Окончательно

$$\xi = \frac{b}{l}\int\limits_{\alpha}^{y'x} \left(\left\{ y'^2 \left[\frac{(E-F)^2 + Fk^2(2E-F)}{E^2(1-k^2)} - \frac{(F-E)(2+y'^2)}{E} - 1 \right\} \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} + \right.$$
$$+ A \left\{ \frac{6\mu^4 + 5\mu^2(1+\mu^2)y'^2 + 2(1-\mu^2+\mu^4)y'^4 - (1+\mu^2)y'^6}{\mu^2+y'^2} \left(\frac{F}{E}\alpha^2 - \alpha^2 - 1 \right) - \right.$$
$$\left. + y'^2 [2\mu^2 + (1+\mu^2)y'^2] \left[\frac{(E-F)^2 + Fk^2(2E-F)}{(1-k^2)E^2} \right] \alpha^2 \right\} \frac{y'}{(1+y'^2)^{5/2}(\mu^2+y'^2)^{3/2}} \Bigg) dy' \qquad (26)$$

Таким образом, уравнения (19) и (26) являются параметрическими уравнениями искомого тела.

В частном случае для тела вращения ($\mu = 1$) вместо формул (19) и (26) получаются более простые формулы, результаты расчетов по которым хорошо совпадают с данными, представленными в работах [5] и [6].

Поступило 2 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Гонор А. Л., Черный Г. Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
3. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. Изд-во «Наука», 1965.
4. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ, АН СССР, 1963.
5. Miele Angelo. Theory of optimum aerodynamics shapes. N. Y., London, ppl. Math. and Mech, 1965, vol. 9.
6. Suddath H., Oehman I. Minimum drag bodies with cross — sectional ellipticity. Langley Research Center, 1964.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд-во «Наука», 1965.

О ЛОБОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ

Р. И. ОВСЕЕНКО, Ю. Г. ОВСЕЕНКО

(Новочеркасск)

Рассматривается задача об установившемся обтекании вращающейся сферы потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса, которая сводится к решению полных уравнений Навье — Стокса.

Безразмерные функции тока и круговая скорость разыскиваются в виде рядов по степеням числа Рейнольдса, которые сходятся при малых значениях этого числа. Выводятся рекуррентные формулы для определения коэффициентов этих рядов. Находятся давление, момент сопротивления вращению и сила сопротивления. Устанавливается, что вращающаяся сфера имеет большее лобовое сопротивление, чем неподвижная. Вычислен главный член ряда по степеням числа Рейнольдса для силы сопротивления и момента сопротивления.

1. Постановка задачи. Пусть сфера радиуса r_1, вращающаяся вокруг оси, проходящей через ее центр, с угловой скоростью ω, обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса r_2, причем задаваемые векторы скорости $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ коллинеарны. Граничные условия задачи в сферической системе координат ($\theta = 0$ — ось симметрии) таковы:

$$v_\varphi = r_1 \omega \sin\theta, \quad v_r = v_\theta = 0 \quad \text{при } r = r_1$$
$$v_\varphi = 0, \quad v_r = v\cos\theta, \quad v_\theta = -v\sin\theta \quad \text{при } r = r_2 \qquad (1.1)$$

Необычность постановки задачи в части задания потока на концентрической сфере, а не на бесконечности обусловлена предлагаемым методом решения, требующим конечной области. Чем больше область течения, тем меньше числа Рейнольдса, при которых решение справедливо. Поэтому переход к переделу при $r_2 \to \infty$ в полученных формулах невозможен.

Запишем точные уравнения Навье — Стокса и предельные условия (1.1) в безразмерных величинах [1]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{1}{R}\frac{1}{x^2}\frac{\partial L\Phi}{\partial\tau}+\left(\frac{v_1}{v}\right)^2\frac{u^2}{x}+\frac{L\Phi}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\\
\frac{\partial Q}{\partial\tau} &= \frac{1}{R}\frac{1}{1-\tau^2}\frac{\partial L\Phi}{\partial x}-\frac{\tau}{1-\tau^2}\left(\frac{v_1}{v}\right)^2u^2+\frac{L\Phi}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

или, исключая Q и добавляя уравнение для круговой скорости,

$$
\begin{aligned}
LL\Phi &= R\left[2\left(\frac{v_1}{v}\right)^2u\left(\frac{1-\tau^2}{x}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\tau\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1-\tau^2}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{L\Phi}{1-\tau^2}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L\Phi}{x^2}\right)\right]\\
&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1-\tau^2}{x^2}\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}-\frac{2\tau}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{u}{x^2(1-\tau^2)}=\\
&=R\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{u}{x^2}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{\tau}{1-\tau^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&u=\sqrt{1-\tau^2},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=1\\
&u=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=-\tau a^2,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=(1-\tau^2)a \qquad \text{при } x=a
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\left(L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\tau^2}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2},\ x=\frac{r}{r_1},\ a=\frac{r_2}{r_1},\ \begin{matrix}\tau=\cos\theta,\\ v_1=r_1\omega,\end{matrix}\ R=\frac{r_1v}{\nu}\right)
$$

$$
\left(\lambda=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau},\ w=-\frac{1}{x\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ v_\varphi=v_1u(x,\tau),\ Q=\frac{\lambda^2+w^2}{2}+p\right)
$$

