределение насыщенности становится разрывным. Аналогичным образом строится теория и для трещиновато-пористых пластов.

3. По изложенным в пп. 1, 2 алгоритмам были проведены расчеты распределений $s(\xi, \tau)$ для двухслойного пласта с пропластками равной мощности. Число ϵ в (1.4) было взято равным 0.025, шаг $h = 0.005$. При вычислениях для обоих пропластков использовались одни и те же кривые относительных проницаемостей и капиллярного давления, заимствованные из работы [2] и имеющие вид

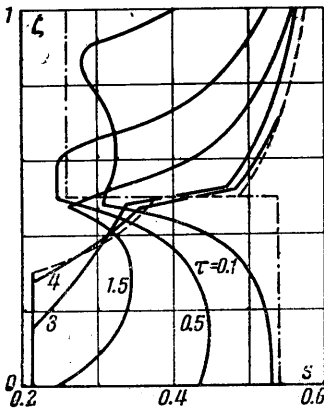
$$\begin{aligned} k_1(s) &= 1.4256(s - 0.216), \\ k_2(s) &= 1.6329(0.7 - s)^2 \\ f(s) &= 0.05669(0.7 - s)^{-2} - 0.242 \end{aligned}$$

В процессе вычислений осуществлялся контроль за приближенным решением при помощи соотношения (1.9), которое во всех расчетах выполнялось с точностью до десятых долей процента. Расчеты проводились для различных значений параметра B , отношений k_2/k_1 , μ_0 и начальных распределений $s^0(\xi)$.

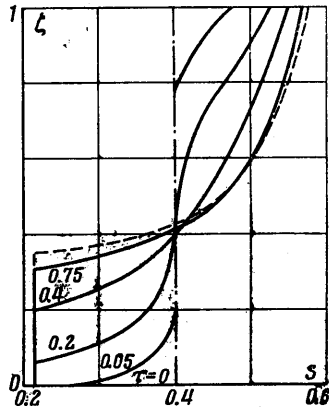
На фиг. 1 изображены кривые $s(\xi, \tau)$ для нескольких значений τ в случае, когда $\mu_0 = 0.5$, $s^* = 0.4$, $B = 4.3$, $k_0 = 0.5(k_1 + k_2)$, $k_2/k_1 = 2$, т. е. проницаемость верхнего пропластка в два раза выше проницаемости нижнего. Пунктирной линией на фиг. 1 отмечено асимптотическое распределение несмачивающей фазы, полученное методом, изложенным в п. 2, а штрих-пунктиром — начальное распределение. Поскольку в начальный момент тяжелая фаза находится в основном сверху, эволюция начального распределения к асимптотике представляется весьма значительной. Интересно поведение насыщенности на границе пропластков. Если в начальный момент скачок насыщенности велик по модулю и отрицателен, то по мере сегрегации модуль скачка быстро убывает, проходит через нуль, а затем растет. Меняется и знак скачка.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены кривые насыщенности для случая $\mu_0 = 0.5$, $s^* = 0.4$, $B = 3.7$, $k_0 = 0.5(k_1 + k_2)$, $k_2/k_1 = 10$. На фиг. 3 изображены для сравнения распределения в случае однородного пласта при $\mu_0 = 0.5$, $s^0 = s^* = 0.4$ и $B = 5$. Нетрудно проверить, что для кривых, изображенных на фиг. 1—3, параметр B различен только за счет уменьшения проницаемости в нижнем пропластке.

Проведенные расчеты показали хорошую сходимость предложенного метода. При достаточно больших τ кривые $S(\xi, \tau)$ — численные решения задачи (1.5) — (1.7) практически совпадают с соответствующими асимптотическими распределениями. Это позволяет достаточно точно оценить продолжительность интенсивного периода сегрегации, т. е. время, в течение которого процесс сегрегации практически заканчивается.

