

## ЛИТЕРАТУРА

1. Thom A. The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds. Proc. Roy Soc. A, 1933, 141, 651.
2. Apelt C. J. The Steady Flow of a Viscous Fluid Past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers 40 and 44. ARS Repts and Mem. 1961, 3175.
3. Калис Х. Э., Цинбер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В. Обтекание круглого цилиндра электропроводящей жидкостью в поперечном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1965, 1.
4. Леонтьев А. И., Рягин Б. А. Теплообмен в вихревой области при поперечном обтекании цилиндра. ПМТФ, 1966, № 6.
5. Булеев Н. И., Петрищев В. С. Численный метод решения уравнений гидродинамики для плоского потока. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 6.
6. Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. СО АН СССР, 1965.
7. Самарский А. А. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
8. Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии. Матем. сб., 1960, т. 51, № 2.

## РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПОРШЕНЬ ПРИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ЕГО РАСШИРЕНИЯ

И. З. ОКУНЬ (Ленинград)

Рассматривается задача о расширении с постоянной скоростью плоского, цилиндрического или сферического поршня в сжимаемой жидкости и произведен расчет давления жидкости на поршень в зависимости от его скорости. Рассматривается решение автоматической задачи о расширении поршня в сжимаемой жидкости с постоянной скоростью. Подобная задача была решена в работе Н. Н. Кочиной и Н. С. Мельниковой «О расширении поршня в воде» (ПММ, 1959, т. 23, в. 4). Приводятся результаты численного решения этой задачи для некоторых значений параметров, характеризующих задачу, и зависимость давления на поршень от скорости поршня аппроксимируется некоторыми эмпирическими формулами. Для случаев цилиндрического и сферического поршня приближенные аналитические зависимости давления на поршень от скорости сравниваются с численным решением автоматической задачи расширения поршня.

При исследовании импульсного разряда в жидкости, осциллографируя разрядный ток  $i$  и активную составляющую напряжения на канале  $u$ , легко рассчитать кривую электрической мощности  $N(t) = ui$ , развиваемой в канале. Но для того чтобы определить скорость расширения канала  $v_1$  и давление плазмы  $p_1$  в нем, уравнение энергетического баланса [1]

$$\frac{N(t)}{l} = p_1 \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt}(p_1 s) \quad (0.1)$$

необходимо дополнить соотношением  $p_1 = f(a)$ , связывающим  $p_1$  с законом изменения радиуса канала  $a(t)$ . Уравнение (0.1) записано для случая цилиндрической симметрии;  $l$  — длина канала разряда,  $s = \pi a^2$  — сечение канала разряда.

Точное решение этой задачи требует интегрирования системы нелинейных уравнений в частных производных. Граничными условиями будут уравнение (0.1) и условия динамической совместности на фронте ударной волны.

Решение задачи значительно упрощается, если, пренебрегая изменениями плотности жидкости  $\rho$  по координате  $r$  и во времени  $t$ , положить  $\rho(r, t) = \text{const}$  между фронтом и каналом. В дальнейшем канал, без учета испарения жидкости со стенок, будет считаться непроницаемым поршнем.

Проверкой допустимости предположения  $\rho = \text{const}$  при расчете зависимости  $p_1 = f(a)$  может служить сравнение результатов приближенного решения, в основе которого лежит это допущение, и точного решения автоматической задачи расширения поршня (цилиндрического или сферического) в жидкости с постоянной скоростью. Кроме того, точное решение автоматической задачи представляет и самостоятельный интерес при исследовании начальной стадии разряда, когда цилиндрический канал разряда расширяется с постоянной скоростью [1, 2].

1. Решение автомодельной задачи расширения поршня в жидкости с постоянной скоростью. Уравнение состояния жидкости записывается в предположении изэнтропичности процесса в виде

$$p - p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho_0$  и  $c_0$  — плотность и скорость звука в невозмущенной жидкости, соответствующие давлению  $p_0$  при заданной температуре жидкости  $T_0$ .

Частным представителем жидкостей, уравнение изэнтропы которых можно записать в виде (1.1), будет вода ( $n \approx 7$ ) [3].