Здесь R — число Рейнольдса; $r_1^2v\,\Phi(x,\tau)$ — функция тока; $v_r=v\lambda(x,\tau)$, $v_\theta=vw(x,\tau)$ — проекции скорости; $\rho v^2p(x,\tau)$ — гидродинамическое давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости, так как за характерную скорость выбрана скорость потока v, то считаем $v_1\leqslant v$.

2. Решение задачи. Методом Фурье[1] можно показать, что решение системы (1.3) нужно искать в виде рядов следующей структуры:

$$
u(x,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-2}\sum_{i=1}^{k}u_{k,i}(x)P_{2i-1}^{1}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\sum_{i=1}^{k}v_{k,i}(x)P_{2i}^{1}(\tau)
\tag{2.1}
$$

$$
\Phi(x,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-2}\sum_{i=1}^{k}\psi_{k,i}(x)\sqrt{1-\tau^2}P_{2i-1}^{1}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\sum_{i=1}^{k}\Phi_{k,i}(x)\sqrt{1-\tau^2}P_{2i}^{1}(\tau).
$$

Здесь $P_n^1(\tau)$ — присоединенные функции Лежандра.

---

[1] В работе А. К. Никитина, В. С. Хапиловой (Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2), использующей такой же метод, допущена ошибка. Формула (1.6) не верна; все результаты ошибочны. Решение поставленной авторами задачи следует искать в виде

$$
\Phi(x,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\psi_{k,i}(x)\sqrt{1-\tau^2}P_{2i-1}^{1}(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\sum_{i=1}^{(m-1)k}\Phi_{k,i}(x)\sqrt{1-\tau^2}P_{2i}^{1}(\tau)
$$

$$
\varkappa={}^1\!/_2(m-1)(2k-1)+1
$$

Дальше, следуя плану статьи, вывести все расчетные формулы.

Известно, что ряды (2.1), при малых числах Рейнольдса, сходятся вместе со своими производными до порядка, обусловленного уравнениями (1.3) [2].

Подставляя значения $u(x,\tau)$ и $\Phi(x,\tau)$ (2.1) в (1.3), (1.4), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числа Рейнольдса слева и справа, а затем — при одинаковых $P_n^1(\tau)$, получим бесконечную последовательность систем дифференциальных уравнений типа Эйлера с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2u_{k,i}}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du_{k,i}}{dx}-\frac{2i(2i-1)}{x^2}u_{k,i}=f_{k,i}(x), \qquad G_iG_i\psi_{k,i}=\varphi_{k,i}(x) \\
\frac{d^2v_{k,i}}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dv_{k,i}}{dx}-\frac{2i(2i+1)}{x^2}v_{k,i}=g_{k,i}(x), \qquad D_iD_i\Phi_{k,i}=\eta_{k,i}(x) \\
(k=1,2,3,\ldots;\; i=1,2,\ldots k)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{при } x=1 \qquad u_{11}=-1, \qquad u_{k,i}=0 \qquad (k\geqslant 2) \\
&\qquad\qquad v_{k,i}=\psi_{k,i}=\Phi_{k,i}=\psi'_{k,i}=\Phi'_{k,i}=0 \qquad (k\geqslant 1) \\
&\text{при } x=a \qquad \psi_{11}=-{}^1/{}_2a^2, \qquad \psi_{11}'=-a, \qquad \psi_{k,i}=\psi'_{k,i}=0 \qquad (k\geqslant 2) \\
&\qquad\qquad u_{k,i}=v_{k,i}=\Phi_{k,i}=\Phi'_{k,i}=0 \qquad (k\geqslant 1)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$G_i=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2i(2i-1)}{x^2}(\ldots), \qquad D_i=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{2i(2i+1)}{x^2}(\ldots)$$

