Полагая в (5.4) $v_1 \equiv 0$, получим силу сопротивления неподвижной сферы, помещенной в поток вязкой жидкости, заданный на сфере конечного радиуса

$$F_1 = 6\pi\mu r_1 v \delta_0 \left[1 + \left(\frac{\delta_5}{\delta_6} + \frac{\delta_7}{\delta_8} \right) R^2 \right] \tag{5.5}$$

Сравнение (5.4) с (5.5) указывает на то, что вращающаяся сфера имеет большее лобовое сопротивление, чем покоящаяся.

Интересно сравнить коэффициент сопротивления, полученный нами (5.5), с коэффициентами сопротивления в случае обтекания сферы потоком, равномерным на бесконечности, найденными Озееном [4]

$$f = 1 + 0.375\,R \tag{5.6}$$

и Праудменом и Пирсоном [5]

$$f = 1 + 0.375\,R + 0.225\,R^2 \ln R \tag{5.7}$$

В прилагаемой таблице для некоторых чисел Рейнольдса R даны значения коэффициента сопротивления, вычисленные по формулам (5.5) — (5.7).

R	(5.6)	(5.7)	(5.5)			
			$a = 10$	$a = 20$	$a = 30$	$a = 50$
0.1	1.04	1.03	1.29	1.13	1.09	1.06
0.2	1.08	1.06	1.29	1.14	1.10	1.09
0.4	1.15	1.12	1.30	1.17	1.17	1.21
0.6	1.22	1.18	1.33	1.22	1.28	1.42
0.8	1.30	1.27	1.36	1.29	1.53	1.70
1	1.38	1.38	1.40	1.38	1.62	2.07
2	1.75	2.37	1.75	2.12	3.24	5.14
3	2.12	4.35	2.32	3.37	5.94	10.24
4	2.50	7.49	3.13	5.12	9.71	17.40
5	2.88	11.93	4.17	7.37	14.56	26.60

Из таблицы видно, что числовые значения коэффициента сопротивления, полученные по формулам (5.5) и (5.7), весьма близки, особенно при малых числах Рейнольдса. Однако, полного совпадения нет, что и следовало ожидать, ибо, во-первых, решались математически разные задачи, во-вторых, решения этих задач получены с разной степенью точности по отношению к числу Рейнольдса.

Поступило 26 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. Вуз'ов «Математика», 1963, № 4.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, Физматгиз, 1962.
4. Oseen C. W. Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandtè Aufgabe in der Hydrodynamik. Arkiv för Matematik Astr. og Fys, 1910, vol. 6, 29.
5. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow pastasphere and a circular cylinder. J. of Fluid Mech., 1957, No. 2, pt. 3 (русск. перев.: в сб. «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей, 1958, № 2).

ВТОРИЧНЫЕ РЕЖИМЫ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Ю. П. ИВАНИЛОВ *(Москва)*

В статье рассматриваются асимптотические решения вторичных стационарных течений в жидкости, заключенной между вращающимися в одну сторону цилиндрами в том случае, когда числа Рейнольдса велики.

В работах [1, 2] было доказано существование вторичных осесимметричных стационарных течений в жидкости, заключенной между вращающимися в одну сторону цилиндрами. Ниже приводится асимптотика таких решений для случая больших чисел Рейнольдса. Построение проводится по схеме, предложенной в [3].

1. Пусть жидкость заключена в полости между вращающимися в одну сторону соосными цилиндрами. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, x) с осью x по оси циллиндров. Будем разыскивать стационарные осесимметричные течения, не зависящие от угла θ и времени. Выберем в качестве характерных размеров угловую скорость ω_1 и радиус r_1 внутреннего цилиндра. В этом случае безразмерная угловая скорость и радиус внутреннего цилиндра равны единице. Безразмерную угловую скорость и радиус внешнего цилиндра обозначим через ω и a соответственно.