Предположение изэнтропичности ограничивает рассматриваемый диапазон скоростей расширения поршня и давлений в жидкости (для воды, например, [4] давлениями в 25 000—30 000 ат).

Автомодельная задача расширения поршня в воде рассматривалась в [5, 6]. Последующие преобразования существенно упрощаются, если в отличие от работ [5, 6] положить

$$v = c_0 V(\lambda), \quad p = \rho_0 c_0^2 P(\lambda), \quad \lambda = \frac{r}{c_0 t}, \quad R(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.2)$$

Здесь  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  — безразмерные значения скорости, давления и плотности.

При подстановке выражений  $v$ ,  $p$  и  $\rho = \rho_0 R(\lambda)$  в уравнения движения, непрерывности и изэнтропы (1.1) получаются уравнения:

$$\frac{dV}{d\lambda}(V - \lambda) + \frac{1}{R} \frac{dP}{d\lambda} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{d(VR)}{d\lambda} - \lambda \frac{dR}{d\lambda} + (v - 1) \frac{RV}{\lambda} = 0 \quad (1.4)$$

$$P - P_0 = 1/n(R^n - 1) \quad (1.5)$$

Здесь  $v = 1, 2, 3$  — соответственно, при плоской, цилиндрической и сферической симметрии движения жидкости.

Граничными условиями будут:

1°. Соотношения на фронте

$$P_2 - P_0 = \frac{1}{n}(R_2^n - 1)$$

$$\lambda_2 = \left( \frac{P_2 - P_0}{R_2 - 1} R_2 \right)^{1/2}, \quad V_2 = \left[ \frac{(P_2 - P_0)(R_2 - 1)}{R_2} \right]^{1/2} \quad (P_2 - P_0 = V_2 \lambda_2) \quad (1.6)$$

2°. Равенство  $V_1 = \lambda_1$  на стенке поршня. Здесь  $R_2, V_2, P_2, \lambda_2$  — значения  $R, V, P, \lambda$  на фронте ударной волны;  $R_1, V_1, P_1, \lambda_1$  — соответственно у стенки поршня.

Для плоского поршня  $P(\lambda), V(\lambda)$  и  $R(\lambda) = \text{const}$  и из выражения  $P_2 - P_0 = \lambda_2 V_2$  с учетом соотношения [3, 4]

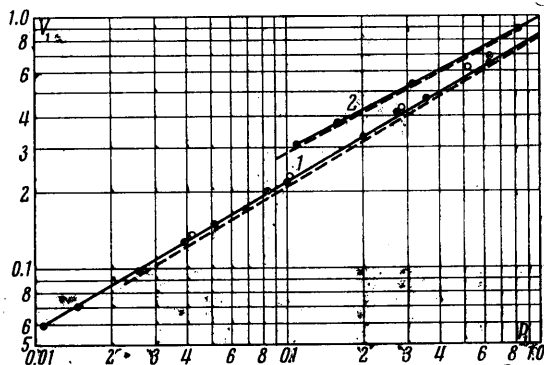
$$\lambda_2 \approx 1 + 1/4(n + 1)V_2 \quad (V_2 \leq 0.5 - 0.6) \quad (1.7)$$

непосредственно получается искомая зависимость  $P_1(V_1)$ :

$$P_1 - P_0 \approx V_1 [1 + 1/4(n + 1)V_1] \quad (1.8)$$

При  $v = 2, 3$  в результате дифференцирования (1.5) по  $\lambda$ , подстановки значения  $dP/d\lambda$  в (1.3) и умножения (1.3) — (1.4) на  $d\lambda/dV$  получена следующая система уравнений, удобная для численного интегрирования:

$$\frac{dR}{dV} = \frac{\lambda - V}{R^{n-2}}, \quad \frac{d\lambda}{dV} = \frac{1}{v-1} \frac{\lambda}{V} \left[ \frac{(\lambda - V)^2}{R^{n-1}} - 1 \right] \quad (1.9)$$



Зависимость давления жидкости на поршень  $P_1$  от скорости его расширения  $V_1$ .  
1 — цилиндрический поршень:  $\circ$  —  $n = 4$ ;  $\otimes$  —  $n = 3$ ; сплошная линия ( $n = 7$ ) точное численное решение; пунктирная — приближенное решение ( $n = 7$ )  
2 — сферический поршень: сплошная линия — точное численное решение ( $n = 7$ ), пунктирная — приближенное решение ( $n = 7$ )

