Обтекание верхней поверхности крыла носит более сложный характер; распределение тепловых потоков в поперечных сечениях неравномерно, передняя кромка обтекается безотрывно; вблизи боковых кромок на верхней поверхности, как показали исследования предельных линий тока, происходит отрыв пограничного слоя. На линиях присоединения, выходящих из угловых точек, достигается максимум тепловых потоков в поперечном сечении крыла. На фотографии верхней поверхности модели крыла (фиг. 15) светлые полосы, расположенные вблизи линий присоединения, характеризуют положение зон максимальных тепловых потоков. Значения относительного коэффициента теплоотдачи в этих зонах в шесть — семь раз превосходят значения коэффициентов теплоотдачи на верхней поверхности пластины, обтекаемой при том же угле атаки $\alpha = 15°$ (фиг. 14, *б*).

Значения относительного коэффициента теплоотдачи в ряде точек на фиг. 14, *б* не приводятся, так как в областях с низким уровнем тепловых потоков существенные погрешности при определении теплоотдачи вносятся притоком тепла с нижней поверхности тонкого крыла.

При уменьшении угла наклона боковой кромки пластинки ($\theta_2$) с 19 до 8.5° максимальные значения параметра $h°$ в соответствующих поперечных сечениях верхней поверхности не изменились.

Поступило 29 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдуевский В. С., Медведев К. И. Исследования отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3.
2. Mitchel H. Bertram and Arthur Henderson. Recent Hypersonic Studies of Wings and Bodies. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 8.
3. Handbuch der Präporativen Anorganischen Chemie. Stuttgart, 1954.
4. Джонс, Хант. Исследование чувствительных к изменению температуры покрытий для получения количественных данных о теплопередаче при аэродинамическом нагреве. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 7 (русский перевод).
5. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания нижней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.
6. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2.

---

# ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О ФОРМЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ОБЪЕМЕ И ПЛОЩАДИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. И. БОГОМОЛОВ *(Москва)*

Вопросу определения формы пространственных тел минимального сопротивления при гиперзвуковых скоростях посвящено большое число работ [1–6], в которых предполагается, что тело является или тонким или коническим.

В случае тонкого тела задачи определения продольной и поперечной образующих разделяются; если же тело коническое, то ищется только его поперечная образующая.

В данной работе определяется форма тела эллиптического сечения, обладающего минимальным сопротивлением при гиперзвуковых скоростях и нулевом угле атаки, если заданы объем тела и площадь его боковой поверхности, т. е. задается поперечное сечение тела, а ищется форма его продольной образующей. Таким образом, рассматривается один из возможных подходов к построению пространственных тел минимального сопротивления. В результате этого возникает вариационная задача на условный экстремум, решаемая в предположении, что давление, действующее на тело при его обтекании гиперзвуковым потоком газа, рассчитывается по ньютонианской теории.

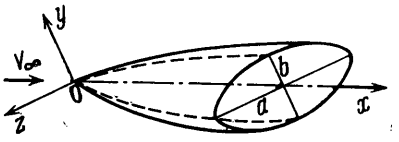
Согласно этой теории, давление на элемент поверхности тела зависит только от ориентации этого элемента по отношению к набегающему потоку. Поскольку теория Ньютона не дает возможности найти давление на участки поверхности тела, лежащие в его «аэродинамической тени», то она распространяется, по существу, только на головные части тел или на тела, для которых $y'(x) \geqslant 0$, где $y = y(x)$ — уравнение образующей тела в плоскости $xy$.

Как известно, коэффициент давления $p$ по этой теории рассчитывается по формуле

$$p = 2\cos^2\gamma \tag{1}$$

где $\gamma$ — угол между нормалью к поверхности тела и вектором скорости набегающего потока.