Поставленная задача имеет известное решение [4]

$$v_r = v_x = 0, \qquad v_\theta = v_0 = \alpha r(\beta / r^2 - 1)$$

$$\alpha = \frac{1 - a^2\omega}{a^2 - 1}, \qquad \beta = \frac{a^2(1-\omega)}{1 - a^2\omega} \tag{1.1}$$

Здесь v_r, v_x, v_θ компоненты скорости.

Течение, соответствующее решению (1.1), носит название течения Куэтта.

Для разыскания таких течений вводим функцию тока ψ и представим v_θ, согласно формулам

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(r^2\psi), \qquad v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\psi), \qquad v_\theta = v_0 + rv \tag{1.2}$$

Неизвестные функции ψ и v определяются следующей системой уравнений:

$$D^2\psi = 2R\alpha\left(\frac{\beta}{r^2} - 1\right)\frac{\partial u}{\partial x} + R\left\{r^{-1}\frac{\partial(D\psi, r^2\psi)}{\partial(x, r)} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

$$Dv = 2\alpha R\frac{\partial\psi}{\partial x} + R\frac{1}{r^3}\frac{\partial(r^2v, r^2\psi)}{\partial(x, r)}, \qquad R = \frac{\omega_1 r_1}{\nu}$$

$$D \equiv \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(x, r)} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$v = \psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \qquad \text{при } r = 1, a \tag{1.3}$$

Здесь R — число Рейнольда, ν — кинематическая вязкость.

Течению Куэтта соответствует тривиальное решение $v = \psi = 0$ задачи (1.3). Это решение единственно [1] при любых числах Рейнольдса в случае $a^2\omega > 1$ и при достаточно малых числах R в случае $a^2\omega < 1$.

Тейлор [5, 6] экспериментально установил наличие стационарных осесимметрических течений, отличных от куэттовского. В работах [1, 2] существование таких течений для случая $a^2\omega < 1$ было доказано теоретически.

В следующем пункте построено ассимптотическое решение системы (1.3) для случая больших чисел R.

2. Ограничимся периодическими по x периода $2\pi k^{-1}$ четными v и нечетными ψ решениями (1.3).

В случае $a^2\omega < 1$ элементарные вычисления показывают, что $\beta / r^2 - 1 > 0$ при $r \in (1, a)$. Введем вместо r новую независимую переменную y:

$$y = \int_1^r \sigma(r)\,dr, \qquad \sigma(r) = \left(\frac{\beta}{r^2} - 1\right)^{1/6}, \qquad y \in (0, y_0), \qquad y_0 = \int_1^a \sigma(r)\,dr$$

Представим число Рейнольдса в форме

$$R = \frac{\rho^3(1 + \varepsilon\rho^{-1})}{2\alpha k}, \qquad \rho = \left(n + \frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{y_0}$$

Здесь n — любое целое число. Число Рейнольдса выражено, таким образом, через новый параметр ε. Для больших чисел Рейнольдса n (а. следовательно, ρ) велико, ε можно считать намного меньшим n.

Для больших чисел Рейнольдса удобно сделать растяжение зависимых и независимых переменных по формулам

$$\psi = \frac{\varphi}{\rho\sqrt{\rho}}, \qquad v = \frac{\sigma^{-2}\theta}{\rho\sqrt{\rho}}, \qquad x = \frac{\xi}{k}, \qquad y = \frac{\eta}{\rho}$$