Система (1.9) была проинтегрирована на электронно-вычислительной машине при  $\nu = 2, n = 1, 3, 7$  и  $\nu = 3, n = 7$  (таблица; фигура). Во всех этих случаях зависимость  $P_1 = f(V_1)$  хорошо согласуется с выражением

$$P_1 = k(\nu; n) V_1^{\alpha(\nu, n)} \quad (\alpha < 2) \quad (1.10)$$

В частности, при расширении цилиндрического поршня в воде ( $\nu = 2, n = 7$ )

$$P_1 - P_0 = 1.35 V_1^{1.7} \quad (0.05 \leq V_1 \leq 1) \quad (1.11)$$

Возвращаясь к размерным величинам  $p_1 = \rho_0 c_0^2 P_1$  и  $v_1 = c_0 V_1$ , имеем

$$p_1 - p_0 = 1.35 \rho_0 v_1^2 \left( \frac{c_0}{v_1} \right)^{0.3} \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что избыточное давление на поршень  $p_1 - p_0$  определяется в основном скоростью расширения поршня  $v_1$  и слабо зависит от скорости звука  $c_0$ .

**Результаты численного решения автомодельной задачи расширения поршня в жидкости**

Расширение цилиндра в воде ( $\nu = 2; n = 7$ )

$V_1 = \lambda_1$	0.098	0.179	0.223	0.336	0.473	0.657	0.911
$R_1$	1.0236	1.0576	1.0787	1.133	1.196	1.276	1.372
$P_1$	0.0253	0.0686	0.100	0.200	0.359	0.642	1.16
$P_2$	$\approx 1.001$	1.01	1.02	1.06	1.12	1.20	1.30
$R_2$	$\approx 0.001$	0.0103	0.0212	0.0719	0.173	0.369	0.754
$V_2$	$\approx 0.001$	0.0101	0.0204	0.0638	0.136	0.248	0.417
$\lambda_2$	$\approx 1.002$	1.0202	1.041	1.127	1.270	1.488	1.807

Расширение сферы в воде ( $\nu = 3; n = 7$ )

$V_1 = \lambda_1$	0.302	0.373	0.530	0.879	1.158
$R_1$	1.0828	1.113	1.179	1.312	1.404
$P_1$	0.107	0.160	0.308	0.815	1.40
$P_2$	$\approx 1.001$	1.01	1.06	1.20	1.30
$R_2$	$\approx 0.001$	0.0103	0.0719	0.369	0.754
$V_2$	$\approx 0.001$	0.0101	0.0638	0.248	0.417
$\lambda_2$	$\approx 1.002$	1.0202	1.127	1.488	1.807

2. Приближенный расчет зависимости  $P_1 = f(V_1)$  при расширении поршня в жидкости с постоянной скоростью. Вначале рассматривается случай цилиндрической симметрии движения жидкости. Предполагается, согласно [2],  $R = \text{const}$  в возмущенном слое жидкости и определяется среднее значение  $R$  из выражения

$$R = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \quad (2.1)$$

Приращение внутренней энергии жидкости  $\Delta \epsilon$  (на единицу массы) при ударном сжатии до плотности  $\rho = \rho_0 R$  равно

$$\Delta \epsilon = \frac{P_2 + P_0}{2} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)$$

Используя условия динамической совместимости на фронте и допущение  $\rho = \text{const}$  (из которого вытекает зависимость скорости жидкости  $v$  от радиуса  $r$ )

$$v(r) = v_1 \frac{a}{r} \quad (2.2)$$

легко показать, что

$$\Delta \varepsilon = \left( \frac{\rho_0 v_1^2}{2} + p_0 \right) \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.3)$$

Приращение внутренней энергии возмущенного слоя жидкости (2.4)

$$\Delta E = \Delta \varepsilon \cdot \pi \rho_0 (\lambda_2 c_0)^2 t^2 = \pi \rho_0 c_0^4 t^2 \lambda_2^2 \left( \frac{V_1^2}{2} + P_0 \right) \left( 1 - \frac{1}{R_2} \right) = \pi \rho_0 c_0^4 t^2 V_1^2 \left( \frac{V_1^2}{2} + P_0 \right)$$

