

$L$  — длина волны) диссипативные процессы, связанные с поглощением звука, определяются уже в первом приближении, поскольку в этом случае в системе Эйлера со-держится релаксационное уравнение. В предельных случаях  $L \gg l_{ik}$ ,  $L \ll l_{ik}$ ,  $p_2 = 0$ , и в приближении Навье — Стокса имеем обычное выражение для тензора давлений, в котором коэффициент  $\xi$  связан только с дивергенцией скорости. Теория поглоще-ния в этом случае хорошо разработана [4, 13–16].

Автор выражает благодарность В. Н. Жигулеву за ряд ценных указаний при вы-полнении этой работы и признателен Е. В. Самуилову, Е. В. Ступоченко, А. И. Осипову и Ю. Л. Климонтовичу за ценное обсуждение полученных результатов.

Поступило 8 X 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Об уравнениях движения неравновесной среды с учетом излу-чения. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2, 3.
2. Самуилов Е. В. К вопросу о влиянии внутренних степеней свободы частиц на коэффициенты переноса многокомпонентной смеси газов. Сб. «Физическая га-зодинамика», Изд-во АН СССР, 1959.
3. Коган М. Н. Об уравнениях неравновесных течений газа. ПМТФ, 1965, № 1 (см. также Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Изд-во «Наука», 1967, стр. 192).
4. Манделштам Л. И., Леонтович М. А. ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 3, стр. 438.
5. Людвиг Г., Хейль М. Теория пограничного слоя с диссоциацией и иониза-цией. Пробл. механики, Изд. иностр. лит., 1963, вып. 4, стр. 39.
6. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. Физматгиз, 1965.
7. Кузнецов В. М. Диссипативные коэффициенты в сильно неравновесных газо-вых смесях с бинарными столкновениями. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
8. Waldmann L., Grübenbacher E. Formale Kinetische Theorie von Gas Gemischen aus Anregbaren Molekülen. Zeit. für Naturforsch., 1962, B. 17, S. 363.
9. Егоров Б. В. О релаксационном уравнении для колебательных степеней свободы двухатомного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
10. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. Г. Физика ударных волн и высокотемператур-ных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1966.
11. Кузнецов В. М., Селиверстов С. Н. К обтеканию пластинки вязким пото-ком неравновесного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
12. Жигулев В. Н. К вопросу о течении неравновесного газа. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 6.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
14. Леонтович М. А. Некоторые вопросы теории поглощения звука многоатомных газов. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1936, т. 5, стр. 633.
15. Herzfeld K., Litovitz T. Absorption and Dispersion of ultrasonic waves. Acad. Press, N. — Y., 1959.
16. Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П. Основы молекулярной акустики. Изд-во «Наука», 1964.

#### ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Б. Т. ПОРОДНОВ, П. Е. СУЕТИН

(Свердловск)

В последние годы появилось значительное число экспериментальных и теоретич-еских работ, посвященных исследованиям течений разреженных газов.

Течение Пуазейля при низких давлениях было исследовано экспериментально Кнудсеном [1] для капилляра и Гедэ [2] для плоской щели. Было обнаружено, что в промежуточной области давлений при числах Кнудсена  $\sim 0.4$  для капилляра и  $\sim 0.8$  для плоской щели наблюдается минимум объемного расхода газа. Кнудсеном было также отмечено, что при дальнейшем уменьшении давления расход газа уве-личивается до некоторой постоянной величины, отличающейся от минимального зна-чения расхода на  $\sim 5\%$  и равной хорошо известному теоретически вычисленному им значению. В опытах Гедэ объемный расход газа при наименьшем давлении отли-чается от минимального более чем в два раза, и не замечается приближения его к какому-либо постоянному значению. Кнудсеном получены эмпирические формулы, которые хорошо описывали экспериментальные данные во всей области давлений, и сделана попытка объяснить наличие минимума объемного расхода газа.