$$\begin{aligned}
f_{k,i}(x)=\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m}\Bigg[&\frac{2n(2n-1)}{x^2}\left(\Phi'_{m,\gamma}u_{k-m,n}-v'_{m,\gamma}\psi_{k-m,n}-\frac{v_{m,\gamma}\psi_{k-m,n}}{x}\right)\sigma_1+ \\
&+\frac{2\gamma(2\gamma+1)}{x^2}\left(\psi'_{k-m,n}v_{m,\gamma}-u'_{k-m,n}\Phi_{m,\gamma}-\frac{u_{k-m,n}\Phi_{m,\gamma}}{x}\right)\sigma_2\Bigg]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
g_{k,i}=&\sum_{m=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m+1}\frac{2n(2n-1)}{x^2}\left(\varphi'_{m,\gamma}u_{k-m+1,n}+u'_{m,\gamma}\psi_{k-m+1,n}-\frac{u_{m,\gamma}\psi_{k-m+1,n}}{x}\right)\sigma_3+ \\
&+\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m}\frac{2\gamma(2\gamma+1)}{x^2}\left(\Phi'_{k-m,n}v_{m,\gamma}-v'_{k-m,n}\Phi_{m,\gamma}-\frac{\Phi_{m,\gamma}v_{k-m,n}}{x}\right)\sigma_4
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,i}(x)=\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m}\Bigg\{&2\gamma\left[2\left(\frac{v_1}{v}\right)^2u_{k-m,n}\left(\frac{2\gamma}{x}v_{m,\gamma}-v'_{m,\gamma}\right)+\right. \\
&\left.+\frac{2\gamma-1}{x^2}\psi'_{k-m,n}D_\gamma\Phi_{m,\gamma}-(2\gamma+1)\Phi_{m,\gamma}\frac{d}{dx}\left(\frac{G_n\psi_{k-m,n}}{x^2}\right)\right]\sigma_2+ \\
&+(2n-1)\left[2\left(\frac{v_1}{v}\right)^2v_{m,\gamma}\left(\frac{2n-1}{x}u_{k-m,n}-u'_{k-m,n}\right)+\right. \\
&\left.+\frac{2n-2}{x^2}\Phi'_{m,\gamma}G_n\psi_{k-m,n}-2n\psi_{k-m,n}\frac{d}{dx}\left(\frac{D_\gamma\Phi_{m,\gamma}}{x^2}\right)\right]\sigma_1- \\
&-2\left[\left(\frac{v_1}{v}\right)^2u_{m,\gamma}\left(\frac{v_{k-m,n}}{x}+v'_{k-m,n}\right)+\frac{\psi_{m,\gamma}D_n\Phi_{k-m,n}}{x^2}\right]\sigma_5- \\
&-2\left[\left(\frac{v_1}{v}\right)^2v_{m,\gamma}\left(\frac{u_{k-m,n}}{x}+u'_{k-m,n}\right)+\frac{\Phi'_{m,\gamma}G_n\psi_{k-m,n}}{x^2}\right]\sigma_6\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{k,i}(x) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{n=1}^{k-m+1} \Bigg\{ & (2n-1)\left[2\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 u_{m,\gamma}\left(\frac{2n-1}{x}u_{k-m+1,n} - u'_{k-m+1,n}\right) + \right.\\
& \left. + \frac{2n-2}{x^2}\psi'_{m,\gamma}G_n\psi_{k-m+1,n} - 2n\psi_{k-m+1,n}\frac{d}{dx}\left(\frac{G_\gamma\psi_{m,\gamma}}{x^2}\right)\right]\sigma_3 - \\
& -2\left[\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 u_{m,\gamma}\left(\frac{u_{k-m+1,n}}{x} + u'_{k-m+1,n}\right) + \frac{\psi'_{m,\gamma}G_n\psi_{k-m+1,n}}{x^2}\right]\sigma_7\Bigg\} + \\
+ \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m} \Bigg\{ & 2\gamma\left[2\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 v_{k-m,n}\left(\frac{2\gamma}{x}v_{m,\gamma} - v'_{m,\gamma}\right) + \right.\\
& \left. + \frac{2\gamma-1}{x^2}\Phi'_{k-m,n}D_\gamma\Phi_{m,\gamma} - (2\gamma+1)\Phi_{m,\gamma}\frac{d}{dx}\left(\frac{D_n\Phi_{k-m,n}}{x^2}\right)\right]\sigma_4 - \\
& -2\left[\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 v_{m,\gamma}\left(\frac{v_{k-m,n}}{x} + v'_{k-m,n}\right) + \frac{\Phi'_{m,\gamma}D_n\Phi_{k-m,n}}{x^2}\right]\sigma_8\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Коэффициенты σ_n определяются равенствами

$$
\sigma_1 = (4l-1)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-n+p,\ 1\leqslant l\leqslant\gamma)}}^{m_1} \frac{a_{2i-2n+p-1}a_{2n-p-1}a_p}{(4i+2p-3)a_{2i+p-2}} - (4l-1)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-n+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant\gamma)}}^{m_1} \frac{a_{2i-2n+p+1}a_{2n-p-1}a_p}{(4i+2p+1)a_{2i+p}}
$$

