

Волна сжатия, отраженная от ПД, приходит в момент  $\xi = 2s/a_0$ . Излучение можно считать чисто дифракционным, если  $s > \theta a_0 = 0.3l$ , т. е. вода заполняет перед взрывом больше четверти длины трубы.

В плоскости симметрии

$$p = \frac{2p_1}{\pi} \exp\left(-\frac{\xi_1}{\theta}\right) \left[ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{1/2} - \exp\left(-\frac{\xi}{\theta}\right) \int_0^{\xi} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_1}{\tau}\right)^{1/2} e^{\tau/\theta} \frac{d\tau}{\theta} \right] =$$

$$= p_1 \exp\left(-\frac{\xi + \xi_1}{\theta}\right) \left[ 1 - \frac{2^{(\xi/\xi_1)^{1/2}}}{\pi} \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{\xi_1 \omega^2}{1 + \omega^2}\right) \frac{d\omega}{\theta} \right] \quad (5.7)$$

$$p = p_1 \exp\left(-\frac{\xi + \xi_1}{\theta}\right) \quad (-\xi_1 \leq \xi < 0) \quad (5.8)$$

$$p \approx \frac{2p_1}{\pi} \left[ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{1/2} - \frac{\xi_1}{\theta} \left( \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{1/2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{1/2} \right) \right] \exp\left(-\frac{\xi + \xi_1}{\theta}\right) \quad (\xi \geq 0)$$

В линейном приближении дифракция срезает эпоху ударной волны, но не изменяет пиковое давление. Однако в действительности оно постоянно только вблизи нижней кромки, пока искажение эпохи ударной волны невелико.

С удалением от нижней кромки крутизна волны разрежения в плоскости симметрии возрастает:  $\xi_1 \sim 1/R$ , что физически означает резкое затухание скачка давления (см. (1.14)). Если  $s = 0$ , то волна разрежения положе и затухание меньше. Различные режимы дифракции незначительно, если  $\theta < 0.6d/a_0$ , т. е.  $l < 2d$  (см. (4.5)).

Отступление от линейности возможно также вблизи границы тени  $\beta \approx \pi$ , из-за большой скорости нарастания давления (см. (5.4)).

В заключение следует отметить, что при взрыве в трубе объем дифракции в тени ( $\beta < \pi$ ) больше, чем за плоским фронтом ( $\beta > \pi$ ). В тени давление нарастает медленнее, а за плоским ударным фронтом падает быстрее, чем при взрыве между полуплоскостями [5].

Максимальное давление и время нарастания до максимума в тени при осевой симметрии меньше, чем при плоской; падение пикового давления из-за нелинейного характера дифракции — больше.

Поступило 11 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри А. Основные результаты экспериментов на ударных трубах. Атомиздат, 1963.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Гостехиздат, 1953.
5. Харкевич А. А. Неустановившиеся волновые явления. Гостехиздат, 1950.

### ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ОТ НАГРЕТОЙ СФЕРЫ В ПОКОЯЩЕМСЯ РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

В. Д. ПЕРМИНОВ (Москва)

Рассматривается задача о теплопередаче от слабо нагретой сферы в покоящемся разреженном газе. Считаем, что в этом случае справедливо уравнение Крукса. Приводятся две формы исходных уравнений и полученные в результате расчетов зависимости потока тепла и температурного скачка на поверхности сферы от параметра, обратнопропорционального числу Кнудсена. Полученные результаты сравниваются с результатами, даваемыми известными приближенными теориями.

Рассмотрим задачу о теплопередаче от нагретой сферы в покоящемся разреженном одноатомном газе при помощи модельного уравнения [1]

$$\xi_x \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial f}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial f}{\partial z} = A_1 \rho (f_0 - f) \quad (1)$$

Будем предполагать, что отраженные от поверхности сферы молекулы имеют максвелловскую функцию распределения

$$f_w = \rho_w (2\pi RT_w)^{-3/2} \exp\{-\xi^2 / 2RT_w\}$$

где  $T_w$  — температура сферы, причем  $T_w \sim O(T_\infty)$ .