Кинетическая энергия возмущенного слоя жидкости

$$E = \int_{c_0 \lambda_1}^{c_0 \lambda_2} \rho \frac{v^2}{2} 2\pi r dr = \pi \rho \int_{c_0 \lambda_1}^{c_0 \lambda_2} \left( v_1 \frac{a}{r} \right)^2 r dr = \pi \rho_0 c_0^4 t^2 R V_1^4 \ln \frac{\lambda_2}{V_1} \quad (2.5)$$

Работа расширения поршня  $E_2$  равна

$$E_2 = p_1 \pi (c_0 V_1)^2 t^2 = \pi \rho_0 c_0^4 t^2 P_1 V_1^2$$

Подставив в уравнение  $E_2 = E_1 + \Delta E$  значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\Delta E$  можно получить

$$P_1 - P_0 = V_1^2 (R \ln(\lambda_2 / V_1) + 1/2) \quad (2.6)$$

Расчет зависимости  $P_1 = f(V_1)$  (2.6) основывается на законе сохранения энергии. В работе [2] параметры ударной волны при расширении цилиндра в жидкости определялись путем интегрирования уравнения движения, т. е. на основе закона сохранения количества движения.

Интересно отметить, что оба приближенных метода дают один и тот же окончательный результат (зависимости, полученные в [2], легко преобразовать и свести к (2.6)). Подставив в (1.7) значение  $V_2 = V_1^2 / \lambda_2$  из (2.2), можно получить

$$\lambda_2 \approx 1/2 [1 + \sqrt{1 + (n+1)V_1^2}] \quad (2.7)$$

По заданному значению  $V_1$  из (2.7) рассчитывается  $\lambda_2$ , затем из (2.1) — значение  $R$  и, при подстановке  $V_1$ ,  $R$  и  $\lambda_2$  в (2.6), определяется  $P_1$ .

На фиг. 1 рассчитанная таким образом зависимость  $P_1(V_1)$  (пунктирная линия) сравнивается с точным решением.

Погрешность приближенного расчета  $P_1(V_1)$  не превышает 2—3% при  $v_1 \approx c_0$  и 8—10% при  $v_1 \approx (0.1, 0.2) c_0$  (при  $1 \leq n \leq 7$ ).

Для сферического поршня, проведя расчет, аналогичный приведенному выше, можно получить

$$P_1 - P_0 = V_1^2 [3/2 R (1 - V_1 / \lambda_2) + 1/2 V_1 / \lambda_2] \quad (2.8)$$

$$V_1 = \left[ \lambda_2^2 (\lambda_2 - 1) \frac{4}{n+1} \right]^{1/3}, \quad R = \frac{\lambda_2^3}{\lambda_2^3 - V_1^3} \quad (2.9)$$

Погрешность определения  $P_1(V_1)$  из (2.8) по сравнению с точным решением также не превышает нескольких процентов (фиг. 1).

Таким образом, из сравнения результатов точного и приближенного решений следует:

1. Предположение  $\rho = \text{const}$  допустимо для расчета зависимости давления на поршень от скорости его расширения  $P_1 = f(V_1)$ , чем выше скорость расширения поршня, тем меньше погрешность приближенного расчета.

2. Это предположение неприменимо для расчета давления на фронте волны  $P_2$  при скоростях расширения поршня  $v_1$ , малых по сравнению со скоростью звука  $c_0$ . Действительно, для цилиндрической симметрии при допущении  $\rho = \text{const}$  легко получить соотношение  $P_2 = P_0 + V_1^2$  в частности при  $V_1 = 0.223$   $P_2 = 0.223^2 \approx 0.05$  ( $P_0 = 0$ ), тогда как точное решение дает значение  $P_2 = 0.0212$  (таблица).

Следует заметить также, что точное численное решение автоматической задачи, полученное в предположении  $P_0 = 0$ , можно использовать и при  $P_0 \neq 0$ , но вычисленные при  $P_0 = 0$  эпюры  $P(\lambda)$  представляют собой при  $P_0 \neq 0$  эпюры избыточного давления  $P(\lambda) - P_0$ .