Дальнейшие исследования течения Пуазейля при низких давлениях только подтверждали общую закономерность в поведении объемного расхода газа при уменьшении давления, обнаруженную Кнудсеном и Гедэ.

Теоретическое решение рассматриваемой проблемы было проведено Зирингом [3], который использовал интегральный метод для решения задачи — в предельных случаях чисел Кнудсена и моментный метод — для произвольных чисел Кнудсена с применением кинетической модели Бхатнагара, Гросса и Крука (модель БГК). Минимум объемного расхода не был обнаружен, хотя результаты удовлетворительны в предельных случаях — для интегрального метода и при высоких плотностях — для моментного метода.

В работах [4-6] получено решение задачи сведением интегро-дифференциального уравнения переноса к чисто интегральному, которое было решено численно методом конечных разностей. Обсуждение их результатов будет проведено в параграфе 2.

В работе [7] использован метод решения линеаризованного уравнения Больцмана с применением разрывной функции распределения по скоростям в первом и втором приближениях. К сожалению, численные результаты оказались не свободными от ошибок из-за неточного значения интеграла столкновений  $I_4$ , взятого авторами из [8]. В данной работе предложенный метод используется для решения задачи о движении разреженного газа в плоском зазоре при произвольных числах Кнудсена с применением третьего приближения для функции распределения.

Полученные решения хорошо согласуются с известными решениями в предельных случаях чисел Кнудсена.

Решение показывает, что в промежуточной области давлений существует минимум объемного расхода газа, величина и положение которого совпадают с экспериментальными данными Гедэ и теоретическими данными других авторов.

При числах Кнудсена, больших 100, значение объемного расхода газа остается практически постоянным и удовлетворительно согласуется со значением Кнудсена, полученным из элементарной теории свободно-молекулярного течения газа.

**1. Решение задачи в третьем приближении.** Рассмотрим движение разреженного газа между двумя параллельными бесконечными пластинами, расположенными на расстоянии  $d$  друг от друга. Градиент давления, как и средне-массовая скорость, направлен вдоль оси  $z$ , ось  $x$  перпендикулярна пластинам. Если течение газа стационарное и изотермическое, то, с точки зрения кинетической теории, в общем случае задача состоит в нахождении явного вида функции распределения молекул по скоростям как функции только  $z$  и  $x$ . В рассматриваемой задаче предполагается, что градиент давления является постоянным и функция распределения зависит от  $z$  только через плотность числа молекул  $n = n(z)$ .

Как и в работе [7], введем разрывную функцию распределения, предполагая, что вблизи стенки все молекулы можно разделить на две группы: молекулы, двигающиеся к стенке и имеющие отрицательные  $x$ -компоненты абсолютной скорости  $v$ , и молекулы, двигающиеся от стенки с положительными  $x$ -компонентами скорости. Тогда первой группе молекул будет соответствовать функция распределения  $f^-(-c_x, c_y, c_z, x, z)$ , а второй — функция  $f^+(+c_x, c_y, c_z, x, z)$ . Такое задание функции распределения позволяет определить любые макроскопические характеристики исследуемого течения усреднением по обеим группам молекул.

Неравновесная функция распределения имеет вид

$$f(c, x, z) = f^0(z)[1 + \varphi(c, x)] \quad (1.1)$$

где  $f^0(z)$  — равновесная максвелловская функция распределения,  $\varphi(c, x)$  — функция возмущения и  $c$  — абсолютная безразмерная скорость молекулы.

Приближенное решение будем искать в виде

$$\varphi^\pm(c, x) = a_0^\pm(x)c_x + a_1^\pm(x)c_x c_x + a_2^\pm(x)c_x c_x^2 \quad (1.2)$$

Здесь  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  — функция возмущения для молекул с положительными и отрицательными компонентами скорости  $c_x$  соответственно.