$$
m_1 = \min(2n-1,\ 2l-1)
$$

$$
\left(a_j = \frac{(2j-1)!!}{j!}\right)
$$

$$
\sigma_2 = (4l-3)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-\gamma+p,\ 1\leqslant l\leqslant n)}}^{m_2} \frac{a_{2i-2\gamma+p-2}a_{2\gamma-p}a_p}{(4i+2p-3)a_{2i+p-2}} - (4l-3)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-\gamma+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant n)}}^{m_2} \frac{a_{2i-2\gamma+p}a_{2\gamma-p}a_p}{(4i+2p+1)a_{2i+p}}
$$

$$
m_2 = \min(2\gamma,\ 2l-2)
$$

$$
\sigma_3 = (4l-3)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-n+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant\gamma)}}^{m_3} \frac{a_{2i-2n+p}a_{2n-p-1}a_p}{(4i+2p-1)a_{2i+p-1}} - (4l-3)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-n+p+2,\ 1\leqslant l\leqslant\gamma)}}^{m_3} \frac{a_{2i-2n+p+2}a_{2n-p-1}a_p}{(4i+2p+3)a_{2i+p+1}}
$$

$$
m_3 = \min(2n-1,\ 2l-2)
$$

$$
\sigma_4 = (4l-1)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-\gamma+p,\ 1\leqslant l\leqslant n)}}^{m_4} \frac{a_{2i-2\gamma+p-1}a_{2\gamma-p}a_p}{(4i+2p-1)a_{2i+p-1}} - (4l-1)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-\gamma+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant n)}}^{m_4} \frac{a_{2i-2\gamma+p+1}a_{2\gamma-p}a_p}{(4i+2p+3)a_{2i+p+1}}
$$

$$
m_4 = \min(2\gamma,\ 2l-1)
$$

$$
\sigma_5 = (4l-3)\sum_{j=1}^{n}(4j-3)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-j+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant\gamma)}}^{m_5} \frac{a_{2i-2j+p}a_{2j-p-2}a_p}{(4i+2p-3)a_{2i+p-2}} -
$$

$$
-(4l-3)\sum_{j=1}^{n}(4j-3)\sum_{\substack{p=0 \\ (l=i-j+p+2,\ 1\leqslant l\leqslant\gamma)}}^{m_5} \frac{a_{2i-2j+p+2}a_{2j-p-2}a_p}{(4i+2p+1)a_{2i+p}}
$$

$$
m_5 = \min(2l-2,\ 2j-2)
$$

$$\sigma_6 = (4l-1)\sum_{j=1}^{n-1}(4j-1)\sum_{\substack{p=0\\(l=i-j+p,\ 1\leqslant l\leqslant\nu)}}^{m_6}\frac{a_{2i-2j+p-1}a_{2j-p-1}a_p}{(4i+2p-3)a_{2i+p-2}}-$$

$$-(4l-1)\sum_{j=1}^{n-1}(4j-1)\sum_{\substack{p=0\\(l=i-j+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant\nu)}}^{m_6}\frac{a_{2i-2j+p+1}a_{2j-p-1}a_p}{(4i+2p+1)a_{2i+p}}$$

$$m_6 = \min(2l-1,\ 2j-1)$$

$$\sigma_7 = (4l-3)\sum_{j=1}^{n-1}(4j-1)\sum_{\substack{p=0\\(l=i-j+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant\nu)}}^{m_7}\frac{a_{2i-2j+p}a_{2j-p-1}a_p}{(4i+2p-1)a_{2i+p-1}}-$$

$$-(4l-3)\sum_{j=1}^{n-1}(4j-1)\sum_{\substack{p=0\\(l=i-j+p+2,\ 1\leqslant l\leqslant\nu)}}^{m_7}\frac{a_{2i-2j+p+2}a_{2j-p-1}a_p}{(4i+2p+3)a_{2i+p+1}}$$

$$m_7 = \min(2n-2,\ 2j-1)$$

$$\sigma_8 = (4l-3)\sum_{j=1}^{\nu}(4j-1)\sum_{\substack{p=0\\(l=i-j+p+1,\ 1\leqslant l\leqslant n)}}^{m_7}\frac{a_{2i-2j+p}a_{2j-p-1}a_p}{(4i+2p-1)a_{2i+p-1}}-$$

$$-(4l-3)\sum_{j=1}^{\nu}(4j-1)\sum_{\substack{p=0\\(l=i-j+p+2,\ 1\leqslant l\leqslant n)}}^{m_7}\frac{a_{2i-2j+p+2}a_{2j-p-1}a_p}{(4i+2p+3)a_{2i+p+1}}$$