Принятая нами система координат показана на фиг. 1. Тело имеет острый носок, т. е. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Любая плоскость $x = c$ пересекает поверхность тела по эллипсу с малой и большой осями, параллельными соответствующим осям координат. Отношение длин малой оси к большой постоянно по длине тела и равно $\mu$, т. е. $\mu = b/a$ для любого $x$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$, где $l$ — длина тела не задана, $2b$ — толщина тела в основании, которая не определена.




Сила волнового сопротивления такого тела эллиптического сечения найдется по формуле

$$X = \frac{2\pi q_\infty}{\mu}\int_0^{x_2}\frac{2yy'^3\,dx}{\sqrt{(1+y'^2)(\mu^2+y'^2)}} \qquad (y' = dy/dx) \tag{2}$$

Здесь $x_2$ — абсцисса конца тела (пока не определена); $q_\infty$ — скоростной напор набегающего потока. Вследствие симметрии и постоянства значения $\mu$ задача может решаться в плоскости $xy$.

Итак, вариационная задача на условный экстремум ставится следующим образом: найти непрерывную функцию $y = y(x)$ такую, чтобы величина $X = X(y, y')$ достигала минимального значения при наличии заданных интегральных условий связи $V = V(y, y')$ и $S = S(y, y')$, т. е. при заданных значениях, соответственно, объема и площади боковой поверхности тела и фиксированными граничными условиями на одном конце: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

Как известно, объем тела эллиптического сечения определяется по формуле

$$V = \frac{\pi}{\mu}\int_0^{x_2} y^2\,dx \tag{3}$$

а площадь боковой поверхности — по формуле

$$S = \frac{2\pi}{\mu}\int_0^{x_2} 2y\sqrt{1+y'^2}\,\frac{E(k, {}^1/_2\pi)}{\pi}\,dx, \qquad k = \left(\frac{1-\mu^2}{1+y'^2}\right)^{1/2} \tag{4}$$

где $E(k, {}^1/_2\pi)$ — эллиптический интеграл второго рода. Если обозначить

$$X_1 = \frac{\mu X}{4\pi q_\infty}, \qquad V_1 = \frac{\mu V}{\pi}, \qquad S_1 = \frac{\mu S}{2\pi}$$

то поставленная задача сводится к исследованию на безусловный экстремум функционала

$$T = X_1 + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 V_1, \qquad T = \int_0^{x_2} F(y, y')\,dx \tag{5}$$

$$F(y, y') = \frac{yy'^3}{\sqrt{(1+y'^2)(\mu^2+y'^2)}} + \lambda_1 2y\sqrt{1+y'^2}\,\frac{E(k, {}^1/_2\pi)}{\pi} + \lambda_2 y^2 \tag{6}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2$ — постоянные, пока еще не определенные множители Лагранжа. При этом одна из граничных точек $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ задана, а вторая может перемещаться.

Как известно [7], в задаче с подвижными граничными точками должно быть выполнено основное необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{7}$$

т. е. кривые $y = y(x)$, на которых реализуется экстремум функционала $T$, должны быть экстремалями.

Так как в данном случае $F = F(y, y', \lambda_1, \lambda_2)$, то первый интеграл уравнения (7) примет вид

$$F - y'F_{y'} = C_1 \quad (C_1 = \text{const}) \tag{8}$$

Недостающие условия для определения произвольных постоянных в общем решении уравнения (8) могут быть получены из основного необходимого условия экстремума — равенства нулю вариации функционала $\delta T$.

Таким образом, первый интеграл должен быть решен для двух заданных граничных условий $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и двух конечных, полученных из условия возможности произвольного перемещения конечной точки:

$$(F - y'F_{y'})\,|_{x=x_2}\delta x_2 + F_{y'}\,|_{x=x_2}\delta y_2 = 0 \tag{9}$$