Используя функцию знака  $\varepsilon = \text{sign } c_x$ , определяемую выражением  $\text{sign } c_x = \pm 1$  для  $c_x > 0$  и  $c_x < 0$  соответственно, можно построить единую функцию возмущения

$$\varphi = \frac{1 + \text{sign } c_x}{2} \varphi^+ + \frac{1 - \text{sign } c_x}{2} \varphi^- \quad (1.3)$$

Согласно [7] линеаризованное уравнение Больцмана имеет вид

$$c_x \frac{d\varphi}{dx} + (1 + \varphi) c_x \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} = J(\varphi) \quad (1.4)$$

После подстановки (1.3) в (1.4), последовательного умножения уравнения на

$$c_x c_x^i (1 \pm \text{sign } c_x) \exp(-c^2), \quad (i = 0, 1, 2)$$

и интегрирования по всему пространству скоростей получаем систему шести дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения коэффициентов  $a_i^\pm(x)$ .

$$\begin{aligned} \pi \frac{\partial}{\partial x} \left( \pm a_0^\pm + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1^\pm \pm a_2^\pm \right) &= \pm (a_0^+ - a_0^-) I_1 \pm (a_1^+ + a_1^-) I_2 \pm \\ &\pm (a_2^+ - a_2^-) I_5 - \pi \sqrt{\pi} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \\ \pi \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_0^\pm \pm a_1^\pm + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} a_2^\pm \right) &= (a_0^+ - a_0^-) I_2 + (a_1^+ + a_1^-) I_3 \pm (a_1^+ - a_1^-) I_4 \pm \\ &\pm (a_2^+ + a_2^-) I_7 + (a_2^+ - a_2^-) I_6 \mp \pi \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \\ \pi \frac{d}{dx} \left( \pm a_0^\pm + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} a_1^\pm \pm 2a_2^\pm \right) &= \pm (a_0^+ - a_0^-) I_5 \pm (a_1^+ + a_1^-) I_6 + (a_1^+ - a_1^-) I_7 + \\ &+ (a_2^+ + a_2^-) I_8 \pm (a_2^+ - a_2^-) I_9 - \frac{\pi \sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Интегралы столкновений  $I_j$  были вычислены для твердых сферических молекул методом, предложенным Ван Чаном и Уленбеком [9]. Для них получены следующие значения<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} I_1 = [c_z e; c_z e] &= \frac{1-8\sqrt{2}}{12} \frac{\pi}{\lambda}, & I_2 = [c_z e; c_z c_x] &= -\frac{3\pi+8}{32} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{\lambda} \\ I_3 = [c_z c_x; c_z c_x] &= -\frac{2}{5} \frac{\pi}{\lambda}, & I_4 = [c_z c_x e; c_z c_x e] &= \frac{-46+17\sqrt{2}}{120} \frac{\pi}{\lambda} \\ I_5 = [c_z e; c_z c_x^2 e] &= -\frac{6+11\sqrt{2}}{60} \frac{\pi}{\lambda}, & I_6 = [c_z c_x; c_z c_x^2 e] &= -\frac{9\pi+28}{96} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{\lambda} \\ I_7 = [c_z c_x^2; c_z c_x e] &= -\frac{3\pi+8}{48} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{\lambda}, & I_8 = [c_z c_x^2; c_z c_x^2] &= -\frac{56}{105} \frac{\pi}{\lambda} \\ I_9 = [c_z c_x^2 e; c_z c_x^2 e] &= -\frac{5360+2627\sqrt{2}}{13440} \frac{\pi}{\lambda}, & \lambda^{-1} &= \sqrt{2} \pi n \sigma^2 \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda$  — длина свободного пробега для твердых сферических молекул,  $n$  — плотность молекул,  $\sigma$  — диаметр молекулы.

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения  $a_i^\pm(x)$ . Метод решения системы аналогичен [7], поэтому здесь приведем только основные результаты решения.