При проведении преобразований использованы формулы 8.915 [3]. Решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям (2.3), таково:

$$u_{11}(x) = \frac{x-a^3x^{-2}}{a^3-1}$$

$$u_{k,i}(x) = \frac{a^{2i}}{a^{4i-1}-1}\begin{vmatrix} A_{k,i}(x) & x^{-2i} & x^{2i-1}\\ A_{k,i}(1) & 1 & 1\\ A_{k,i}(a) & a^{-2i} & a^{2i-1}\end{vmatrix}\quad (k\geqslant 2)$$

$$v_{k,i}(x) = \frac{a^{2i+1}}{a^{4i+1}-1}\begin{vmatrix} B_{k,i}(x) & x^{-(2i+1)} & x^{2i}\\ B_{k,i}(1) & 1 & 1\\ B_{k,i}(a) & a^{-(2i+1)} & a^{2i}\end{vmatrix}\quad (k\geqslant 1) \tag{2.8}$$

$$A_{k,i}(x) = \frac{1}{4i-1}\left[x^{2i-1}\int_a^x \xi^{-2i+2}f_{k,i}(\xi)\,d\xi - x^{-2i}\int_1^x \xi^{2i+1}f_{k,i}(\xi)\,d\xi\right]$$

$$B_{k,i}(x) = \frac{1}{4i+1}\left[x^{2i}\int_a^x \xi^{-2i+1}g_{k,i}(\xi)\,d\xi - x^{-(2i+1)}\int_1^x \xi^{2i+2}g_{k,i}(\xi)\,d\xi\right] \tag{2.9}$$

$$\psi_{11}(x) = \frac{a}{2(a-1)^3(4a^2+7a+4)}[-2a^2(a^2+a+1)x^{-1} + 6(a^4+a^3+a^2+a+1)x -$$
$$-(4a^4+4a^3+4a^2+9a+9)x^2 + 3(a+1)x^4]$$

$$\psi_{k,i}(x) = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} C_{k,i}(x) & x^{-2i+1} & x^{-2i+3} & x^{2i} & x^{2i+2} \\ C_{k,i}(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ C'_{k,i}(1) & -(2i-1) & -(2i-3) & 2i & 2i+2 \\ C_{k,i}(a) & a^{-2i+1} & a^{-2i+3} & a^{2i} & a^{2i+2} \\ C'_{k,i}(a) & -(2i-1)a^{-2i} & -(2i-3)a^{-2i+2} & 2ia^{2i-1} & (2i+2)a^{2i+1} \end{vmatrix} \quad (k \geqslant 2) \qquad (2.10)$$

$$\Delta_1 = 4a^{4i+1} - (4i-1)^2a^4 + 2(4i+1)(4i-3)a^2 - (4i-1)^2 + 4a^{-4i+3}$$

$$C_{k,i}(x) = \frac{1}{2(4i-1)(4i+1)}\left[x^{2i+2}\int_a^x \xi^{-2i+1}\varphi_{k,i}(\xi)d\xi - x^{-2i+1}\int_1^x \xi^{2i+2}\varphi_{k,i}(\xi)d\xi\right] +$$
$$+\frac{1}{2(4i-1)(4i-3)}\left[x^{-2i+3}\int_1^x \xi^{2i}\varphi_{k,i}(\xi)d\xi - x^{2i}\int_a^x \xi^{-2i+3}\varphi_{k,i}(\xi)d\xi\right]$$

$$\Phi_{k,i}(x) = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} T_{k,i}(x) & x^{-2i} & x^{-2i+2} & x^{2i+1} & x^{2i+3} \\ T_{k,i}(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ T'_{k,i}(1) & -2i & -(2i-2) & 2i+1 & 2i+3 \\ T_{k,i}(a) & a^{-2i} & a^{-2i+2} & a^{2i+1} & a^{2i+3} \\ T'_{k,i}(a) & -2ia^{-2i-1} & -(2i-2)a^{-2i+1} & (2i+1)a^{2i} & (2i+3)a^{2i+2} \end{vmatrix} \quad (k \geqslant 1) \qquad (2.11)$$

$$\Delta_2 = 4a^{4i+3} - (4i+1)^2a^4 + 2(4i+3)(4i-1)a^2 - (4i+1)^2 + 4a^{-4i+1}$$

$$T_{k,i}(x) = \frac{1}{2(4i+1)(4i+3)}\left[x^{2i+3}\int_a^x \xi^{-2i}\eta_{k,i}(\xi)d\xi - x^{-2i}\int_1^x \xi^{2i+3}\eta_{k,i}(\xi)d\xi\right] +$$
$$+\frac{1}{2(4i+1)(4i-1)}\left[x^{-2i+2}\int_1^x \xi^{2i+1}\eta_{k,i}(\xi)d\xi - x^{2i+1}\int_a^x \xi^{-2i+2}\eta_{k,i}(\xi)d\xi\right]$$

