

В [3] была предложена следующая гипотеза. В силу малых, но конечных случайных возмущений, вторичные режимы довольно сложной ячеистой структуры могут переходить один в другой. Эти нестационарные процессы взаимных переходов могут весьма существенно осложнить картину течения. Однако, по-видимому, построенные в данной работе течения неустойчивы и указанное явление может происходить при некоторых исключительных условиях (например, включено, а затем выключено сильное магнитное поле).

Поступило 16 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. И в а н и л о в Ю. П., Я к о в л е в Г. Н. О бифуркации течений жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. Ю д о в и ч В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. И в а н и л о в Ю. П. Вторичные режимы в конвективных течениях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. К о ч и н И. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е И. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.
5. T a y l o r G. I. Experiments with rotating fluids. Proc. Inst. Inter. Congr. Appl. Mech., 1924, p. 89—96.
6. T a y l o r G. I. Stability of a Viscous Liquid contained between two rotating Cylinders. Phil. Trans., A, 1923, vol. 223, p. 289.
7. И в а н и л о в Ю. П., П а ш и н и н о в а Л. В. Устойчивость длинных волн в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.

ЦИЛИНДР В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. ПЕТРИЩЕВ (Обнинск)

Излагается методика расчета поля температуры в окрестности цилиндра, обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости при заданных условиях для теплового потока или температуры на поверхности цилиндра. В основу расчетов положены уравнения Навье — Стокса и уравнение энергии для стационарного режима теплообмена. Численные расчеты проведены для трех режимов обтекания цилиндра, соответствующих числам Рейнольдса 20, 40 и 80. Находится распределение давления, завихренности и температуры вдоль поверхности цилиндра.

Известно, что при числе Рейнольдса $R > 1$ расчет сопротивления цилиндра в рамках решения уравнений Озеена и Стокса дает существенное расхождение с экспериментальными данными. В 1933 г. Томом [1] впервые была решена эта задача на основе уравнений Навье — Стокса. В дальнейшем к задаче об обтекании цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью обращались ряд исследователей [2, 3].

Установлено, что устойчивое решение уравнений Навье — Стокса существует для чисел $R \leq 40$ и что при этом результаты расчета находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Согласно работе [2], устойчивое решение существует и для $R = 44$. Допускается возможность получения стационарного решения при числах $R > 44$.

Анализ результатов работы [2] позволяет сказать, что вопросы построения разностной схемы с заданным порядком аппроксимации исходных дифференциальных соотношений, позволяющей получить искомое решение во всем интересующем диапазоне изменения параметров задачи по-прежнему требуют внимания.

Расчет поля скорости в окрестности цилиндра дает возможность рассчитать и температурный режим цилиндра при заданных условиях для теплового потока или температуры на его поверхности. Однако, известен лишь опыт аналитического решения ряда вопросов теплообмена цилиндра с окружающей жидкостью при больших числах R в рамках теории пограничного слоя [4].

1. **Постановка задачи.** Рассматривается случай, когда поле скорости не зависит от распределения температуры¹.

Задача о расчете поля скорости в окрестности цилиндра, обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости, сводится при этом к решению системы уравнений

$$R \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} \right) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_0^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\Phi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} \right), \quad u = - \frac{\partial \psi}{\partial y_0}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \quad (1.2)$$

в области $1 < x_0^2 + y_0^2 < \rho^2$, $y_0 > 0$ при следующих условиях для ψ вдоль границы:

¹ Слабая зависимость свойств от температуры характерна, например, для жидких металлов.

