

Решая обычное уравнение потока тепла от сферы с граничными условиями $\tau(\infty) = 0$ и (11), получаем

$$\psi(\sigma) = 1 - (1 + 0.541\sqrt{\pi}/\sigma)^{-1}$$

Эта зависимость показана на фиг. 1 штрих-пунктиром.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность М. Н. Когану за предложенную задачу и многочисленные обсуждения.

Поступило 31 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnager P. L., Gross E. P., Krook M. Model for Collision Processes in Gases. 1. Small Amplitude Processes in Charge and Neutral One Component Systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3.
2. Grad H. Principles of the Kinetic Theory of Gases. In: Handbuch der Physik. Bd. 12. Berlin, 1958.
3. Wellander P. On the Temperature Jump in a Rarefied Gas. Arkiv för Fysik, 1954, Bd. 7, Haft. 6, S. 507.
4. Lees L., Liu Ch. Y. Kinetic Theory Description of Conductive Heat-Transfer from a Fine Wire. Phys. Fluids, 1962. vol. 5, No. 10. Механика, Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1963, № 4.
5. Галкин В. С. Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

Основное кинетическое уравнение теории газов, уравнение Больцмана, представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение. Трудности, связанные с его решением, обусловлены не только большим количеством независимых переменных, в общем случае равном семи, но и весьма запутанной структурой интеграла столкновений. Однако для механики разреженных газов основной интерес представляет не сама функция распределения, удовлетворяющая уравнению Больцмана, а несколько ее первых моментов, т. е. осредненные характеристики. Это обстоятельство наводит на мысль о возможности получения осредненных величин более простым путем, чем прямой путь непосредственного решения уравнения Больцмана с последующим вычислением интегралов.

Хорошо известно, что если функция распределения удовлетворяет уравнению Больцмана, то ее моменты удовлетворяют бесконечной системе моментных уравнений. Следовательно, если мы хотим получить с удовлетворительной точностью некоторое число первых моментов, то должны потребовать, чтобы эти моменты удовлетворяли точной системе моментных уравнений. Отсюда, однако, еще не следует, что для определения интересующих нас моментов необходимо решать эту систему, хотя бы потому, что система моментных уравнений незамкнута. Замыкание системы путем задания вида функции распределения (метод моментов) можно рассматривать лишь как грубо приближенный метод решения задач. Во-первых, при этом невозможно удовлетворить всем уравнениям, и приходится ограничиваться некоторыми из них, во-вторых, вообще говоря, неизвестно какому уравнению удовлетворяет выбранная функция распределения и, следовательно, неизвестно, в какой мере она обладает свойствами функции распределения и, удовлетворяющей уравнению Больцмана.

Более надежным способом решения задач механики разреженных газов является способ, основанный на аппроксимации уравнения Больцмана, а точнее, интеграла столкновений. Идея замены интеграла столкновений более простым выражением нова [1-4]. Кинетические уравнения, полученные в результате такой замены, принято называть модельными, поскольку их вывод обычно основан на физических соображениях, а не на непосредственном использовании свойств больцмановского интеграла столкновений. В связи с этим неизвестно, в какой мере решения уравнения Больцмана и модельных уравнений оказываются близкими, тем более, что последние не дают возможности уточнения решения. Исключение составляют кинетические мо-

дели для линеаризованного уравнения Больдмана [5] и последовательность модельных уравнений работы [6], построенная методом, до некоторой степени аналогичным методу работы [5].