Формулы (2.1), (2.4) — (2.11) полностью определяют поле скоростей рассматриваемого течения. В дальнейшем, при определении силового воздействия жидкости на сферу, необходимо знать функции $\Phi_{11}(x)$, $v_{11}(x)$, $u_{21}(x)$, $\psi_{21}(x)$, которые без принципиальных трудностей определяются последовательным применением формул (2.4) — (2.11), но значения которых приводить не будем ввиду их громоздкости.

3. Определение давления. Подставим в уравнения (1.2) значения $u(x,\tau)$ и $\Phi(x,\tau)$ (2.1), затем проинтегрируем второе уравнение системы (1.2) по τ, а результат, для определения произвольной функции от x, подставим в первое уравнение (1.2), при этом учтем, что функции $\psi_{k,i}(x)$ и $\Phi_{k,i}(x)$ являются решением системы (2.2). Таким путем установим, что гидродинамическое давление имеет следующую структуру:

$$p(x,\tau) = \mathrm{const} + \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-3}\sum_{i=1}^{k} q_{k,i}(x)P_{2i-1}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2}\sum_{i=0}^{k} p_{k,i}(x)P_{2i}(\tau) \qquad (3.1)$$

где $P_n(\tau)$ — полиномы Лежандра, а функции $q_{k,i}(x)$ и $p_{k,i}(x)$ выражаются через коэффициенты рядов (2.1) громоздкими формулами, которые приводить не будем.

Отметим, что $q_{k,1}(1) = -d^3\psi_{k,1}(1)/dx^3$ (3.2) в силу граничных условий (2.3).

4. Момент сопротивления. Момент сопротивления вращению сферы будет определяться формулой

$$M = 2\pi\mu r_1^2 v_1 \int_0^\pi p_{r\varphi}|_{x=1} \sin^2\theta\, d\theta, \qquad P_{r\varphi} = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right) \tag{4.1}$$

Подставляя в (4.1) значение $u(x, \tau)$ (2.1), учитывая, что

$$\int_{-1}^{1} P_n^1(\tau)\sqrt{1-\tau^2}\, d\tau = \begin{cases} -4/3, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

получим

$$M = -\frac{8}{3}\pi\mu v_1 r_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2} \frac{d}{dx}\left(\frac{u_{k,1}}{x}\right)\Bigg|_{x=1} \tag{4.3}$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда (4.3), подставляя в них значения $u_{11}(x)$ и $u_{21}(x)$, будем иметь

$$M = -8\pi\mu v_1 r_1^2 \left\{1 + \left[\beta_1\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 + \beta_2 + \frac{\beta_3}{\beta_4}\right] R^2\right\}\beta_5 \tag{4.4}$$

где

$$\beta_1 = \frac{a^3(a-1)^4(a^5 + 11a^4 + 66a^3 + 146a^2 + 136a + 45)}{300(a^2+a+1)^3\Delta}$$

$$\beta_2 = -\frac{18a^2(a^5-1)(3a^4 + 3a^3 + a^2 + a + 1)\ln a}{5(a-1)^7(a^3-1)(4a^2+7a+4)^2} \qquad \beta_5 = \frac{a^3}{a^3-1}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 = {} & 17584a^{23} + 22232a^{22} - 99306a^{21} - 1091224a^{20} - 5086862a^{19} - 16041816a^{18} - \\ & - 37680051a^{17} - 70264462a^{16} - 108698708a^{15} - 143188894a^{14} - 163967236a^{13} - \\ & - 167588344a^{12} - 154644158a^{11} - 126172912a^{10} - 88734819a^9 - 54331362a^8 - \\ & - 29358512a^7 - 12949426a^6 - 3461580a^5 + 413480a^4 + 1024360a^3 + \\ & + 544320a^2 + 145152a + 18144\end{aligned}$$

$$\beta_4 = 8400a(a-1)^6(a^2+a+1)\,(4a^2+7a+4)^2(a^4+a^3+a^2+a+1)\Delta$$

$$\Delta = 4a^6 + 16a^5 + 40a^4 + 55a^3 + 40a^2 + 16a + 4$$

Чтобы иметь представление о порядке величин, входящих в формулу (4.4), для некоторых значений a приведем значения коэффициента

$$m(a) = \frac{M}{-8\pi\mu v_1 r_1^2}\begin{cases} m(2) = \{1 + [0.000062(v_1/v)^2 + 0.005363]R^2\}\ 1.1429 \\ m(3) = \{1 + [0.000257(v_1/v)^2 + 0.011388]R^2\}\ 1.0385 \\ m(4) = \{1 + [0.000434(v_1/v)^2 + 0.012971]R^2\}\ 1.0159 \\ m(\infty) = \{1 + [0.000833(v_1/v)^2 + 0.032708]R^2\}\ 1.0000 \end{cases}$$

Сравнивая эти результаты, видим, что при увеличении a момент сопротивления уменьшается, в то время как часть его, которая происходит от учета в уравнениях движения инерционных членов, увеличивается.