С учетом существования первого интеграла это условие примет вид

$$C_1\delta x_2 + F_{y'}|_{x=x_2}\delta y_2 = 0 \tag{10}$$

Оно должно удовлетворяться для любых допустимых вариаций, совместимых с заданными граничными условиями. Это приводит к тому, что должно быть

$$C_1 = 0$$

и

$$F_{y'}\,|_{x=x_2} = 0 \tag{11}$$

откуда следует $y_2' = 0$. Используя условие Лежандра $F_{y'y'} \geqslant 0$, получим $y'(x) \geqslant 0$ по всей длине тела, что согласуется с границами применимости формулы Ньютона. Действительно, подставляя выражение (6) в первый интеграл (8), будем иметь

$$2y\left\{\frac{y'^3[2\mu^2 + (1+\mu^2)y'^2]}{2[(1+y'^2)(\mu^2+y'^2)]^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_1}{\pi}\,\frac{[y'^2(F(k, {}^1/_2\pi) - E(k, {}^1/_2\pi)) - E(k, {}^1/_2\pi)]}{(1+y'^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\lambda_2 y\right\} = C_1 \tag{12}$$

где $F(k, {}^1/_2\pi)$ — эллиптический интеграл первого рода. Здесь, согласно (11), $C_1 = 0$. Уравнение $F_{y'}|_{x=x_2} = 0$ примет вид:

$$2yy'\left\{\frac{y'[y'^4 + 2y'^2(1+\mu^2) + 3\mu^2]}{2[(1+y'^2)(\mu^2+y'^2)]^{3/2}} + \frac{\lambda_1}{\pi}\,\frac{F(k, {}^1/_2\pi)}{(1+y'^2)^{1/2}}\right\}\Bigg|_{x=x_2} = 0 \tag{13}$$

Отсюда следует $y_2' = 0$, так как $y_2 \neq 0$.

Формула (13) наряду с решением $y_2' = 0$ допускает также решение $y_2' \neq 0$. Однако в этом случае $y'(x) < 0$, что не согласуется с границами применимости формулы Ньютона. Следовательно, решение $y_2' \neq 0$ необходимо отбросить. Используя $y_2' = 0$ и $C_1 = 0$, получим соотношение, связывающее множители Лагранжа $\lambda_1$ и $\lambda_2$:

$$2y_2\left\{-\frac{\lambda_1}{\pi}E(k, {}^1/_2\pi) - \frac{\lambda_2}{2}y_2\right\} = 0$$

или, так как $y_2 = b$ и $b \neq 0$, то

$$\frac{\lambda_1}{\pi}E(k, {}^1/_2\pi) + \frac{\lambda_2}{2}b = 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{2\lambda_1}{b}\,\frac{E(k, {}^1/_2\pi)}{\pi} \tag{14}$$

В частном случае, для тела вращения, когда $\mu = 1$, $k = 0$, $E(0, {}^1/_2\pi) = {}^1/_2\pi$, будем иметь $\lambda_1 + \lambda_2 b = 0$, или

$$\lambda_2 = -\lambda_1 / b \tag{15}$$

Исключая тривиальное решение $y = 0$, как не имеющее физического смысла и заменяя множитель Лагранжа $\lambda_2$ его выражением из (14), получаем

$$\frac{y'^3[2\mu^2 + (1+\mu^2)y'^2]}{2[(1+y'^2)(\mu^2+y'^2)]^{3/2}} +$$
$$+ \frac{\lambda_1}{\pi}\,\frac{[y'^2(F(k, {}^1/_2\pi) - E(k, {}^1/_2\pi)) - E(k, {}^1/_2\pi)]}{(1+y'^2)^{1/2}} + \frac{\lambda_1 E(k, {}^1/_2\pi)}{\pi b}\,y = 0 \tag{16}$$

Так как для заданного тела эллиптического сечения в начальной точке $x = 0$ и $y_1 = 0$, то из уравнения (16) с учетом этого можно определить другой множитель

Лагранжа

$$\lambda_1 = -\frac{\pi y_1'^3 [2\mu^2 + (1+\mu^2) y_1'^2]}{2(1+y_1'^2)(\mu^2+y_1'^2)[y_1'^2(F(k, {}^1/_2\pi) - E(k, {}^1/_2\pi)) - E(k, {}^1/_2\pi)]} \tag{17}$$