Последнее предположение позволяет линеаризировать уравнение (1)

$$c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sigma [v + (c^2 - 3/2)\tau - \varphi] \quad (2)$$

где  $\varphi$ ,  $v$ ,  $\tau$   $c$  и  $\sigma$  определяются равенствами

$$f = f_\infty(1 + \varphi), \quad \rho = \rho_\infty(1 + v), \quad T = T_\infty(1 + \tau) \\ c = \xi(2RT_\infty)^{-1/2}, \quad v = \frac{1}{\rho_\infty} \int f_\infty \varphi d\xi, \quad \sigma = A_1 \rho_\infty r_0 (2RT_\infty)^{-1/2} \quad (3)$$

$$f_\infty = \frac{\rho_\infty}{(2\pi RT_\infty)^{3/2}} \exp(-c^2), \quad v + \tau = \frac{1}{3\rho_\infty RT_\infty} \int \xi^2 f_\infty \varphi d\xi$$

Здесь  $r_0$  — радиус сферы,  $s$  — единичный вектор, определяющий направление скорости молекулы. Формально интегрируя (2) вдоль траектории [2], получаем

$$\varphi(c, r) = \varphi_{01} \Phi(s_{01}, s) + \frac{\sigma}{c} \int_{s_{01}}^s [v(s') + \tau(s')(c^2 - 3/2)] \Phi(s', s) ds' \quad (4)$$

$$\Phi(x, y) = \exp[-\sigma(y - x) / c]$$

$$\varphi_{01} = \varphi_w = v_w + \tau_w(c^2 - 3/2), \quad \varphi_{02} = \varphi_\infty = 0$$

Воспользовавшись определениями (3) для  $v(r)$  и  $\tau(r)$  и условием непротекания при  $r = 1$ , получаем систему двух интегральных уравнений:

$$v(r) = \int_0^\alpha \int_0^\pi K_1(r, x, \theta) dx d\theta + \int_\alpha^\infty \int_0^\pi K_1(r, x, \theta) dx d\theta + \\ + \int_0^\alpha \sin \theta \{ \tau_w [I_4(\sigma s) - 2I_2(\sigma s)] - 2\sqrt{\pi} \sigma \gamma I_2(\sigma s) \} d\theta \quad (5)$$

$$\tau(r) = \frac{2}{3} \left\{ \int_0^\alpha \int_0^\pi K_3(r, x, \theta) dx d\theta + \int_\alpha^\infty \int_0^\pi K_3(r, x, \theta) dx d\theta + \right. \\ \left. + \int_0^\alpha \sin \theta \{ \tau_w [I_6(\sigma s) - 2I_4(\sigma s)] - 2\sqrt{\pi} \sigma \gamma I_4(\sigma s) \} d\theta \right\} - v(r) \quad (6)$$

$$K_i(r, x, \theta) = \sigma \sin \theta \{ I_i(\sigma x) v(\eta) + [I_{i+2}(\sigma x) - 3/2 I_i(\sigma x)] \tau(\eta) \},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma} \int_0^\pi \int_0^\infty \cos \theta K_2(r, x, \theta) dx d\theta$$

$$s = r \cos \theta - (1 - r^2 \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad \eta = (r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta)^{1/2}$$

$$I_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^n \exp(-y^2 - x/y) dy, \quad \alpha = \arcsin(1/r)$$