Полагая в (4.4) $v \equiv 0$, получим момент сопротивления сферы в случае движения жидкости в полости между двумя концентрическими сферами, из которых внешняя неподвижна, а внутренняя вращается с угловой скоростью ω

$$M_1 = -8\pi\mu v_1 r_1^2(1 + \beta_1 R_1^2)\beta_5, \qquad R_1 = \frac{r_1 v_1}{\nu} \tag{4.5}$$

Сравнивая выражения (4.4), (4.5), видим, что момент сопротивления вращающейся сферы, помещенной в поток вязкой жидкости, больше момента сопротивления в случае отсутствия потока, т. е. набегающий поток увеличивает сопротивление вращению.

5. Сила сопротивления. В силу симметрии движения, результирующее воздействие жидкости на сферу будет определяться силой, направленной по оси симметрии

$$F = \iint\limits_{(S)} (P_{rr}\cos\theta - P_{r\theta}\sin\theta)\,|_{x=1}ds \tag{5.1}$$

причем

$$P_{rr} = \rho v^2\left[-p - \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)\right] \tag{5.2}$$

$$P_{r\theta} = \frac{\rho v^2}{R}\left[-\frac{x}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{x^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right]$$

Подставляя (5.2) в (5.1), заменяя $\Phi(x,\tau)$ и $p(x,\tau)$ их значениями (2.1) и (3.1), учитывая значения интегралов (4.2) и

$$\int\limits_{-1}^{1}\tau P_n(\tau)\,d\tau = \begin{cases} {}^2/_3, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

а также свойство функций $q_{k,1}(x)$ (3.2), получим

$$F = \frac{4\pi\mu r_1 v}{3}\sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2}\left[\frac{d^3\psi_{k,1}(1)}{dx^3} - 2\frac{d^2\psi_{k,1}(1)}{dx^2}\right] \tag{5.3}$$

Сохраняя только первые два члена ряда (5.3), используя значения функций $\psi_{11}(x)$ и $\psi_{21}(x)$, найдем величину силы сопротивления с точностью до R^2 включительно

$$F = 6\pi\mu r_1 v\delta_0\left\{1 + \left[\left(\frac{v_1}{v}\right)^2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_3}{\delta_4}\right) + \frac{\delta_5}{\delta_6} + \frac{\delta_7}{\delta_8}\right]R^2\right\} \tag{5.4}$$

Здесь

$$\delta_0 = \frac{4a(a^5-1)}{(a-1)^4(4a^2+7a+4)}$$

$$\delta_1 = a^4(5a^4+5a^3+4a^2+4a+4)\ln a, \qquad \delta_2 = 5(a-1)^5(a^2+a+1)^2(4a^2+7a+4)$$

$$\begin{aligned}\delta_3 = a(&23912a^{23} + 58996a^{22} - 79443a^{21} - 1075162a^{20} - 5419481a^{19} - 16659128a^{18} - \\ &-37664213a^{17} - 73092141a^{16} - 125242114a^{15} - 179855547a^{14} - 214469303a^{13} - \\ &- 227314702a^{12} - 227947609a^{11} - 208312876a^{10} - 161651463a^{9} - 106285283a^{8} - \\ &- 61996066a^{7} - 32057337a^{6} - 13711758a^{5} - 4402884a^{4} - 780198a^{3} + \\ &+ 55360a^{2} + 25280a + 3160)\end{aligned}$$

$$\delta_4 = 88200(a^3-1)^2(a^5-1)^2(4a^2+7a+4)\Delta$$

$$\begin{aligned}\delta_5 = a^2(&720a^{19} + 14344a^{18} + 80201a^{17} + 273396a^{16} + 675728a^{15} + 1367032a^{14} + \\ &+ 2392100a^{13} + 3660679a^{12} + 4916244a^{11} + 5887648a^{10} + 6337651a^{9} + \\ &+ 6079168a^{8} + 5149464a^{7} + 3850024a^{6} + 2507120a^{5} + 1366597a^{4} + \\ &+ 586388a^{3} + 181656a^{2} + 32336a + 1504)\end{aligned}$$

$$\delta_6 = 100(a-1)^8(4a^2+7a+4)^3\Delta, \qquad \delta_8 = 5(a-1)^9(4a^2+7a+4)^3$$

$$\begin{aligned}\delta_7 = -18a^3\ln a(&4a^{12} + 12a^{11} + 24a^{10} + 44a^{9} + 72a^{8} + 92a^{7} + 105a^{6} + 111a^{5} + \\ &+ 100a^{4} + 72a^{3} + 48a^{2} + 27a + 9)\end{aligned}$$

