

все же значительными. Поэтому изменение частотного спектра давлений в присутствии пластинки благоприятно для подавления колебаний во всем диапазоне скоростей, так как задемпфировать колебания гораздо легче, когда возмущающие силы имеют узкий спектр частот.

Опыты настоящей работы показали, что в определенном диапазоне изменения таких параметров, как скорость потока, числа S и R , существует принципиальная возможность резкого уменьшения колебаний плохообтекаемых тел путем установки за ними сравнительно узкой пластинки. Для определения оптимальных соотношений между размерами плохообтекаемого тела и пластинки, расстояния между ними и других характеристик, а также для детального выяснения механизма воздействия пластинки на течение в следе колеблющегося цилиндра необходимы дополнительные исследования.

Поступило 12 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. R o s h k o A. On the wake and drag of bluff bodies. JAS, 1955, 22, vol. 2.
2. B é r m a n P. W. Investigation of the flow behind a two dimensional model with blunt trailing and fitted with splitter plates. J. Fluid. Mech., 1965, 24, 241.

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ СЛАБО ВОЛНИСТОЙ ТРУБЕ

Л. М. СИМУНИ (Ленинград)

Численное решение задачи о развитии профиля скорости в прямой трубе осуществлено в ряде работ [1, 2]. В данной работе рассматривается задача о развитии равномерного профиля скорости в плоской криволинейной трубе. Предположим, что искривленность трубы мала и справедлива упрощенная система уравнений движения

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$p = p(x)$$

с краевыми условиями

$$v_x = V, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = H(x)$$

($V = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$, $H(x)$ — заданная функция).

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{H_*}, \quad \bar{u} = \frac{v_x}{V}, \quad \bar{v} = \frac{v_y}{V}, \quad P = \frac{(p - p_0)H_*}{\mu V}$$

и обозначим

$$h = \frac{H}{H_*}, \quad \xi = \bar{x}, \quad \eta = \frac{\bar{y}}{h}, \quad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} - \frac{dH}{dx} \eta u$$

Здесь L и H_* — характерные постоянные. В новых переменных получим систему

$$R u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial h u}{\partial \xi} + \frac{\partial h v}{\partial \eta} = 0 \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$u = 1, \quad P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \left(R = \frac{V H_*}{\nu} \frac{H_*}{L} \right)$$

Замена переменных, примененная для вывода системы (2) сходна с преобразованием Степанова — Манглера и применялась в работе [3] в задаче теории смазки. Система (2) решается методом конечных разностей и заменяется линейно-алгебраической системой в точках

$$(\xi_i, \eta_k) \quad \xi_i = i \Delta \xi, \quad \eta_k = k \Delta \eta \quad (i = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots, K)$$

Система эта имеет вид

$$R \left(u_{i,k} \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{\Delta \xi} + v_{i,k} \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2\Delta \eta} \right) = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{h_{i+1}^2} \frac{u_{i+1,k+1} + u_{i+1,k-1} - 2u_{i+1,k}}{(\Delta \eta)^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i+1}$$

$$v_{i+k,k+1} = v_{i+1,k} + \frac{\Delta \eta}{2\Delta \xi} \left[\frac{h_i}{h_{i+1}} (u_{i,k+1} + u_{i,k}) - (u_{i+1,k+1} + u_{i+1,k}) \right]$$

с краевыми условиями

$$u_{0,k} = 1, \quad P_0 = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

$$u_{i,0} = u_{i,1}, \quad v_{i,0} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_{i,K} = 0, \quad v_{i,K} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Первое уравнение системы (3) можно записать в виде

$$a_{i,k} u_{i+1,k+1} - 2b_{i,k} u_{i+1,k} + c_{i,k} u_{i+1,k-1} = d_{i,k} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i+1} e_{i,k} \quad (4)$$

Величины $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $d_{i,k}$, $e_{i,k}$ известны. Ищем решение системы (4) в виде

$$u_{i+1,k} = z_{i+1,k} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i+1} w_{i+1,k} \quad (5)$$

Величины $z_{i+1,k}$ и $w_{i+1,k}$ удовлетворяют уравнениям

$$a_{i,k} z_{i+1,k+1} - 2b_{i,k} z_{i+1,k} + c_{i,k} z_{i+1,k-1} = d_{i,k} \quad (6)$$

$$a_{i,k} w_{i+1,k+1} - 2b_{i,k} w_{i+1,k} + c_{i,k} w_{i+1,k-1} = e_{i,k} \quad (7)$$

с теми же граничными условиями, что и для величины $u_{i+1,k}$. Проинтегрировав второе уравнение системы (2) по переменной найдем условие постоянства расхода по длине трубы

$$h \int_0^1 u d\eta = q \quad (8)$$

Заменив интеграл в формуле (8) квадратурной формулой и подставив вместо величин $u_{i+1,k}$ их значения, из формулы (5) находим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i+1} = \frac{q - (1/2 z_{i+1,0} + z_{i+1,1} + \dots + z_{i+1,K-1} + 1/2 z_{i+1,K})}{1/2 w_{i+1,0} + w_{i+1,1} + \dots + w_{i+1,K-1} + 1/2 w_{i+1,K}} \quad (9)$$

В равенстве (9) использована формула трапеций. Процесс решения заключается в следующем.