на поверхности цилиндра ($x_0^2 + y_0^2 = 1$)

$$\partial\psi / \partial x_0 = \partial\psi / \partial y_0 = 0 \quad (1.3)$$

в точках $x_0^2 + y_0^2 = \rho^2$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_0} = -1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = 0 \quad (1.4)$$

вдоль границы $y_0 = 0$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_0} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y_0^2} = 0 \quad (1.5)$$

Функция ψ определяется с точностью до постоянной. Пусть в точке $x_0 = -\rho$, $y_0 = 0$ функция $\psi = 0$. Следуя работе [2], отобразим внешность полукруга $1 \leq x_0^2 + y_0^2 < \infty$, $y_0 > 0$ на прямоугольнике $-\pi \leq x_1 \leq 0$, $0 \leq y_1 < \infty$, полагая

$$x_0 = r \cos \varphi, \quad y_0 = r \sin \varphi, \quad x_1 = -\varphi, \quad y_1 = \ln r$$

В плоскости $x_1 y_1$ соотношения (1.1), (1.2) принимают вид

$$R \left(u \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + v \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} \right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2} \quad (1.6)$$

$$\Phi = - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} \right) Q, \quad u = - \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \quad Q = \left| \frac{dX_1}{dX_0} \right| \quad (1.7)$$

В рассматриваемом случае $Q = 1/r^2$. Для определения температуры имеем

$$RP \left(u \frac{\partial T}{\partial x_1} + v \frac{\partial T}{\partial y_1} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \quad (1.8)$$

Условия для ψ и T вдоль границы

$$\begin{aligned} y_1 = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0, \quad a \frac{\partial T}{\partial y_1} + bT = c \\ y_1 = \ln \rho, \quad \psi = \rho \sin x_1, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} = \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0 \\ x_1 = 0, \quad x_1 = -\pi, \quad \psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} = \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \\ x_1 = 0, \quad y_1 = \ln \rho, \quad T = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Построение разностного аналога задачи. Покроем область $-\pi \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq \ln \rho$ (индекс 1 при переменных x , y опускается) сеткой из координатных прямых x_i и y_k с шагом h и H соответственно ($i = 0, 1, \dots, m+1$; $k = 0, 1, \dots, n+1$). В уравнении (1.6) от дифференциальных операторов перейдем к конечно-разностным. Для производных $\partial\Phi / \partial x$ и $\partial\Phi / \partial y$ используем представления вида [5]

$$\begin{aligned} (\partial\Phi / \partial x)_i &= \alpha(\Phi_i - \Phi_{i-1}) - \beta(\Phi_i - \Phi_{i-2}), \quad \text{если } u_i \geq 0, i \neq 1 \\ (\partial\Phi / \partial x)_i &= \alpha(\Phi_{i+1} - \Phi_i) - \beta(\Phi_{i+2} - \Phi_i), \quad \text{если } u_i < 0, i \neq m \\ (\alpha = 2/h, \quad \beta = 1/2h) \end{aligned}$$

Заметим, что процесс последовательных приближений для разностной схемы

$$\alpha(u_i - u_{i-1}) - \beta(u_i - u_{i-2}) = 0$$

построенный как

$$\sigma(u_i^{l+1} - u_i^l) + \alpha(u_i^{l+1} - u_{i-1}^{l+1}) - \beta(u_i^l - u_{i-2}^l) = 0$$

устойчив при всех значениях параметра.

Для второй производной $\partial^2\Phi / \partial x^2$ — обычная трехточечная схема

$$-(\partial^2\Phi / \partial x^2)_i = -a\Phi_{i-1} + (a+c)\Phi_i - c\Phi_{i+1}, \quad a = c = 1/h^2$$

В точках $i = 1$ при $u > 0$ и $i = m$ при $u < 0$ подход к аппроксимации

$$L\Phi = uR \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

особый. Следуя работе [7], рассмотрим оператор

$$L^{\circ}\Phi = uR \frac{\partial\Phi}{\partial x} + A \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Для производной $\partial\Phi/\partial x$ в (2.1) используем одностороннюю разность

$$\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h}, \quad \text{если } u_i > 0; \quad \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h}, \quad \text{если } u_i < 0$$

а для $\partial^2\Phi/\partial x^2$, как и выше, — трехточечную схему. Можно показать, что для

$$A = \frac{1}{1 + 0.5|uR|h} \quad \text{и } h \rightarrow 0$$

разностный оператор L° , построенный таким образом, аппроксимирует исходный L с порядком h^2 . Функция Φ известна во всех точках границы, кроме участка $y = 0$. В соответствии с определением,

$$\Phi_{i0} = - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right)_{i0} Q_0$$