Корни характеристического уравнения однородной системы равны  $\alpha_{1,2} = 0$ ,  $\alpha_{3,4} = \pm 1.411656148 \pi \lambda^{-1}$ ,  $\alpha_{5,6} = \pm 0.2718545568 \pi \lambda^{-1}$ .

Так как однородная система дважды вырождена, решение ищем в виде

$$a_i^\pm(x) = b_i^\pm + c_i^\pm x + d_i^\pm e^{\alpha x} + k_i^\pm e^{-\alpha x} + l_i^\pm e^{\beta x} + m_i^\pm e^{-\beta x} \quad (1.6)$$

Здесь  $b_i^\pm, c_i^\pm, d_i^\pm, k_i^\pm, l_i^\pm, m_i^\pm$  — произвольные постоянные. Определитель однородной системы тождественно равен нулю, поэтому все произвольные постоянные можно выразить через  $b_0^+, c_0^+, d_0^+, k_0^+, l_0^+, m_0^+$ , которые определяются из граничных условий и условий симметрии.

Для простоты считаем, что все молекулы отражаются от стенки диффузно с равновесной максвелловской функцией распределения. Тогда граничными условиями и условиями симметрии для коэффициентов разложения будут

$$a_i^\pm(\mp 1/2d) = 0, \quad a_i^\pm(\mp x) = (-1)^i a_i^\mp(\pm x), \quad (i = 0, 1, 2)$$

<sup>1</sup> В работе [8] получены численным методом значения  $I_1 = -1.0059 \pi / \lambda$  и  $I_4 = -1.6982 \pi / \lambda$ , существенно отличающиеся от указанных здесь. Правильность приведенных здесь результатов подтверждается совпадением значений, полученных аналитическим и численным методами.

Коэффициенты разложения  $a_i^{\pm}$  как функции расстояния от стенки в матричной записи имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_0^+ \\ a_0^- \\ a_1^+ \\ a_1^- \\ a_2^+ \\ a_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A_1 & 1 & A_2 & 1 & -B & H & A \\ 1 & 1 & A_1 & 1 & A_2 & B & H & A \\ 0 & C_1 - B_1 & C_2 & -B_2 & E & 0 & C & \\ 0 & B_1 - C_1 & B_2 & -C_2 & E & 0 & -C & \\ 0 & E_1 & D_1 & E_2 & D_2 & -F & 0 & -D \\ 0 & D_1 & E_1 & D_2 & E_2 & F & 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ Ke^{\alpha x} \\ Ke^{-\alpha x} \\ Le^{\beta x} \\ Le^{-\beta x} \\ x \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \quad (1.7)$$

Величины  $M, K, L$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} M &= -K(e^{1/2\alpha d} + A_1 e^{-1/2\alpha d}) - L(e^{1/2\beta d} + A_2 e^{-1/2\beta d}) - B \frac{d}{2} - H \frac{d^2}{4} - A \\ K &= 1/2 N^{-1} [(Ed - 2C)(D_2 e^{1/2\beta d} + E_2 e^{-1/2\beta d}) + (Fd - 2D)(-B_2 e^{1/2\beta d} + C_2 e^{-1/2\beta d})] \\ L &= 1/2 N^{-1} [(Ed - 2C)(D_1 e^{1/2\alpha d} + E_1 e^{-1/2\alpha d}) + (Fd - 2D)(-B_1 e^{1/2\alpha d} + C_1 e^{-1/2\alpha d})] \\ N &= (D_1 e^{1/2\alpha d} + E_1 e^{-1/2\alpha d})(-B_2 e^{1/2\beta d} - C_2 e^{-1/2\beta d}) - (D_2 e^{1/2\beta d} + E_2 e^{-1/2\beta d}) \\ A_1 &= 0.1439705546, & A_2 &= -6.605311867, & A &= -2.556092254 \lambda \\ B_1 &= 1.918106563, & B_2 &= 55.18370974, & B &= -0.01920353473 \\ C_1 &= -0.1643416986, & C_2 &= 5.115740910, & C &= 1.096274455 \lambda \\ D_1 &= 0.7505283831, & D_2 &= 44.16456416, & D &= -0.9459916680 \lambda \\ E_1 &= 0.05232414498, & E_2 &= -1.669125768, & E &= -2.332959239 \\ F &= -0.2758739950, & H &= 0.8979762560 \lambda^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Среднемассовую скорость движения газа в зазоре определяем усреднением по всему пространству скоростей