В настоящей работе для упрощения решения задач механики разреженных газов предлагается способ построения последовательности приближенных кинетических уравнений, основанный на аппроксимации интеграла соударений. Для каждого приближенного уравнения (т. е. уравнения с приближенным оператором соударений) несколько первых моментных уравнений совпадает с точными моментными уравнениями. Предполагается, что точность приближенного уравнения возрастает с увеличением числа точных моментных уравнений. Конкретно аппроксимация интеграла столкновений состоит в подходящей аппроксимации интеграла обратных столкновений и частоты столкновений. Интеграл обратных столкновений представляется в виде произведения частоты столкновений и некоторой функции, характеризующей обусловленное столкновениями распределение молекул по скоростям, причем последняя выбирается в виде локально-максвелловской функции, умноженной на полином относительно компонент собственных молекулярных скоростей. Частота столкновений аппроксимируется подходящим выражением, зависящим от условий задачи. Для большинства задач она может быть, по-видимому, принята равной частоте столкновений, вычисляемой по локально-максвелловской функции распределения; в случае необходимости ошибка за счет неточного вычисления частоты столкновений может быть уменьшена путем итераций.

Для иллюстрации метода решена простейшая задача теории разреженных газов — задача о релаксации первоначально однородного и изотропного распределения в неограниченном пространстве к равновесному распределению.

1. Запишем уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int (f'f'_i - ff_i)g \, d\sigma \, d\xi_i \equiv J(f, f) \tag{1.1}$$

Здесь $d\sigma = bdbd\epsilon$, $g = |\xi - \xi_i|$; предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Моменты функции распределения определим обычным образом

$$n = \int f \, d\xi, \quad \rho u_i = m \int \xi_i f \, d\xi, \quad P_{ij} = m \int c_i c_j f \, d\xi, \quad S_{ijk} = m \int c_i c_j c_k f \, d\xi, \dots \tag{1.2}$$

$$c_i = \xi_i - u_i, \quad S_i = S_{ijj}, \quad p = 1/3 P_{ii}, \quad p_{ij} = P_{ij} - p\delta_{ij} \tag{1.3}$$

Здесь m — масса молекулы.

Если функция f удовлетворяет уравнению Больцмана, то, как известно, ее моменты удовлетворяют бесконечной системе моментных уравнений, получающихся в результате умножения (1.1) на $1, \xi_i, \xi_i^2, \xi_i \xi_j, \xi_i \xi_j \xi_k$ и т. д. и последующего интегрирования по всему пространству скоростей. Структура этих уравнений хорошо известна [4, 7], и мы их выписывать не будем.

Наряду с точным кинетическим уравнением рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = Q(\xi_i, F, a(x_i, t)) \tag{1.4}$$

где Q — приближенный оператор соударений, зависящий от молекулярных скоростей, функции распределения и некоторой совокупности макроскопических функций, обозначенных одной буквой $a(x_i, t)$. Вид приближенного оператора столкновений Q пока произволен.

Потребуем, чтобы некоторое число первых моментных уравнений, полученных из приближенного уравнения (1.4), совпадало с точными. Поскольку дифференциальные части уравнений (1.1) и (1.4) совпадают, дифференциальные части моментных уравнений также будут совпадать. Следовательно, необходимое условие совпадения моментных уравнений состоит в равенстве соответствующих моментов от точного и приближенного операторов столкновений, т. е.

$$\int (\psi' - \psi) F F_i g \, d\sigma \, d\xi_i = \int \psi Q \, d\xi \tag{1.5}$$

Здесь

$$\psi = 1, \xi_i, \xi_i^2, \xi_i \xi_j, \xi_i \xi_j \xi_k$$

и т. д. или некоторой комбинации этих одночленов.

Уравнения (1.5) для заданного вида оператора Q , как функции ξ_i , F , $a(x_i, t)$ служат для определения совокупности макроскопических величин $a(x_i, t)$ в каждой точке физического пространства в каждый момент времени; число неизвестных должно совпадать с числом уравнений системы (1.5). Вид оператора Q уравнениями (1.5) не определяется и может изменяться, по-видимому, в широких пределах.