Для тела вращения в этом случае получим

$$\lambda_1 = \frac{2y_1'^3}{(1+y_1'^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{(\lambda_1)^{1/3}}{(2^{2/3} - \lambda_1^{2/3})^{1/2}} \qquad (\alpha = y_1') \tag{18}$$

Так как согласно формуле Ньютона должно быть $y'(x) \geqslant 0$ по всей длине тела, то $0 \leqslant \alpha < \infty$ при $0 \leqslant \lambda_1 < 2$, что соответствует оптимальному телу, имеющему острый носок. Если же $\lambda_1 = 2$, то $\alpha = y_1' = \infty$, что соответствует телу, имеющему плоский носок.

После введения обозначений $\xi = x / l$, $\eta = y / b$, $\alpha = y_1'$ и подстановки соотношения (17) в уравнение (16), получим

$$\eta = \frac{\left[1 - y'^2\left(\frac{F(k, {}^1/_2\pi)}{E(k, {}^1/_2\pi)} - 1\right)\right]}{(1+y'^2)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{(1+\alpha^2)(\mu^2+\alpha^2)^{3/2}}{\alpha^3[2\mu^2+(1+\mu^2)\alpha^2]} \frac{\left[\alpha^2\left(\frac{F(k, {}^1/_2\pi)}{E(k, {}^1/_2\pi)} - 1\right) - 1\right][2\mu^2+(1+\mu^2)y'^2]\, y'^3}{(1+y'^2)^{3/2}(\mu^2+y'^2)^{3/2}} \tag{19}$$

или

$$\eta = (1 - y'^2\psi)(1+y'^2)^{-1/2} + A(\alpha^2\psi - 1)\varphi \qquad \left(\psi = \left(\frac{F(k, {}^1/_2\pi)}{E(k, {}^1/_2\pi)} - 1\right)\right) \tag{20}$$

$$A = \frac{(1+\alpha^2)(\mu^2+\alpha^2)^{3/2}}{\alpha^3[2\mu^2+(1+\mu^2)\alpha^2]}, \qquad \varphi = \frac{[2\mu^2+(1+\mu^2)y'^2]\, y'^3}{(1+y'^2)^{3/2}(\mu^2+y'^2)^{3/2}} \tag{21}$$

Так как

$$x = \int_{y_1}^{y(x)} \frac{dy}{y'} = \int_{\alpha}^{y'(x)} \frac{1}{y'}\frac{dy}{dy'}\, dy', \qquad \frac{dy}{dy'} = b\frac{d\eta}{dy'}$$

то

$$\xi = \frac{b}{l}\int_{\alpha}^{y'(x)} \frac{1}{y'}\frac{d\eta}{dy'}\, dy' \tag{22}$$

$$\frac{d\eta}{dy'} = -(2y'\psi + \psi'_{y'}y'^2)(1+y'^2)^{-1/2} - y'(1 - y'^2\psi)(1+y'^2)^{-3/2} +$$

$$+ A\left\{\alpha^2\psi'_{y'}\varphi + \varphi'_{y'}\left(\frac{F(k, {}^1/_2\pi)}{E(k, {}^1/_2\pi)}\alpha^2 - \alpha^2 - 1\right)\right\}$$

$$\psi'_{y'} = \left(\frac{F(k, {}^1/_2\pi)}{E(k, {}^1/_2\pi)} - 1\right)'_{y'} =$$

$$= -\frac{y'}{(1+y'^2)}\left[\frac{(E(k, {}^1/_2\pi) - F(k, {}^1/_2\pi))^2 + F(k, {}^1/_2\pi)k^2(2E(k, {}^1/_2\pi) - F(k, {}^1/_2\pi))}{E^2(k, {}^1/_2\pi)(1-k^2)}\right] \tag{23}$$

$$\varphi'_{y'} = \frac{y'^2[6\mu^4 + 5\mu^2(1+\mu^2)y'^2 + 2(1-\mu^2+\mu^4)y'^4 - (1+\mu^2)y'^6]}{[(1+y'^2)(\mu^2+y'^2)]^{5/2}}$$

$$k = \left(\frac{1-\mu^2}{1+y'^2}\right)^{1/2}, \qquad \frac{\partial k}{\partial y'} = -(1-\mu^2)^{1/2}y'(1+y'^2)^{-1/2} \tag{25}$$