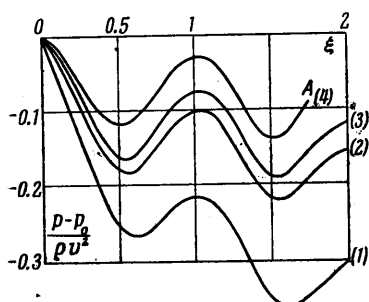
При известных коэффициентах $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $d_{i,k}$, $e_{i,k}$ определяем величины $z_{i+1,k}$ и $w_{i+1,k}$, решая системы (6) и (7) методом прогонки. Определяем $(\partial P / \partial \xi)_{i+1}$ по формуле (9), и величины $u_{i+1,k}$ по формуле (5). После этого по второму уравнению системы (3) определяем величины $v_{i+1,k}$. Далее можно переходить к определению величин $u_{i+2,k}$, $v_{i+2,k}$ и т. д.

Описанный процесс применялся для решения задачи о движении в плоской трубе, верхняя стенка которой задана уравнением

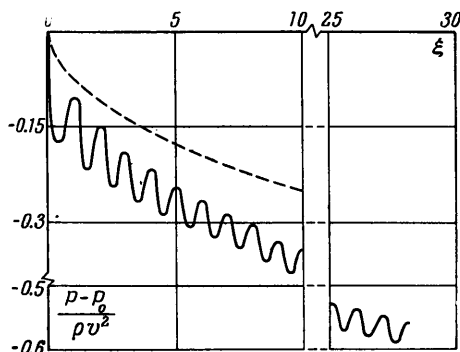
$$H = H_* - a_0 + a_0 \cos 2\pi x, \quad \text{или} \quad h = 1 - a + a \cos 2\pi \xi \quad \left(a = \frac{a_0}{H_*} \right)$$

Задача о движении над волнистой полуплоскостью решалась ранее, в том числе и численно [4-6]. Однако при движении в трубе наблюдаются некоторые особенности

потока. На основное движение накладываются колебания, амплитуда которых возрастает при увеличении числа a , пока при некотором значении числа a не происходит отрыв потока. При $a = 0.05$ для чисел Рейнольдса $R = 100$ (1), $R = 500$ (2) и $R = 1000$ (3) возникновение возвратных течений не обнаружено и происходит развитие движения до некоторого течения, в котором скорость и градиент давления меняются периодически. При $R = 10000$ (4) наблюдается возникновение области воз-

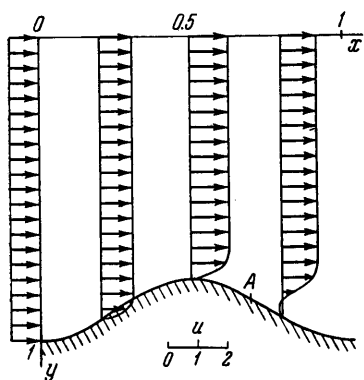


Фиг. 1



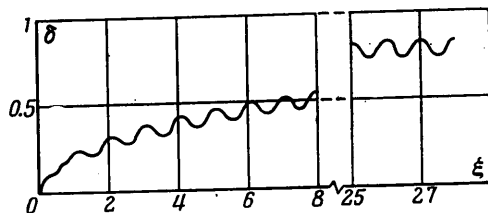
Фиг. 2

вратного течения (точка отрыва A , фиг. 1). Для $a = 0.1$ при $R = 1000$ и $R = 5000$ возникновение возвратного течения наблюдалось в первой же впадине, а для $a = 0.025$ для тех же чисел Рейнольдса возникновение возвратных течений не обнаружено. Некоторые кривые, показывающие изменение давления на начальном участке, представлены на фиг. 1. На фиг. 2 показано изменение давления в том случае, когда областей возвратного течения не наблюдается и поток развивается до «стабилизированного». В тех случаях, когда течение безотрывно, во впадинах происходит медленное течение, близкое к застойному. Некоторые профили скорости показаны на фиг. 3. После возникновения отрицательных скоростей счет по системе (1) становится неустойчивым. На фиг. 4 показано изменение безразмерного расстояния δ от стенки трубы, на котором скорость отличается от своего значения на оси меньше, чем на 1% (толщина «пограничного слоя»).