Условия (1.5) имеют довольно простой физический смысл. В самом деле, для произвольной функции распределения $F(t, x_i, \xi_i)$ величина $F(t, x_i, \xi_i) d\xi_i$ представляет собой число молекул ξ_i (т. е. со скоростями в пределах от ξ_i до $\xi_i + d\xi_i$) в точке x_i физического пространства в момент времени t , величина $J(F, F) d\xi_i$ — скорость изменения числа молекул ξ_i вследствие столкновений, а, например, величина $\xi_i \xi_j J d\xi_i$ — скорость изменения составляющей потока импульса вследствие изменения числа молекул ξ_i из-за соударений, причем $\int \xi_i \xi_j J(F, F) d\xi_i$ — скорость изменения той же составляющей потока импульса вследствие столкновения всех молекул.

Таким образом, условия (1.5) требуют от оператора Q сохранения свойств точного оператора столкновений по отношению к величинам осредненным по всем соударяющимся молекулам: скорости изменения числа частиц, импульса, энергии, потока импульса и т. д.

Из уравнения (1.4) с приближенным оператором столкновений, удовлетворяющим условиям (1.5), даже не конкретизируя вида Q как функции ξ_i , F и $a(x_i, t)$, можно вывести некоторые интересные следствия. Именно для пространственно-однородных движений максвеллова газа [6, 9] моментные уравнения, полученные из (1.4) при условиях (1.5), дают точные решения для любого числа первых моментов. Этот вывод непосредственно следует из совпадения моментных уравнений с точными при достаточном числе неопределенных функций $a(x_i, t)$ и начальных условий для искомого момента. Точно так же из совпадения моментных уравнений следует, что для движений максвеллова газа, близких к равновесным, обычным образом [4, 7] получаются точные уравнения Навье — Стокса.

2. Выберем теперь вид оператора Q . Обращаясь вновь к уравнению Больцмана, запишем его в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \nu(f^+ - f) \quad (2.1)$$

$$\nu = \int f_1 g d\sigma d\xi_1, \quad f^+ = \frac{J^+}{\nu}, \quad J^+ = \int f' f_1' g d\sigma d\xi_1$$

Здесь ν — частота столкновений, J^+ — интеграл обратных столкновений; радиус взаимодействия молекул будем считать конечным.

Приближенное кинетическое уравнение (1.4) запишем в аналогичной форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = N(F^+ - F) \equiv Q \quad (2.2)$$

Функции f^+ и F^+ характеризуют распределение по скоростям молекул, образующихся при столкновениях и, следовательно, должны быть достаточно гладкими функциями. Можно предположить, что F^+ достаточно хорошо может быть аппроксимирована локально-максвелловской функцией, умноженной на некоторый полином относительно компонент скоростей. Таким образом, положим

$$F^+ = F^{(0)} [a^{(0)} + a_i^{(1)} c_i + a_{ij}^{(2)} c_i c_j + a_{ijk}^{(3)} c_i c_j c_k + \dots] \quad (2.3)$$

Здесь $F^{(0)}$ — локально-максвелловская функция распределения, а совокупность коэффициентов $a(x_i, t)$ находится из решения системы (1.5), которая при F^+ вида (2.3) и при заданной функции распределения F представляет собой линейную алгебраическую систему относительно неизвестных $a(x_i, t)$. При этом функции ψ — степенные одночлены по компонентам скоростей того же вида, что и степенные одночлены относительно компонент тепловых скоростей в (2.3).

Отметим, что применение метода Энскога — Чепмена к уравнению (2.1) в первом приближении дает для f^+ выражение

$$f^+ = f^{(0)} \left[1 + \frac{P_{ij}}{2pRT} \left(1 - \frac{p}{\mu\nu^{(0)}} \right) c_i c_j + \frac{S_i c_i}{5pRT} \left(\frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{p}{\mu\nu^{(0)}} \right) \right] \quad (2.4)$$

Здесь $f^{(0)}$ — локально-максвелловская функция распределения, μ — вязкость, $\nu^{(0)}$ — частота столкновений, определенная по $f^{(0)}$. Величину $p/\mu\nu^{(0)}$ можно аппроксимировать полиномом по c и привести (2.4) к виду (2.3).