Окончательно

$$\xi = \frac{b}{l}\int\limits_{\alpha}^{y'x}\left(\left\{y'^2\left[\frac{(E-F)^2+Fk^2(2E-F)}{E^2(1-k^2)}-\frac{(F-E)(2+y'^2)}{E}-1\right\}\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}+\right.\right.$$
$$+A\left\{\frac{6\mu^4+5\mu^2(1+\mu^2)y'^2+2(1-\mu^2+\mu^4)y'^4-(1+\mu^2)y'^6}{\mu^2+y'^2}\left(\frac{F}{E}\alpha^2-\alpha^2-1\right)-\right.$$
$$\left.\left.+y'^2[2\mu^2+(1+\mu^2)y'^2]\left[\frac{(E-F)^2+Fk^2(2E-F)}{(1-k^2)E^2}\right]\alpha^2\right\}\frac{y'}{(1+y'^2)^{5/2}(\mu^2+y'^2)^{3/2}}\right)dy' \qquad (26)$$

Таким образом, уравнения (19) и (26) являются параметрическими уравнениями искомого тела.

В частном случае для тела вращения ($\mu = 1$) вместо формул (19) и (26) получаются более простые формулы, результаты расчетов по которым хорошо совпадают с данными, представленными в работах [5] и [6].

Поступило 2 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Гонор А. Л., Черный Г. Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
3. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. Изд-во «Наука», 1965.
4. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ, АН СССР, 1963.
5. Miele Angelo. Theory of optimum aerodynamics shapes. N. Y., London, ppl. Math. and Mech, 1965, vol. 9.
6. Suddath H., Oehman I. Minimum drag bodies with cross — sectional ellipticity. Langley Research Center, 1964.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд-во «Наука», 1965.

---

## О ЛОБОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ

Р. И. ОВСЕЕНКО, Ю. Г. ОВСЕЕНКО

*(Новочеркасск)*

Рассматривается задача об установившемся обтекании вращающейся сферы потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса, которая сводится к решению полных уравнений Навье — Стокса.

Безразмерные функции тока и круговая скорость разыскиваются в виде рядов по степеням числа Рейнольдса, которые сходятся при малых значениях этого числа. Выводятся рекуррентные формулы для определения коэффициентов этих рядов. Находятся давление, момент сопротивления вращению и сила сопротивления. Устанавливается, что вращающаяся сфера имеет большее лобовое сопротивление, чем неподвижная. Вычислен главный член ряда по степеням числа Рейнольдса для силы сопротивления и момента сопротивления.

**1. Постановка задачи.** Пусть сфера радиуса $r_1$, вращающаяся вокруг оси, проходящей через ее центр, с угловой скоростью $\omega$, обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса $r_2$, причем задаваемые векторы скорости $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ коллинеарны. Граничные условия задачи в сферической системе координат ($\theta = 0$ — ось симметрии) таковы:

$$v_\varphi = r_1\omega\sin\theta, \quad v_r = v_\theta = 0 \quad \text{при } r = r_1$$
$$v_\varphi = 0, \quad v_r = v\cos\theta, \quad v_\theta = -v\sin\theta \quad \text{при } r = r_2 \qquad (1.1)$$

Необычность постановки задачи в части задания потока на концентрической сфере, а не на бесконечности обусловлена предлагаемым методом решения, требующим конечной области. Чем больше область течения, тем меньше числа Рейнольдса, при которых решение справедливо. Поэтому переход к переделу при $r_2 \to \infty$ в полученных формулах невозможен.