тем самым введем в уравнение (1.3) большой параметр ρ. Система (1.3) после таких замен перейдет в систему

$$L^2\varphi = (1+\varepsilon\rho^{-1})\sigma^4\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} + \frac{(1+\varepsilon\rho^{-1})}{2\alpha\sqrt{\rho}\,r}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(L\varphi)\sigma\frac{\partial}{\partial\eta}(r^2\varphi) - \frac{\partial}{\partial\xi}r^2\varphi\sigma\frac{\partial}{\partial\eta}(L\varphi) + \frac{2}{\rho\sigma^4}\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right\},$$

$$L\sigma^{-2}\vartheta = (1+\varepsilon\rho^{-1})\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{(1+\varepsilon\rho^{-1})}{2\alpha r^3}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(r^2\sigma^{-2}\vartheta)\sigma\frac{\partial}{\partial\eta}(r^2\varphi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(r^2\varphi)\frac{\partial}{\partial\eta}(r^2\sigma^{-2}\vartheta)\right\}$$

$$L \equiv \sigma^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{(\sigma r^3)'}{r^3}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{k^2}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \qquad v = \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \ \rho y_0 \tag{2.1}$$

Штрих означает дифференцирование по r.

Решение системы (2.1) естественно разыскивать в виде ряда по степеням $\sqrt{\rho}$:

$$\varphi = \lambda\varphi_1 + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\rho}}\varphi_2 + \frac{\lambda^3}{\rho}\varphi_3 + \ldots, \qquad \vartheta = \lambda\vartheta_1 + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\rho}}\vartheta_2 + \frac{\lambda^3}{\rho}\vartheta_3 + \ldots \tag{2.2}$$

Подставляя ряды (2.2) в уравнения (2.1), имеем для первого приближения φ_1, ϑ_1 систему уравнений

$$\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial\eta^4} = \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}, \quad \vartheta_1 = \varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \ \rho y_0 \tag{2.3}$$

Согласно выбору $\rho = (n + {}^1/_3)\pi y_0^{-1}$ является при любом целом n собственным числом задачи (2.3). Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\varphi_1 = \left[\cos\left(\rho y + \frac{\pi}{3}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho y\right)\cos\left(\frac{1}{2}\rho y - \frac{2\pi}{3}\right) - (-1)^n \times\right.$$
$$\left.\times \exp\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(y - y_0)\cos\left(\frac{1}{2}\rho y - \frac{1}{2}\rho y_0 + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\sin kx + O\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho y_0\right)\right)$$
$$\vartheta_1 = \left[-\cos\left(\rho y + \frac{\pi}{3}\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho y\right)\cos\left(\frac{1}{2}\rho y - \frac{\pi}{3}\right) - (-1)^n \times\right. \tag{2.4}$$
$$\left.\times \exp\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(y - y_0)\cos\left(\frac{1}{2}\rho y - \frac{1}{2}\rho y_0 - \frac{\pi}{3}\right)\right]\cos kx + O\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho y_0\right)\right)$$
$$\rho = \left(n + \frac{1}{3}\right)\pi y_0^{-1}, \quad y = \int_0^r\left(\frac{\beta}{r^2} - 1\right)^{1/6}dr, \quad y_0 = \int_0^a\left(\frac{\beta}{r^2} - 1\right)^{1/6}dr$$

Решение (2.3) выписано в исходных переменных. Оно имеет простую структуру. Члены, содержащие экспоненту,— погранслойные. Их вклад в решение существен лишь в узкой полоске (ширины порядка ρ^{-1}) вблизи стенок цилиндров, по мере удаления от стенок они экспоненциально убывают и течение определяется, таким образом, лишь первыми членами (2.4)

$$\varphi_1 = \cos\left(\rho y + \frac{\pi}{3}\right)\sin kx + [\ldots], \qquad \vartheta_1 = -\cos\left(\rho y + \frac{\pi}{3}\right)\cos kx + [\ldots] \tag{2.5}$$

Символом [...] обозначены погранслойные члены.