выражение для Φ_{i0} на этом участке может быть сведено к виду

$$\Phi_{i0} = - \frac{6}{H^2} \frac{\psi_{i1}}{3 - Q_1} - \frac{\Phi_{i1}}{3 - Q_1}$$

Здесь ψ_{i1} , Φ_{i1} , Q_1 — значения функций ψ , Φ и Q в точках области, удаленных от границы $y = 0$ на расстояние H . Окончательно разностный аналог (1.6) и условий для Φ вдоль границы будет

$$-a_{ik}\Phi_{i-1,k} - c_{ik}\Phi_{i+1,k} - b_{ik}\Phi_{i,k-1} - d_{ik}\Phi_{i,k+1} + \Phi_{ik} = f_{ik} + (F\Phi)_{ik} + (G\psi)_{ik} \quad (2.2)$$

$$a_{ik} = c_{mk} = b_{i1} = d_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь ψ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = - \frac{\Phi}{Q} \quad (2.3)$$

при условиях для ψ на границе области, определяемых условиями втекания жидкости в область через соответствующий участок границы

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x = -\pi, \quad \psi = 0, \quad y = \ln \rho, \quad \psi = \rho \sin x \quad (2.4)$$

В определение правой части (2.2) включены члены типа $\beta(\Phi_i - \Phi_{i-2})$ и т. д.

Для аппроксимации оператора Лапласа в (2.3) — обычная пятиточечная схема. Разностный аналог (2.3), (2.4)

$$-a_{ik}^{\circ}\psi_{i-1,k} - c_{ik}^{\circ}\psi_{i+1,k} - b_{ik}^{\circ}\psi_{i,k-1} - d_{ik}^{\circ}\psi_{i,k+1} + \psi_{ik} = \quad (2.5)$$

$$= f_{ik}^{\circ} + \frac{\Phi_{ik}}{Q_k} \frac{1}{a_{ik}^{\circ} + c_{ik}^{\circ} + d_{ik}^{\circ} + b_{ik}^{\circ}} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

где $a_{ik}^{\circ} = c_{mk}^{\circ} = b_{i1}^{\circ} = d_{in}^{\circ} = 0$.

3. Итерационный процесс. В уравнении (2.2) на линии $k = 1$ прибавим слева и справа член типа $\kappa b_{i1}\Phi_{i1}$. Случай $\kappa = 1$ соответствует операции исключения ψ_{i1} из (2.2) при помощи уравнения (2.5), разрешенного относительно ψ_{i1} . Дальнейшие преобразования системы (2.2), (2.5) основаны на использовании идеи «неполной факторизации», высказанной в работе [8]. В отличие от [8] здесь реализуется вариант «переменных направлений», который является, видимо, наипростейшим как для анализа, так и для реализации на ЭВМ из серии вариантов, которые могут быть построены по аналогии с алгоритмом, предложенным в [8]. Пусть

$$Lu = f, \quad \text{или} \quad -a_{ik}u_{i-1,k} - c_{ik}u_{i+1,k} - b_{ik}u_{i,k-1} - d_{ik}u_{i,k+1} + u_{ik} = f_{ik} \quad (3.1)$$

есть исходное разностное уравнение. Преобразуем (3.1) — прибавим слева и справа некий вектор Bu с линейным оператором B и рассмотрим следующий итерационный процесс

$$B(u^{l+1} - u^l) + Lu^{l+1} = f \quad (3.2)$$

Если данная система разрешима «на $(l + 1)$ -м уровне», то в случае сходимости ($\|u^{l+1} - u^l\| < \varepsilon$) величина u^{l+1} есть решение $\Lambda u = f$. Пусть

$$(Bu)_{ik} = b_{ik}(a_{ik-1}u_{i-1k-1} + c_{ik-1}u_{i+1k-1}) + d_{ik}(a_{ik+1}u_{i-1k+1} + c_{ik+1}u_{i+1k+1})$$