$$\bar{v}_z(x) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} v_z f(c, x) dv = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} v_z f^0 \Phi(c, x) dv \quad (1.9)$$

После подстановки (1.3) в (1.9), используя (1.7) и (1.8), находим выражение для среднемассовой скорости

$$\bar{v}_z(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \left( a_0^+ + a_0^- + \frac{a_1^+ - a_1^-}{\sqrt{\pi}} + \frac{a_2^+ + a_2^-}{2} \right) \quad (1.10)$$

Объемный расход в выражении  $PV$  в единицу времени через единицу площади находим как среднее по рассматриваемому зазору

$$\begin{aligned} P \langle \bar{v}_z(x) \rangle &= P \frac{1}{d} \int_{-1/2d}^{1/2d} v_z(x) dx = -\frac{1}{4} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} d Q \left( \frac{d}{\lambda} \right) \frac{dP}{dz} \\ Q \left( \frac{d}{\lambda} \right) &= \frac{1}{d} \left[ -2K \left( 1 + A_1 + \frac{C_1 - B_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{D_1 + E_1}{2} \right) \frac{\text{sh}(1/2\alpha d)}{1/2\alpha d} - \right. \\ &\quad \left. - 2L \left( 1 + A_2 + \frac{C_2 - B_2}{\sqrt{\pi}} + \frac{D_2 + E_2}{2} \right) \frac{\text{sh}(1/2\beta d)}{1/2\beta d} + \right. \\ &\quad \left. + 2K(e^{1/2\alpha d} + A_1 e^{-1/2\alpha d}) + 2L(e^{1/2\beta d} + A_2 e^{-1/2\beta d}) + \frac{1}{3} Hd^2 + Bd - \frac{2}{\sqrt{\pi}} C + D \right] \end{aligned}$$

В дальнейшем безразмерную величину  $Q(d/\lambda)$  будем называть приведенным объемным расходом газа.

<sup>1</sup> Вычисления были проделаны с десятью значащими цифрами с целью определения объемного расхода газа для области чисел Кнудсена вплоть до 10<sup>6</sup>.

**2. Обсуждение и сравнение результатов.** Результаты вычислений для твердых сферических молекул, полученные во втором (2) и третьем (3) приближениях, представлены в таблице и на фигуре. Видно, что приведенный объемный расход газа  $Q$ , как функция обратного числа Кнудсена при решении задачи во втором приближении, плавно уменьшается с уменьшением давления (или  $d/\lambda$ ) и достигает практически постоянного значения при  $d/\lambda \approx 10^{-4}$ , которое на  $\sim 14\%$  ниже значения, вычисленного по элементарной теории свободно-молекулярного течения Кнудсеном [1]. В третьем приближении объемный расход достигает минимального значения при  $d/\lambda = 1.3$ . При дальнейшем уменьшении давления расход достигает величины, превышающей значение Кнудсена на  $\sim 7\%$ , и остается практически постоянным до чисел Кнудсена  $\sim 10^6$ .