Основываясь на (2.4), можно предположить, что для большинства задач F^+ в уравнении (2.2) достаточно взять в виде

$$F^+ = F^{(0)} \left[a^{(0)} + a_i^{(1)} c_i + a_{ij}^{(2)} \left(1 - \frac{p}{\mu N^{(0)}} \right) c_i c_j + a_i^{(3)} c_i \left(1 - \frac{2}{3} \frac{p}{\mu N^{(0)}} \right) \left(\frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2} \right) \right] \quad (2.5)$$

Здесь $N^{(0)}$ — частота, определенная по $F^{(0)}$. В случае необходимости выражение в скобках может быть дополнено слагаемыми четвертого или даже более высокого порядка. При F^+ вида (2.5) в уравнениях (1.5) функции задаются в виде $\psi = 1, \xi_i, \xi_i \xi_j, \xi_i \xi_i^2$.

3. Если при решении задачи возможно запоминание функции распределения, то можно ограничиться уже полученной формой приближенного оператора столкновений, т. е. задавать Q в виде $N(F^+ - F)$, причем F^+ определяется формулой (2.3) или более простой (2.5). Однако в большинстве случаев запоминание функции распределения невозможно и приходится обратиться к аппроксимации частоты столкновений N . По-видимому, для большинства задач частота столкновений достаточно хорошо аппроксимируется частотой, вычисляемой по локально-максвелловской функции распределения. Таким образом, будем полагать частоту столкновений равной $N^{(0)}$, т. е. вместо уравнения (2.2) рассматривать уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = N^{(0)}(F^+ - F) \quad (3.1)$$

Частота столкновений может быть выбрана и в другом виде, более соответствующем решаемой конкретной задаче. В случае необходимости ошибка за счет неточного вычисления частоты столкновений может быть уменьшена путем итераций.

Отметим, что для псевдомаксвелловских молекул, когда N не зависит от молекулярных скоростей, а все моменты от интеграла столкновений выражаются через моменты функции распределения, получаем обобщенную модель Крукса с правильным числом Прандтля.

Уравнение (3.1) может быть записано в интегральной форме. Получающееся при этом выражение для F можно подставить в уравнения (1.5) и таким образом исключить функцию распределения из рассмотрения, построив замкнутую систему уравнений относительно макроскопических величин.

4. Выше было отмечено, что точные уравнения Навье — Стокса получаются для максвеллова газа из моментных уравнений. Для произвольных молекул строгое доказательство возможности получения точных уравнений сплошной среды затруднено. В самом деле, при $N^{(0)} \rightarrow \infty$, когда левой частью уравнения (3.1) можно пренебречь по сравнению с правой, имеем

$$N^{(0)}(F^+ - F) = 0, \quad \text{или } F = F^+$$

Система уравнений (1.5) при этом имеет вид

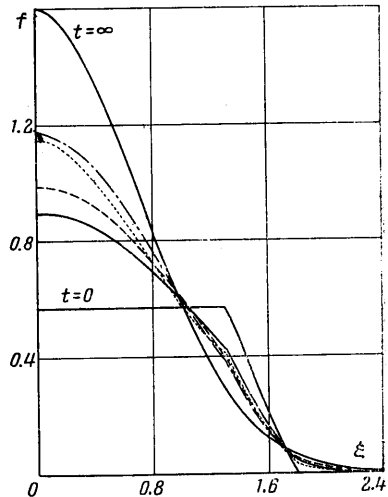
$$\int (\psi' - \psi) F F_{1g} d\sigma d\xi d\xi_1 = 0$$

т. е. представляет собой систему однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a(x_i, t)$, и, очевидно, обладает нулевым решением, т. е.

$$F = F^+ = F^{(0)}$$

Однако в пользу единственности этого решения, кроме непосредственной проверки при решении задач, легко привести только физические соображения.

Аналогично обстоит дело и со следующим, навье — стоксовским приближением.