Поступило 14 III 1967

## ЛИТЕРАТУРА

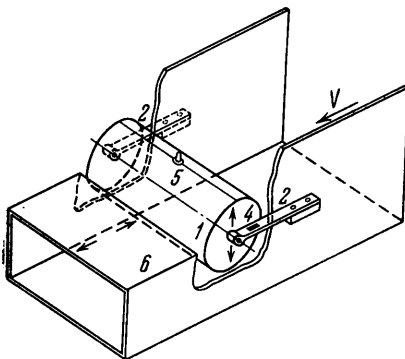
1. Иоффе А. И., Наугольных К. А., Рой Н. А. О начальной стадии электрического разряда в воде. ПМТФ, 1964, № 4.
2. Скворцов Ю. В., Комельков В. С., Кузнецов Н. М. Расширение канала искры в жидкости. ЖТФ, 1960, т. 30, вып. 10.
3. Cole R. Underwater explosions. Princenton, 1948. Коул Р. Подводные взрывы. Изд. иностр. лит., 1950.
4. Яковлев Ю. С. Гидродинамика взрыва. Судпромгиз, 1961.
5. Кочина, Н. Н., Мельникова Н. С. О расширении поршня в воде. ПММ, 1959, т. 23, стр. 93.
6. Наугольных К. А. О расширении цилиндра в жидкости. Акуст. ж., 1962, т. 8, стр. 136.

### ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

Г. М. ФОМИН (Москва)

Опыты, проведенные в аэродинамической трубе с отсеком цилиндра, в спутном следе которого была установлена тонкая пластинка, показали, что пластинка изменяет характер течения в следе и при определенных условиях позволяет почти полностью демпфировать колебания цилиндра.

Эксперименты А. Рошко, проведенные с тонкой пластинкой, помещенной вдоль оси спутного следа за кормовой частью жестко закрепленного цилиндра, показали [1],



Фиг. 1

что пластинка вызывает изменение частоты срыва вихрей с цилиндра и уменьшает его лобовое сопротивление. При смещении пластинки вниз по потоку частота срыва вихрей и коэффициент лобового сопротивления цилиндра уменьшается, но затем при расстоянии между цилиндром и передней кромкой пластинки, превышающем четыре диаметра цилиндра, происходит резкий скачок этих величин, и они становятся такими же, как при отсутствии пластинки. Подобные опыты были повторены и расширены другими исследователями [2] и подтвердили первоначальные выводы. Все эти опыты проводились с жестко закрепленными плохообтекаемыми телами, лишенными возможности совершать колебания. Известно, однако, что при колебаниях процесс образования вихрей за телом происходит совсем по иному, изменяются и аэродинамические силы, действующие на плохообтекаемое тело; вся картина течения, достаточно сложная даже при жестко закрепленном теле, еще более усложняется.

В этом случае заранее нельзя было предугадать, демпфирующее или возбуждающее действие окажет пластинка на колебания тела, не говоря уже о количественной оценке этого влияния. Кроме того, сравнение величины и частотного спектра мгновенных давлений, действующих на поверхность цилиндра при наличии пластинки и без нее, позволило бы расширить наши представления обо всей картине течения около колеблющегося цилиндра и за ним.

Опыты проводились с двумя цилиндрическими отсеками длиной 0,5 м и диаметрами  $D_1 = 250$  мм и  $D_2 = 172$  мм. Цилиндр 1 при помощи двух пластинчатых пружин 2 крепился к п-образной раме 3 (фиг. 1), установленной в аэродинамической трубе дозвуковых скоростей. Пружины позволяли цилиндру совершать колебания, которые практически можно считать перпендикулярными вектору скорости потока в трубе. Путем изменения длины пружин можно было по желанию подбирать частоту собственных колебаний цилиндра. Так, для цилиндра  $D_1 = 250$  мм частота собственных колебаний (вне потока) была равна  $n_1 = 13,1$  гц, а для цилиндра  $D_2 = 172$  мм  $n_2 = 20$  гц, т. е. числа Струхала для обоих цилиндров при одной и той же скорости потока  $V$  почти совпадали:  $S_1 = n_1 D_1 / V \approx n_2 D_2 / V = S_2$ . В то же время числа Рей-