$d/\lambda$	2	3	$d/\lambda$	2	3	$d/\lambda$	2	3
8.0	4.6253	4.5611	1.2	3.0344	3.0409	0.1	2.6582	3.2135
3.0	3.3615	3.2672	1.1	3.0152	3.0452	$10^{-2}$	2.5946	3.1991
2.0	3.1571	3.0910	1.0	2.9949	3.0527	$10^{-3}$	2.5877	3.1963
1.6	3.1045	3.0503	0.7	2.9221	3.0962	$10^{-4}$	2.5871	3.1963
1.4	3.0703	3.0408	0.4	2.8181	3.1675	$10^{-5}$	2.5871	3.1961
1.3	3.0527	3.0368	0.2	2.7196	3.2084	$10^{-6}$	2.587	3.196
						0	1.600	1.1591

Рассмотрим предельные случаи чисел Кнудсена. Для свободно-молекулярного течения, когда  $d/\lambda \rightarrow 0$ , из полученных решений среднемассовая скорость движения газа определяется выражением

$$\langle \bar{v}_z \rangle = -av_1 d \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}, \quad v_1 = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

Здесь  $a = 0.3927$  — для первого приближения,  $a = 0.2570$  — для второго и  $a = 0.2568$  — для третьего. В аналогичной формуле, полученной Кнудсеном,  $a = 0.6667$ .

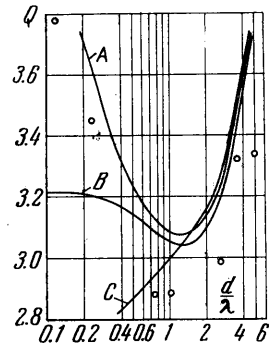
В другом предельном случае  $d/\lambda \rightarrow \infty$  из решений следует  $v_z(x) = 1/2 \eta^{-1} (x^2 - 1/4 d^2 - \zeta d) dP/dz$ ,  $\eta = bnm\lambda v_1$  (2.2)

Здесь  $b = 0.4918$ ,  $\zeta = 1.1205 \lambda$  — для второго приближения;  $b = 0.4935$ ,  $\zeta = 1.1029 \lambda$  — для третьего.

Полученные значения для коэффициентов вязкости хорошо совпадают с аналогичными коэффициентами, вычисленными по методу Чемпена — Энскага в первом и втором приближениях [10]. Значения коэффициента скольжения  $\zeta$  отличаются незначительно от соответствующих значений, вычисленных другими авторами [11].

На фигуре для сравнения дается кривая приведенного объемного расхода газа  $Q(\delta)$  для бесконечных плоских пластин как функция обратного числа Кнудсена, вычисленного в [6]. Причем, как видно из [6], величина  $\delta = 2d/\sqrt{\pi}\lambda$ . Из сравнения кривых приведенного объемного расхода газа можно заключить, что оба решения дают результаты, удовлетворительно совпадающие как по величине минимального значения расхода, так по положению его на оси давлений (чисел Кнудсена), а также в области порядка  $0.6 < d/\lambda < 10$ . При  $d/\lambda < 0.6$  величина  $Q(\delta)$  возрастает до бесконечности при  $d/\lambda \rightarrow 0$ , в то время как  $Q(d/\lambda)$ , несколько увеличиваясь, становится практически постоянной, и при  $d/\lambda \rightarrow 0$  уменьшается до некоторого постоянного значения.

Трудно сравнить результаты, полученные для бесконечных пластин, с экспериментальными данными для конечных пластин. Если  $d/h \approx d/l \ll 1$  ( $h$  — ширина зазора,  $l$  — длина пластин), то в вязкой области можно пренебречь концевыми эффектами, обусловленными конечностью пластин. В промежуточном и молекулярном режимах течения эти эффекты могут существенно изменять значение объемного расхода газа. Кроме того, трудно выбрать число Кнудсена, которое характеризовало бы рассматриваемый режим течения. Для качественного сравнения на фигуре приведены экспериментальные значения объемного расхода, полученные Гедэ [2]. Интересно, что положения минимума расхода совпадают с вычисленным, хотя имеется некоторое отличие в его значении.