Амплитуду решения λ определяем из условий разрешимости уравнений для следующих приближений. Второе приближение φ_2, ϑ_2 удовлетворяет системе

$$\frac{\partial^4\varphi_2}{\partial\eta^4} = \frac{\partial\vartheta_2}{\partial\xi} + [\ldots], \qquad \frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} - \frac{r\sigma^{-1}}{4\alpha}\sin\left(2\eta + \frac{2\pi}{3}\right) + [\ldots] \tag{2.6}$$

С точностью до малых порядка ρ^{-1} системе (2.6) удовлетворяют значения:

$$\varphi_2 = [\ldots], \qquad \vartheta_2 = \frac{r\sigma^{-1}}{16\alpha}\sin\left(2\eta + \frac{2\pi}{3}\right) + [\ldots] \tag{2.7}$$

В [3] была предложена следующая гипотеза. В силу малых, но конечных случайных возмущений, вторичные режимы довольно сложной ячеистой структуры могут переходить один в другой. Эти нестационарные процессы взаимных переходов могут весьма существенно осложнить картину течения. Однако, по-видимому, построенные в данной работе течения неустойчивы и указанное явление может происходить при некоторых исключительных условиях (например, включено, а затем выключено сильное магнитное поле).

Поступило 16 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванилов Ю. П., Яковлев Г. Н. О бифуркации течений жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Иванилов Ю. П. Вторичные режимы в конвективных течениях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Кочин И. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.
5. Taylor G. I. Experiments with lotating fluids. Proc. Inst. Inter. Congr. Appl. Mech., 1924, p. 89—96.
6. Taylor. G. I. Stability of a Viscous Liquid contained between two rotating Cylinders. Phil. Trans., A, 1923, vol. 223, p. 289.
7. Иванилов Ю. П., Пашининова Л. В. Устойчивость длинных волн в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.

ЦИЛИНДР В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. ПЕТРИЩЕВ *(Обнинск)*

Излагается методика расчета поля температуры в окрестности цилиндра, обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости при заданных условиях для теплового потока или температуры на поверхности цилиндра. В основу расчетов положены уравнения Навье — Стокса и уравнение энергии для стационарного режима теплообмена. Численные расчеты проведены для трех режимов обтекания цилиндра, соответствующих числам Рейнольдса 20, 40 и 80. Находится распределение давления, завихренности и температуры вдоль поверхности цилиндра.

Известно, что при числе Рейнольдса $R > 1$ расчет сопротивления цилиндра в рамках решения уравнений Озеена и Стокса дает существенное расхождение с экспериментальными данными. В 1933 г. Томом [1] впервые была решена эта задача на основе уравнений Навье — Стокса. В дальнейшем к задаче об обтекании цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью обращались ряд исследователей [2, 3].

Установлено, что устойчивое решение уравнений Навье — Стокса существует для чисел $R \leqslant 40$ и что при этом результаты расчета находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Согласно работе [2], устойчивое решение существует и для $R = 44$. Допускается возможность получения стационарного решения при числах $R > 44$.

Анализ результатов работы [2] позволяет сказать, что вопросы построения разностной схемы с заданным порядком аппроксимации исходных дифференциальных соотношений, позволяющей получить искомое решение во всем интересующем диапазоне изменения параметров задачи по-прежнему требуют внимания.

Расчет поля скорости в окрестности цилиндра дает возможность рассчитать и температурный режим цилиндра при заданных условиях для теплового потока или температуры на его поверхности. Однако, известен лишь опыт аналитического решения ряда вопросов теплообмена цилиндра с окружающей жидкостью при больших числах R в рамках теории пограничного слоя [4].

1. Постановка задачи. Рассматривается случай, когда поле скорости не зависит от распределения температуры [1].

Задача о расчете поля скорости в окрестности цилиндра, обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости, сводится при этом к решению системы уравнений

$$R\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y_0}\right)=\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_0^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\Phi=-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_0^2}\right),\qquad u=-\frac{\partial\psi}{\partial y_0},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x_0} \tag{1.2}$$

в области $1 < x_0^2 + y_0^2 < \rho^2$, $y_0 > 0$ при следующих условиях для ψ вдоль границы:

[1] Слабая зависимость свойств от температуры характерна, например, для жидких металлов.