Фиг. 3

Результаты, приведенные на графиках, вычислялись при $\Delta\xi = 0.01$ и $\Delta\eta = 0.0125$, т. е. на одной волне косинусоиды выбиралось



Фиг. 4

100 точек и по половине ширины трубы — 80 точек. Дальнейшее дробление не меняло результатов с точностью 2%. Положение точки возникновения возвратного течения определялось по обращению в нуль производной скорости

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \approx \frac{-3u_{i,0} + 4u_{i,1} - u_{i,2}}{2\Delta\eta}$$

Возможно, что в случаях, когда при вычислении не получилось области возвратного течения, эта область все же существует, но ввиду малости, не улавливается данной сеткой. Однако и влияние этой области на основной поток в этом случае по-видимому весьма мало.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bodoia I. R., Osterle I. F. Finite difference analysis of plane Poiseuille and Couette flow development. Applied scientific Research, A 10, 1962, No. 3—4.
2. Симунн Л. М. Численное решение некоторых задач движения жидкости с переменной вязкостью. Сб. «Тепло и массоперенос», 1963, АН БССР, т. 5, стр. 216.
3. Степанянц Л. Г. Учет инерционных членов в гидродинамической теории смазки. Тр. Ленинград. политехн. ин-т, 1958, № 193.
4. Quig A. W., Schröder K. Verhalten der laminaren Grenzschicht bei periodisch schwankendem Druckverlauf. Mathematische Nachrichten, 1952, В 8, Н 1—4.
5. Пасконов В. М., Сопруненко И. П. Пограничный слой на слабоволнистой стенке. Сб. «Численные методы в газовой динамике», МГУ, 1963, стр. 117.
6. Fanneniör T. Flugge-Lottz I. The laminar compressible Boundary Layer along a wave — chaped Wall. Ingenieur — Archiv. 1963, 333, № 1.

ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Б. И. СЕБЕКИН (Москва)

Рассматривается возникновение и дифракция на клине гравитационных волн, появляющихся на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в результате включения периодически действующего источника. Получено точное решение. Определено время переходного процесса. Установлены асимптотические формулы возвышения свободной поверхности жидкости, пригодные для любого момента времени.

1. **Постановка и решение задачи.** В бесконечно глубокую идеальную тяжелую жидкость погружен вертикальный клин с двугранным углом $(2-p)\pi$, где $0 < p < 2$. Ребро клина совпадает с осью z (фиг. 1), одна из граней — с плоскостью xz . Жидкость занимает пространство вне клина $z \leq 0$, $0 \leq \theta \leq p\pi$. Угол θ отсчитывается от оси x и поверхность невозмущенной жидкости расположена в плоскости xy . В момент времени $t = 0$ под поверхностью жидкости в точке с цилиндрическими координатами $A(r', \alpha, -h)$ начинает функционировать точечный источник. Источник работает по закону синуса в интервале времени $0 \leq t < \infty$, его максимальная мощность равна Q , частота равна $-\sigma$. Требуется исследовать развитие волнового процесса на поверхности жидкости. В рамках теории волн малой амплитуды приходим к следующей краевой задаче: решить уравнение Лапласа для потенциала скоростей движения жидкости

$$\Delta\varphi(r, \theta, z, t) = 0 \quad (z \leq 0, 0 \leq \theta \leq p\pi, t \geq 0)$$

с условием на свободной поверхности

$$\partial^2\varphi / \partial t^2 + g(\partial\varphi / \partial z) = 0, \quad z = 0$$

с условием на гранях клина

$$\partial\varphi / \partial\theta = 0, \quad \theta = 0, \quad \theta = p\pi$$

и с начальными условиями

$$\varphi(r, \theta, 0, 0) = 0, \quad \partial\varphi / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Кроме того, потенциал скоростей в точке $A(r', \alpha - h)$ при $t \geq 0$ должен иметь особенность $Qe^{i\sigma t} / 4\pi L$.

Здесь L — расстояние от точки возмущения до точки наблюдения и стремится к нулю при $z \rightarrow -\infty$. Заметим, что при действии источника по закону синуса в окончательных формулах следует выделить мнимую часть.

Применив преобразование Лапласа, получим для изображения потенциала скоростей

$$\Delta\Phi(r, \theta, z, q) = 0 \quad (z \leq 0, 0 \leq \theta \leq p\pi)$$

$$\Phi = (g / \omega^2) \partial\Phi / \partial z, \quad (z = 0)$$

$$\partial\Phi / \partial\theta = 0, \quad (\theta = 0, \theta = p\pi)$$

В точке $A(r', \alpha, -h)$ функция $\Phi(r, \theta, z, q)$ имеет особенность $Qa / 4\pi L$ и при $z \rightarrow -\infty$ стремится к нулю. Здесь

$$\omega^2 = -q^2, \quad a = q / (q - i\sigma)$$