Так, например, если $H = 15$ м, $\sigma = 20$ эрг/см², $m = 0.25$, $\Delta\gamma = 0.34$ г/см³, $k_1 = k_2 = 1$ дарси, $\mu_1 = 2$ снз, то $B = 5$, а $t_c = 25.5$ τ (суток), т. е. $t_c \approx 19$ суток для варианта, представленного на фиг. 3. Если проницаемость нижнего пропластка уменьшить в два (фиг. 1) и десять раз (фиг. 2), то $t_c = 41$ сутки и $t_c = 185$ суток, соответственно. Расчеты при $k_2/k_1 = 100$ дали $t_c \approx 4$ года.

Изучалось влияние отношения вязкостей на процесс сегрегации. Так, при $k_2/k_1 = 10$, $s^* = 0.4$, $B = 3.7$, $\mu_0 = 0.5$, $\mu_0 = 1$ и $\mu_0 = 0.1$ безразмерное время сегрегации τ равно, соответственно, 4, 4.8 и 3.2. Если, например, $\mu_2 = 1$ снз, то для $\mu_0 = 1$ время $t_c \approx 61$ сутки, а для $\mu_0 = 0.1$ время $t_c = 413$ суток.

Авторы благодарят Старцеву Т. В. и Аминову Л. Х. за помощь в проведении расчетов.

Поступило 26 VI 1967

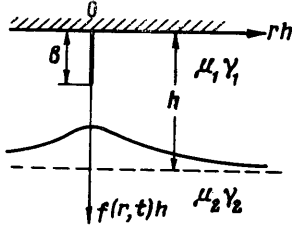
ЛИТЕРАТУРА

- Самарский А. А., Фрязинов И. В. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
- Douglas I., Blair P. M., Wagner R. I. Calculation of Linear Waterflood Behavior Including the Effects of Capillary Pressure. Trans. AIME, 1958, vol. 213.

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Ю. С. АБРАМОВ (Киев)

Приводится интегро-дифференциальное уравнение пространственного движения границы раздела двух разновесомых разновязкостных жидкостей в пористой среде. Приведены результаты его численного решения. Дано общее решение задачи о динамике пологой границы раздела.



Фиг. 1

1. Рассматривается осесимметричная деформация первоначально плоской границы раздела между нефтью и водой в бесконечном по протяженности пласте. Кровля пласта непроницаема, нефтенасыщенный слой первоначальной мощности h вскрыт на глубину b скважиной-стоком с равномерно распределенным по длине расходом Q . Водонасыщенная мощность бесконечна (фиг. 1). Вязкости нефти и воды равны соответственно μ_1 и μ_2 , их удельные веса γ_1 и γ_2 . Проницаемость и пористость однородного пласта равны соответственно k и m . Жидкости и порода считаются несжимаемыми, фильтрация ламинарная, капиллярный эффект не учитывается, вытеснение идет при постоянных насыщениях в зоне замещения. Воспользовавшись методом,

изложенным в [1], можно показать, что движение границы раздела описывается следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением:

$$f_t(r, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} [\lambda f_t(\rho, t) + A(1 + \lambda)] \Phi(r, \rho, \psi, t) \rho d\rho d\psi = (1 + \lambda)[A + L(r, t)]$$

$$\Phi(r, \rho, \psi, t) = \frac{r f_r(r, t) - \rho f_r(\rho, t) \cos \psi + [f(\rho, t) - f(r, t)]}{\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + [f(\rho, t) - f(r, t)]^2\}^{3/2}} + \frac{r f_r(r, t) - \rho f_r(\rho, t) \cos \psi - [f(\rho, t) + f(r, t)]}{\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + [f(\rho, t) + f(r, t)]^2\}^{3/2}} \quad (1.1)$$

$$L(r, t) = \frac{1}{6\beta} \left\{ \frac{1 + r^{-1} f_r(r, t) [f(r, t) + \beta]}{\gamma r^2 + [f(r, t) + \beta]^2} - \frac{1 + r^{-1} f_r(r, t) [f(r, t) - \beta]}{\gamma r^2 + [f(r, t) - \beta]^2} \right\}$$

$$f_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \lambda = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad A = \frac{\pi k h^2 (\gamma_2 - \gamma_1)}{3Q\mu_1}, \quad t = \frac{3\tau Q}{2\pi m h^3}, \quad \beta = \frac{b}{h}$$