Для уравнений с такими сложными ядрами наиболее естественным представляется метод последовательных приближений, когда вычисления производятся по формулам

$$v_{n+1}(r) = L_1(v_n, \tau_n), \quad \tau_{n+1}(r) = L_2(v_n, \tau_n)$$

Здесь  $L_1, L_2$  — правые части (5), (6). Однако расчеты показали, что такие простые итерации сходятся очень медленно. Чтобы выделить главную часть приращения при каждом приближении, перепишем систему (5), (6) в стандартной форме ( $v$  и  $\tau$  зависят только от переменной интегрирования)

$$v(r) = \int_1^\infty \int_0^\delta \left\{ K_1^{-v}(\eta) + \left[ K_3^- - \frac{3}{2} K_1^- \right] \tau(\eta) \right\} d\theta d\eta + \\ + \int_1^\infty \int_\alpha^\delta \left\{ K_1^{+v}(\eta) + \left[ K_3^+ - \frac{3}{2} K_1^+ \right] \tau(\eta) \right\} d\theta d\eta + \\ + \int_0^\alpha \sin \theta \left\{ I_2(\sigma s) v_w + \left[ I_4(\sigma s) - \frac{3}{2} I_2(\sigma s) \right] \tau_w \right\} d\theta \quad (7)$$

$$\frac{3}{2} \tau(r) = \int_1^\infty \int_0^\delta \left\{ K_3^{-v}(\eta) + \left[ K_5^- - \frac{3}{2} K_3^- \right] \tau(\eta) \right\} d\theta d\eta + \\ + \int_1^\infty \int_\alpha^\delta \left\{ K_3^{+v}(\eta) + \left[ K_5^+ - \frac{3}{2} K_3^+ \right] \tau(\eta) \right\} d\theta d\eta + \\ + \int_0^\alpha \sin \theta \left\{ I_4(\sigma s) v_w + \left[ I_6(\sigma s) - \frac{3}{2} I_4(\sigma s) \right] \tau_w \right\} d\theta - \frac{3}{2} v(r) \quad (8)$$

$$K_i^\pm(r, \eta, \theta; \sigma) = \sigma \eta (\eta^2 - r^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} I_i \left[ \sigma |r \cos \theta \pm (\eta^2 - r^2 \sin^2 \theta)^{1/2}| \right]$$

$$\delta = \arcsin \eta / r \quad \text{при } \eta \leq r, \quad \delta = \pi/2 \quad \text{при } \eta \geq r$$

Систему (7) и (8) можно получить непосредственным интегрированием вдоль характеристик уравнения (1), записанного в сферической системе координат.

Ядра этих уравнений разрывны при  $r = \eta$  и несимметричны. Воспользовавшись соотношением

$$I_n(x) = -dI_{n+1}(x) / dx$$

и проинтегрировав один раз по частям, получим для  $dv/dr$  и  $d\tau/dr$  систему однородных уравнений первого рода, которая может быть решена численно тем же методом, которым решалась в работе [3] задача о температурном скачке.

Получив распределения  $v(r; \sigma)$  и  $\tau(r; \sigma)$ , можно вычислять любые моменты от функции распределения, воспользовавшись соотношением (4). Наиболее важной характеристикой в данной задаче является поток тепла, который можно найти по формуле

$$q_r = \frac{qr^2}{\rho_\infty (2RT_\infty)^{3/2}} = \frac{r^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty c^5 \exp(-c^2) dc \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta \varphi d\theta = \\ = \frac{r^2}{2} \left\{ \sigma \int_0^\alpha \int_0^\delta [M_4(x, \theta; \sigma) v(\eta) + (M_6(x, \theta; \sigma) - 3/2 M_4(x, \theta; \sigma)) \tau(\eta)] dx d\theta + \right. \\ + \sigma \int_\alpha^\pi \int_0^\infty [M_4(x, \theta; \sigma) v(\eta) + (M_6(x, \theta; \sigma) - 3/2 M_4(x, \theta; \sigma)) \tau(\eta)] dx d\theta + \\ \left. + \int_0^\alpha [(M_7(s, \theta; \sigma) - 2M_5(s, \theta; \sigma)) \tau_w - 2\sqrt{\pi} \sigma \gamma M_5(s, \theta; \sigma)] d\theta \right.$$

$$M_k(x, \theta; \sigma) = \sin \theta \cos \theta I_k(\sigma x)$$

Результаты расчетов для  $\tau_w = 0.1$  приведены на фиг. 1 в виде зависимостей

$$\varphi(\sigma) = q_r / q_r(\sigma = 0), \quad \psi(\sigma) = [\tau_w - \tau(1)] / \tau_w$$