Приведем для различных значений a значения коэффициента сопротивления

$$f = \frac{F}{6\pi\mu r_1 v}\begin{cases} f(2) = 7.2941\,\{1 + [(v_1/v)^2\,0.000805 + 0.001132]\,R^2\} \\ f(3) = 2.9754\,\{1 + [(v_1/v)^2\,0.003148 + 0.005113]\,R^2\} \\ f(10) = 1.2862\,\{1 + [(v_1/v)^2\,0.011495 + 0.089574]\,R^2\} \\ f(30) = 1.0810\,\{1 + [(v_1/v)^2\,0.015043 + 0.498897]\,R^2\} \\ f(50) = 1.0471\,\{1 + [(v_1/v)^2\,0.015869 + 0.975939]\,R^2\} \end{cases}$$

С ростом a коэффициент сопротивления в целом уменьшается, в то время, как часть его от учета нелинейных членов в уравнениях движения увеличивается.

Полагая в (5.4) $v_1 \equiv 0$, получим силу сопротивления неподвижной сферы, помещенной в поток вязкой жидкости, заданный на сфере конечного радиуса

$$F_1 = 6\pi\mu r_1 v\delta_0 \left[1 + \left(\frac{\delta_5}{\delta_6} + \frac{\delta_7}{\delta_8}\right)R^2\right] \tag{5.5}$$

Сравнение (5.4) с (5.5) указывает на то, что вращающаяся сфера имеет большее лобовое сопротивление, чем покоящаяся.

Интересно сравнить коэффициент сопротивления, полученный нами (5.5), с коэффициентами сопротивления в случае обтекания сферы потоком, равномерным на бесконечности, найденными Озееном [4]

$$f = 1 + 0.375\,R \tag{5.6}$$

и Праудменом и Пирсоном [5]

$$f = 1 + 0.375\,R + 0.225\,R^2 \ln R \tag{5.7}$$

В прилагаемой таблице для некоторых чисел Рейнольдса R даны значения коэффициента сопротивления, вычисленные по формулам (5.5) — (5.7).

R	(5.6)	(5.7)	(5.5)			
			$a = 10$	$a = 20$	$a = 30$	$a = 50$
0.1	1.04	1.03	1.29	1.13	1.09	1.06
0.2	1.08	1.06	1.29	1.14	1.10	1.09
0.4	1.15	1.12	1.30	1.17	1.17	1.21
0.6	1.22	1.18	1.33	1.22	1.28	1.42
0.8	1.30	1.27	1.36	1.29	1.53	1.70
1	1.38	1.38	1.40	1.38	1.62	2.07
2	1.75	2.37	1.75	2.12	3.24	5.14
3	2.12	4.35	2.32	3.37	5.94	10.24
4	2.50	7.49	3.13	5.12	9.71	17.40
5	2.88	11.93	4.17	7.37	14.56	26.60

Из таблицы видно, что числовые значения коэффициента сопротивления, полученные по формулам (5.5) и (5.7), весьма близки, особенно при малых числах Рейнольдса. Однако, полного совпадения нет, что и следовало ожидать, ибо, во-первых, решались математически разные задачи, во-вторых, решения этих задач получены с разной степенью точности по отношению к числу Рейнольдса.

Поступило 26 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. Вуз'ов «Математика», 1963, № 4.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, Физматгиз, 1962.
4. Oseen C. W. Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandtè Aufgabe in der Hydrodynamik. Arkiv för Matematik Astr. og Fys, 1910, vol. 6, 29.
5. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow pastasphere and a circular cylinder. J. of Fluid Mech., 1957, No. 2, pt. 3 (русск. перев.: в сб. «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей, 1958, № 2).

ВТОРИЧНЫЕ РЕЖИМЫ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Ю. П. ИВАНИЛОВ *(Москва)*

В статье рассматриваются асимптотические решения вторичных стационарных течений в жидкости, заключенной между вращающимися в одну сторону цилиндрами в том случае, когда числа Рейнольдса велики.

В работах [1, 2] было доказано существование вторичных осесимметричных стационарных течений в жидкости, заключенной между вращающимися в одну сторону цилиндрами. Ниже приводится асимптотика таких решений для случая больших чисел Рейнольдса. Построение проводится по схеме, предложенной в [3].