Тогда оператор $B + \Lambda$ факторизуется и может быть представлен в виде A_1A_2 , а процесс (3.2) как

$$A_1A_2u^{l+1} = f + Bu^l \tag{3.3}$$

где

$$(A_1v)_{ik} = v_{ik} - a_{ik}v_{i-1k} - c_{ik}v_{i+1k}, \quad (A_2u)_{ik} = u_{ik} - b_{ik}u_{ik-1} - d_{ik}u_{ik+1}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости итерационной схемы (3.3). Пусть во всех внутренних узлах сетки $a_{ik} = c_{ik} = b_{ik} = d_{ik} = 1/4$ и, соответственно,

$$b_{ik}a_{ik-1} = b_{ik}c_{ik-1} = d_{ik}a_{i, k+1} = d_{ik}c_{i, k+1} = 1/16$$

Поведение решения $\psi^l = \lambda^l \sin k_1x \sin k_2y$ определяется значением модуля коэффициента λ , выражение для которого в данном случае сводится к виду

$$\lambda = \frac{\cos k_1h \cos k_2h}{\cos k_1h \cos k_2h + 4 [\sin^2(0.5k_1h) + \sin^2(0.5k_2h)]}$$

где h — шаг сетки. Нетрудно видеть, что $\lambda_* = \max |\lambda(k_1, k_2)| < 1$, т. е. условие устойчивости схемы (3.3) в рассматриваемой постановке выполняется.

Средление каждого следующего приближения для Φ сводится к последовательному решению следующей системы уравнений:

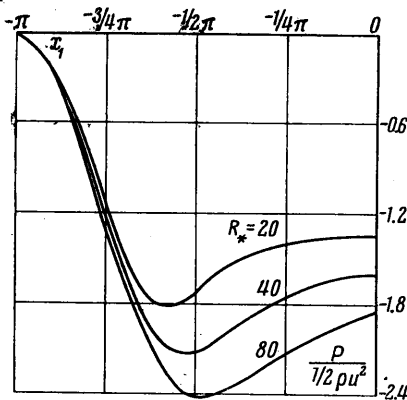
$$\begin{aligned} Z_{ik} - a_{ik}Z_{i-1k} - c_{ik}Z_{i+1k} &= f_{ik} + (F\Phi^l)_{ik} + (G\psi^l)_{ik} + (B\Phi^l)_{ik} \\ Y_{ik} - a_{ik}^{\circ}Y_{i-1k} - c_{ik}^{\circ}Y_{i+1k} &= f_{ik}^{\circ} + \frac{1}{a_{ik}^{\circ} + c_{ik}^{\circ} + b_{ik}^{\circ} + d_{ik}^{\circ}} \frac{\Phi_{ik}^{l+1}}{Q_h} + (B^{\circ}\psi^l)_{ik} \\ \Phi_{ik}^{l+1} - b_{ik} \Phi_{i, k-1}^{l+1} - d_{ik} \Phi_{i, k+1}^{l+1} &= Z_{ik}, \quad \psi_{ik}^{l+1} - b_{ik}^{\circ} \psi_{i, k-1}^{l+1} - d_{ik}^{\circ} \psi_{i, k+1}^{l+1} = Y_{ik} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Условие связи двух приближений для Φ описано в [5] и здесь использовалось без изменений.

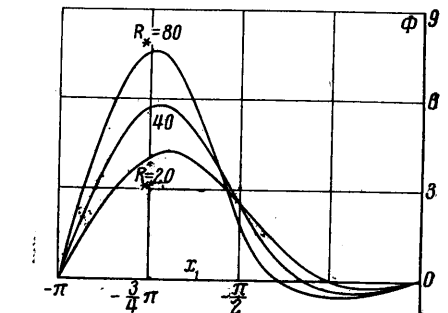
Если собственные значения оператора перехода с одного итерационного слоя на другой Λ мнимые, то в решении $\Phi(l)$ появляются гармоники типа $\sin \omega l$. В случае, когда Λ не зависит от l , искомым решением задачи является функционал Ω :

$$\Omega = \frac{1}{l_2 - l_1} \sum_{l_1}^{l_2} \Phi(l), \quad l_2 - l_1 \rightarrow \infty$$