Для сравнения выпишем аналитические выражения для всех искомых функций, полученные методом Лиса [4]:

$$v(r) = -\beta / 2 [4\sigma / 5\sqrt{\pi}r + 1/2(1 - \cos \alpha)], \quad \tau = -2v \quad (9)$$

$$\varphi(\sigma) = \beta / 2\tau_w\sqrt{\pi}, \quad \psi(\sigma) = 3\beta / 2\tau_w, \quad \beta = \tau_w / (1 + 4\sigma / 5\sqrt{\pi}) \quad (10)$$

Графики функций (10) даны на фиг. 1 пунктиром. Из сравнения видно, что метод Лиса дает хорошие результаты при малых  $\sigma$ , что и следовало ожидать в условиях, близких к свободномолекулярным. Необходимо отметить, что для параметров на стенке метод Лиса дает удовлетворительные результаты в широком интервале значений  $\sigma$ . Аналогичные выводы следуют из расчетов медленных движений газа, для которых результаты, полученные методом Лиса, хорошо согласуются с экспериментом [4, 5]. Из (9) видно, что при всех  $r$  и  $\sigma$  справедливы соотношения

$$\tau(r; \sigma) = -2v(r; \sigma), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tau(1; \sigma) = \tau_w$$

С другой стороны, при  $\sigma \rightarrow \infty$  уравнения Навье-Стокса дают:

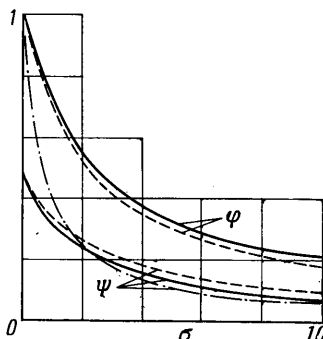
$$\tau(r) = \tau_w / r, \quad \tau(r) = -v(r)$$

т. е. метод Лиса дает неправильную зависимость  $v(r, \sigma)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Это подтверждается результатами расчетов. При больших  $r$  можно записать

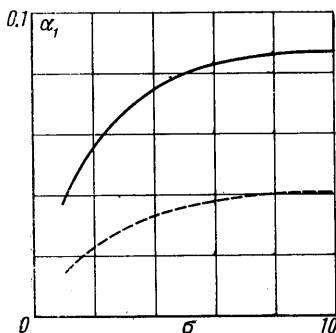
$$v(r; \sigma) = -\alpha_1(\sigma) / r, \quad \tau(r; \sigma) = \alpha_2(\sigma) / r$$

На фиг. 2 и 3 приведены соответственно зависимости  $\alpha_1(\sigma)$  и  $\alpha_2(\sigma)$ , пунктиром и штрих-пунктиром — те же функции, рассчитанные соответственно по методам [4] и [3].

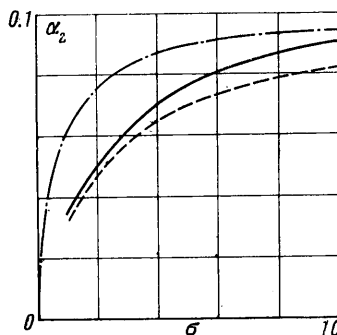
Использованный для решения численный метод [3] позволяет существенно ускорить сходимость последовательных приближений; например, для получения  $\varphi$  (1),



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

(на расстояниях  $r \sim 20$ ) с точностью до 1% требуется 5, 6 итераций, в то время как точно такой же расчет методом простых итераций требует 75—80 итераций.

Суммарная ошибка при расчетах  $\varphi(\sigma)$  и  $\psi(\sigma)$  была меньше 1%. Ошибка при вычислениях  $v(r; \sigma)$  и  $\tau(r; \sigma)$  на расстояниях  $r \sim 20$  для  $\sigma = 10$  и  $\sigma = 1$  составляла соответственно 2—3% и 6—7%.