Поступило 17 II 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Knudsen M. Die Gesetze der Molecularströmung und inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhren. Ann. Phys., 1909, B. 28, H. 1.
2. Gaede W. Die äussere Reibung der Gase. Ann. Phys., 1913, B. 41, H. 2.
3. Ziering S. Plane Poiseuille Flow. Rarefied Gas Dynamics (Proc. of 2nd Simp.). Acad. Press., N. Y., 1961, p. 451.
4. Takao K. Rarefied Gas Flow between Two Parallel Plates. Rarefied Gas Dynamics. (Proc. of 2nd Symp.). Acad. Press., N. Y., 1961, p. 465.
5. Cercignani C. Plane Poiseuille Flow and Knudsen Minimum Effect. Rarefied Gas Dynamics. (Proc. of 3d Symp.), Acad. Press., N. Y., 1962, vol. 2, p. 92.
6. Cercignani C., Danery A. Flow a Rarefied Gas between Two parallel plates. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 12.
7. Суетин П. Е., Породнов Б. Т. Кинетическая теория движения газа между двумя параллельными плоскостями при любых числах Кнудсена. Ж. техн. физ., 1961, т. 37, № 1.
8. Gross E. P., Ziering S., Kinetic Theory of Linear Shear Flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 3 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. литер., 1959, № 6).
9. Wang Chang C. S., Uhlenbeck G. E. Transport phenomena in very Dilute Gases. VMH — 3 — F, Univ. of Michigan, 1949.
10. Чепман С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов, Изд. иностр. лит., 1960.
11. Albertoni S., Cercignani C., Gotusso L. Numerical Evaluation of the Slip Coefficient. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 7.

### НЕСТАЦИОНАРНОЕ ГЛИССИРОВАНИЕ И ДВИЖЕНИЕ ПРОФИЛЯ СО СБЕГАЮЩИМИ ВИХРЯМИ

В. А. ЕРОШИН (Москва)

В настоящей работе в постановке Л. И. Седова рассматриваются задачи о нестационарном движении профиля со сбегаящими вихрями, рикошете и неавтономной посадке редана. Основное интегральное уравнение для определения плотности распределения вихрей сводится к уравнению Абеля путем решения некоторой вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для плоской пластинки определяется граница рикошетирования.

§ 1. Определение подъемной силы, при нестационарном глиссировании и движении профиля со сбегаящими вихрями. Как показано в работах Вагнера [1] и Л. И. Седова [2], имеется приближенная аналогия между возмущенным потоком жидкости при глиссировании и нижней частью потока около тонкого профиля. Кроме того, легко видеть, что нестационарное глиссирование включает в себя также движения типа рикошетов, так как в этом случае погружение в жидкость незначительно и граничные условия можно сносить на невозмущенный уровень свободной поверхности. При изучении данного класса движений будем ограничиваться, как принято в теории волн малой амплитуды и теории тонких крыльев, движениями с малыми углами атаки и малыми углами падения — при изучении задач типа посадки редана. Как известно [2], при данных предположениях подъемная сила, действующая на глиссирующую пластинку, равна<sup>1</sup>

$$Y = \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi \rho a^2}{2} v_1 \right) + \pi \rho a \left( c + \frac{da}{dt} \right) v_2 + \frac{\rho a}{2} \left( c + 2 \frac{da}{dt} \right) \int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{(2a+x-s)(x-s)}} \quad (1.1)$$

$$(v_1 = -(v + \omega a) + c\beta, \quad v_2 = v_1 + 1/2 \omega a)$$

где  $c$  и  $v$  — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости пластинки,  $\beta$  — угол атаки профиля или угол дифферента при глиссировании,  $\omega$  — угловая скорость относительно задней кромки пластинки,  $2a$  — длина профиля или величина смоченной поверхности при глиссировании,  $\rho$  — плотность жидкости.

Неизвестная функция  $\varphi(x)$ , входящая в уравнение (1.1), является плотностью распределения вихрей, сбегаящих с задней кромки пластинки, и определяется из

<sup>1</sup> При расчете подъемной силы профиля это выражение необходимо удвоить.