где $\Phi(l)$ есть решение задачи (3.4). Операция усреднения для выделения в решении «стационарной части» может быть использована и в том случае, если амплитуда возмущений «почти незатухающих



Фиг. 1



Фиг. 2

во времени», достаточно мала, так что оператор Λ задачи может рассматриваться как постоянный.

4. Вопросы реализации и обсуждение результатов расчета. Система (3.4) интегрировалась до установления Φ с точностью ϵ_1 , а затем до установления Φ с точностью ϵ_2 , с одновременным расчетом и сравнением двух приближений для Ω . При выполнении условия

$$\|\Omega^{l+1} - \Omega^l\| < \epsilon_3, \quad \|\Phi^{l+1} - \Phi^l\| > \epsilon_2$$

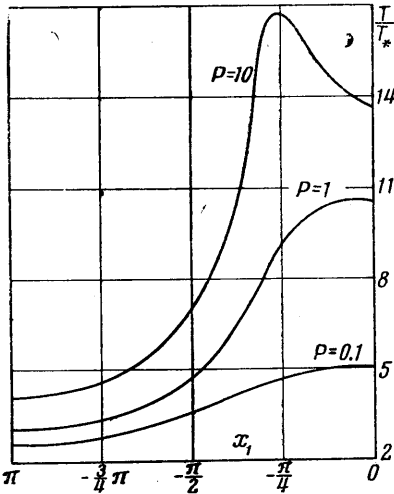
решалась задача

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = -\Omega^{l+1} / Q$$

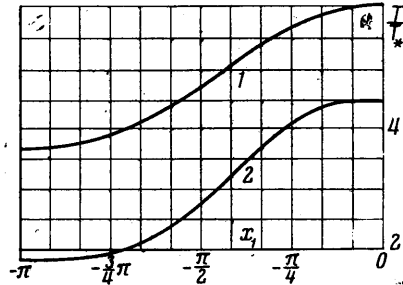
и таким образом определялось окончательное решение задачи.

Для режима обтекания при числе Рейнольдса

$$R_* = u_{co} d / \nu = 40$$



Фиг. 3



Фиг. 4

для уточнения решения для Φ от $\epsilon_1 = 10^{-3}$ до $\epsilon_2 = 10^{-4}$ ($\epsilon_3 = 0$) потребовалось 111 итераций, в то время как процесс для Ω сходится при этом за 35 итераций. Для режима $R_* = 80$ соответствующие цифры такие: 115 и 31 (рассчитывались три режима обтекания: $R_* = 20, 40$ и 80 ; в указанной постановке сходимость процесса по Ω имела место только для $R_* = 40, 80$).

Распределение давления на поверхности цилиндра удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 2F, \quad F = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0}$$

В разностной постановке

$$p_{i0} = p_{i-10} + h(F_{i0} + F_{i-10}), \quad F_{i0} = \frac{4\Phi_{i1} - \Phi_{i2} - 3\Phi_{i0}}{2HR} \quad (4.1)$$

Результаты расчета давления по формуле (4.1) представлены на фиг. 1. Расхождение с результатами работы [2] для числа $R_* = 40$ не превышает 4%.

На фиг. 2 представлено распределение завихренности на поверхности цилиндра для трех режимов обтекания. Можно обратить внимание на смещение точки отрыва потока с изменением числа R .