Можно показать, что связь числа Кнудсена с параметром  $\sigma$  дается формулой

$$Kn = 8 / 15\sqrt{\pi}\sigma$$

При малых  $Kn$  (больших  $\sigma$ ) должны быть справедливы уравнения Навье — Стокса. В работе [3] показано, что в этом случае граничное условие для уравнения потока тепла дается соотношением:

$$-\Delta\tau = \tau(1) - \tau_w = 1.03\pi Kn (d\tau / dr)_{r=1} \quad (11)$$

Решая обычное уравнение потока тепла от сферы с граничными условиями  $\tau(\infty) = 0$  и (11), получаем

$$\psi(\sigma) = 1 - (1 + 0.541\sqrt{\pi}/\sigma)^{-1}$$

Эта зависимость показана на фиг. 1 штрих-пунктиром.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность М. Н. Когану за предложенную задачу и многочисленные обсуждения.

Поступило 31 VIII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnager P. L., Gross E. P., Krook M. Model for Collision Processes in Gases. 1. Small Amplitude Processes in Charge and Neutral One Component Systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3.
2. Grad H. Principles of the Kinetic Theory of Gases. In: Handbuch der Physik. Bd. 12. Berlin, 1958.
3. Wellander P. On the Temperature Jump in a Rarefied Gas. Arkiv för Fysik, 1954, Bd. 7, Haft. 6, S. 507.
4. Lees L., Liu Ch. Y. Kinetic Theory Description of Conductive Heat-Transfer from a Fine Wire. Phys. Fluids, 1962. vol. 5, No. 10. Механика, Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1963, № 4.
5. Галкин В. С. Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.

#### О ПРИБЛИЖЕННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

Основное кинетическое уравнение теории газов, уравнение Больцмана, представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение. Трудности, связанные с его решением, обусловлены не только большим количеством независимых переменных, в общем случае равном семи, но и весьма запутанной структурой интеграла столкновений. Однако для механики разреженных газов основной интерес представляет не сама функция распределения, удовлетворяющая уравнению Больцмана, а несколько ее первых моментов, т. е. осредненные характеристики. Это обстоятельство наводит на мысль о возможности получения осредненных величин более простым путем, чем прямой путь непосредственного решения уравнения Больцмана с последующим вычислением интегралов.

Хорошо известно, что если функция распределения удовлетворяет уравнению Больцмана, то ее моменты удовлетворяют бесконечной системе моментных уравнений. Следовательно, если мы хотим получить с удовлетворительной точностью некоторое число первых моментов, то должны потребовать, чтобы эти моменты удовлетворяли точной системе моментных уравнений. Отсюда, однако, еще не следует, что для определения интересующих нас моментов необходимо решать эту систему, хотя бы потому, что система моментных уравнений незамкнута. Замыкание системы путем задания вида функции распределения (метод моментов) можно рассматривать лишь как грубо приближенный метод решения задач. Во-первых, при этом невозможно удовлетворить всем уравнениям, и приходится ограничиваться некоторыми из них, во-вторых, вообще говоря, неизвестно какому уравнению удовлетворяет выбранная функция распределения и, следовательно, неизвестно, в какой мере она обладает свойствами функции распределения и, удовлетворяющей уравнению Больцмана.

Более надежным способом решения задач механики разреженных газов является способ, основанный на аппроксимации уравнения Больцмана, а точнее, интеграла столкновений. Идея замены интеграла столкновений более простым выражением нова [1-4]. Кинетические уравнения, полученные в результате такой замены, принято называть модельными, поскольку их вывод обычно основан на физических соображениях, а не на непосредственном использовании свойств больцмановского интеграла столкновений. В связи с этим неизвестно, в какой мере решения уравнения Больцмана и модельных уравнений оказываются близкими, тем более, что последние не дают возможности уточнения решения. Исключение составляют кинетические мо-