Фиг. 1

5. Для иллюстрации метода была решена простейшая задача теории разреженных газов — задача о релаксации заданного в начальный момент изотропного распределения в однородном пространстве к максвелловскому.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = N^{(0)}(F^+ - F), \quad F(0, \xi) = \Phi(\xi) \quad (5.1)$$

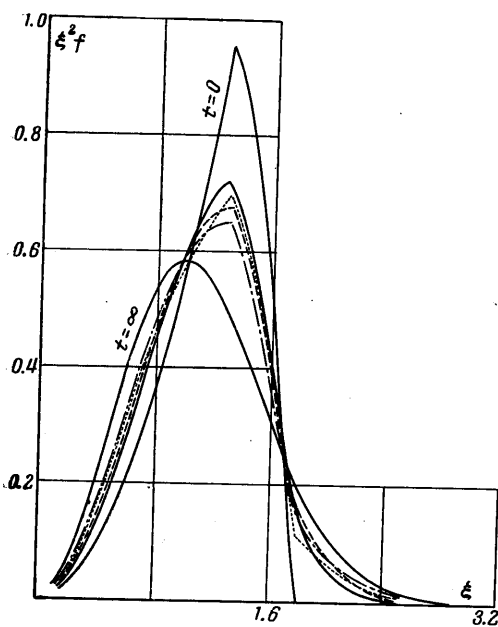
Здесь и всюду ниже все величины предполагаются безразмерными; время отнесено к среднему времени между столкновениями t^* , молекулярная скорость к ξ^* , функция распределения к F^*

$$t^* = (4n\sigma^2 \sqrt{\pi RT})^{-1}, \quad \xi^* = \sqrt{2RT}, \quad F^* = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}}$$

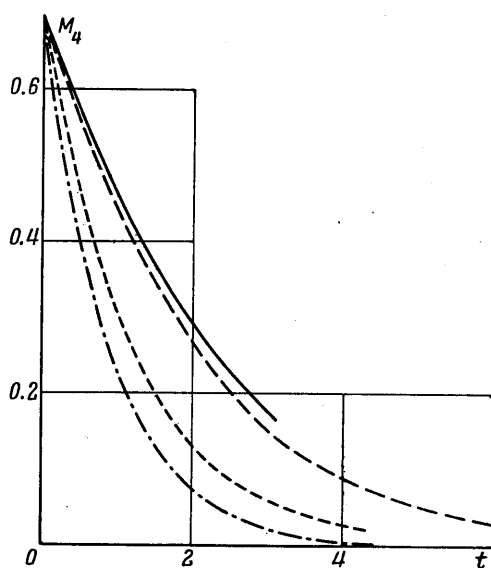
Модель молекул — упругие сферы диаметра σ .

Для этой задачи, в силу упрощений интеграла столкновений, сравнительно просто может быть получено точное численное решение [10]. Поскольку вследствие изотропности функции распределения все нечетные моменты равны нулю, функция F^+ выбиралась в виде

$$F^+ = F^{(0)}(\alpha + \beta\xi^2 + \gamma\xi^4) \quad (5.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Для определения неизвестных коэффициентов α , β , γ , зависящих от времени, согласно (1.5) при $\psi = 1$, ξ^2 , ξ^4 имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \int N^{(0)}(F^+ - F) d\xi &= 0, & \int \xi^2 N^{(0)}(F^+ - F) d\xi &= 0 \\ \int \xi^4 N^{(0)}(F^+ - F) d\xi &= \int (\xi'^4 - \xi^4) FF_1 g d\sigma d\xi_1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Интегрирование по параметрам столкновений в правой части последнего уравнения системы (5.3) выполняется, а сам интеграл сводится к двойному интегралу по ξ и ξ_1 вычисляется последовательным выполнением двух одномерных квадратур. Остальные интегралы, входящие в (5.3) в качестве коэффициентов при α , β , γ и в правые части уравнений, — одномерные интегралы, причем коэффициенты при α , β , γ не зависят от времени. В качестве начальной функции распределения была

выбрана функция, для которой построено точное решение [10]:

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0.56598 & 0 \leq \xi \leq 1.30286 \\ 1.41496(1.5 - 1.13980\xi) & 1.30286 \leq \xi \leq 1.77662 \\ 0 & 1.77662 \leq \xi < \infty \end{cases}$$

Расчеты выполнялись следующим образом.