Рассчитан ряд режимов теплообмена цилиндра с потоком вязкой несжимаемой жидкости в предположении, что обратное влияние поля температуры на поле скорости отсутствует. На фиг. 3, 4 представлено распределение температуры T/T_* по периметру цилиндра для $R_* = 40$ и трех значений числа Прандтля $P = 0.1, 1$ и 10 (фиг. 3) и для $P = 0.1$ и двух значений числа $R_* = 20, 80$ (фиг. 4). Здесь

$$T_* = (100P)^{0.5} \frac{qd}{\lambda}$$

где q — поток тепла на поверхности цилиндра, d — диаметр цилиндра, λ — теплопроводность жидкости. Среднее значение числа Нуссельта N для режима $R_* = 40, P = 0.1$ равно 0.94. Расчет по эмпирической формуле

$$N = 0.5 R_*^{0.5} P^{0.38}$$

дает значение 1.32.

Поступило 29 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Thom A. The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds. Proc. Roy Soc. A, 1933, 141, 651.
2. Apelt C. J. The Steady Flow of a Viscous Fluid Past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers 40 and 44. ARS Repts and Mem. 1961, 3175.
3. Калис Х. Э., Цинбер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В. Обтекание круглого цилиндра электропроводящей жидкостью в поперечном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1965, 1.
4. Леонтьев А. И., Рягин Б. А. Теплообмен в вихревой области при поперечном обтекании цилиндра. ПМТФ, 1966, № 6.
5. Булеев Н. И., Петрищев В. С. Численный метод решения уравнений гидродинамики для плоского потока. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 6.
6. Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. СО АН СССР, 1965.
7. Самарский А. А. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
8. Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии. Матем. сб., 1960, т. 51, № 2.

РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПОРШЕНЬ ПРИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ЕГО РАСШИРЕНИЯ

И. З. ОКУНЬ (Ленинград)

Рассматривается задача о расширении с постоянной скоростью плоского, цилиндрического или сферического поршня в сжимаемой жидкости и произведен расчет давления жидкости на поршень в зависимости от его скорости. Рассматривается решение автоматической задачи о расширении поршня в сжимаемой жидкости с постоянной скоростью. Подобная задача была решена в работе Н. Н. Кочиной и Н. С. Мельниковой «О расширении поршня в воде» (ПММ, 1959, т. 23, в. 4). Приводятся результаты численного решения этой задачи для некоторых значений параметров, характеризующих задачу, и зависимость давления на поршень от скорости поршня аппроксимируется некоторыми эмпирическими формулами. Для случаев цилиндрического и сферического поршня приближенные аналитические зависимости давления на поршень от скорости сравниваются с численным решением автоматической задачи расширения поршня.

При исследовании импульсного разряда в жидкости, осциллографируя разрядный ток i и активную составляющую напряжения на канале u , легко рассчитать кривую электрической мощности $N(t) = ui$, развиваемой в канале. Но для того чтобы определить скорость расширения канала v_1 и давление плазмы p_1 в нем, уравнение энергетического баланса [1]

$$\frac{N(t)}{l} = p_1 \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt}(p_1 s) \quad (0.1)$$

необходимо дополнить соотношением $p_1 = f(a)$, связывающим p_1 с законом изменения радиуса канала $a(t)$. Уравнение (0.1) записано для случая цилиндрической симметрии; l — длина канала разряда, $s = \pi a^2$ — сечение канала разряда.

Точное решение этой задачи требует интегрирования системы нелинейных уравнений в частных производных. Граничными условиями будут уравнение (0.1) и условия динамической совместности на фронте ударной волны.

Решение задачи значительно упрощается, если, пренебрегая изменениями плотности жидкости ρ по координате r и во времени t , положить $\rho(r, t) = \text{const}$ между фронтом и каналом. В дальнейшем канал, без учета испарения жидкости со стенок, будет считаться непроницаемым поршнем.

Проверкой допустимости предположения $\rho = \text{const}$ при расчете зависимости $p_1 = f(a)$ может служить сравнение результатов приближенного решения, в основе которого лежит это допущение, и точного решения автоматической задачи расширения поршня (цилиндрического или сферического) в жидкости с постоянной скоростью. Кроме того, точное решение автоматической задачи представляет и самостоятельный интерес при исследовании начальной стадии разряда, когда цилиндрический канал разряда расширяется с постоянной скоростью [1, 2].