В начальный момент для заданной функции распределения отыскивалось решение системы (5.3). По полученным α, β, γ определялось F^+ согласно (5.2), что вместе с известной функцией F определяло правую часть (5.1). По известной производной $\partial F / \partial t$ методом Эйлера с шагом 0.1 определялась функция распределения в момент $t = 0.1$. Аналогично выполнялись вычисления для всех других моментов времени.

Результаты расчетов представлены в виде графиков на фиг. 1—3. Сплошные кривые относятся к точному решению, штриховые — к решению по предлагаемому методу с F^+ вида (5.2), штрих-пунктирные — к решению по этому же методу, но при $\gamma = 0$ (выполняются только условия постоянства плотности и температуры — два первых уравнения системы (5.3)). Там же для сравнения пунктирными линиями нанесены результаты расчетов по модельному уравнению Крука. На фиг. 1 изображена функция распределения в момент $t = 1$, а также начальная ($t = 0$) и максвелловская функция распределения ($t = \infty$). На фиг. 2 изображены те же функции, умноженные на ξ^2 . Результаты расчетов показывают довольно близкое к точному поведение функции распределения, особенно при $\gamma \neq 0$.

На фиг. 3 показано изменение со временем первого отличного от постоянной момента — момента четвертого порядка $\int \xi^4 F d\xi$.

По оси ординат отложена величина

$$M_4 = \int_0^{\infty} \xi^4 (F^{(0)} - F) d\xi$$

Ошибка в определении рассматриваемого четвертого момента по предлагаемому методу при $\gamma \neq 0$ не превышает 1% точного значения (релаксационная модель дает ошибку 7—8%).

Для контроля точности аппроксимации частоты столкновений были проведены расчеты без аппроксимации N , т. е. частота вычислялась по формуле

$$N = \pi \sigma^2 \int F_1 g d\xi_1$$

Результаты расчетов оказались практически неотличимы от приведенных выше, что, впрочем, неудивительно, так как частоты столкновений от начальной и от максвелловской функции распределения близки.

Автор благодарен А. А. Никольскому за обсуждение работы и В. А. Рыкову за предоставленные численные результаты точного решения.

Поступила 27 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. Phys. Rev. (1954) 94, 511 (Рус. пер.: в сб. Проблемы современной физики, т. 2, 1956).
2. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, вып. 4.
3. Krook M., Continuum equations in the dynamic of rarefied gases. J. Fluid Mech. 1959, vol. 6, № 4 (Рус. пер.: в сб. «Некоторые задачи современной аэродинамики». М., Изд. иностр. лит., 1961).
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. «Наука», 1967.
5. Gross E. P., Jackson E. A. Kinetic models and the linearized Boltzman equation. Phys. Fluids, 1959, 2, № 4 (Рус. пер. в сб. пер. иностр. период. лит. «Механика», 1960, № 5).
6. Sivovich L. Kinetic modeling of gas mixtures Phys. Fluids, 1962, vol. 5, (8) (Рус. пер.: в сб.: «Некоторые вопросы кинетической теории газов». «Мир», 1965).
7. Grad H. On the Kinetic Theory of Rarefied Gases. Commun on Pure and Appl. Mathematics (1949), vol. 2, № 4 (рус. пер.: Град Г. О кинетической теории разреженных газов, сб. пер. иностр. период. лит. «Механика». № 4, № 5, 1952).
8. Галкин В. С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
9. Никольский А. А. Об общем классе однородных движений сплошных сред и разреженных газов. Инж. ж. 1965, т. 5, вып. 6.
10. Рыков В. А. Релаксация газа, описываемого кинетическим уравнением Больцмана. ПММ, 1967, вып. 4.
- 11 Механика жидкости и газа. № 1