

Основные результаты расчетов могут быть сформулированы следующим образом.

1) С увеличением степени шероховатости коэффициент сопротивления C_x увеличивается почти для всех углов полураствора конуса ψ и углов атаки α . Наибольшие изменения (в несколько раз) от шероховатости C_x претерпевает в случае: а) малые углы полураствора конуса ($\psi \leq 30^\circ$) и малые углы атаки ($\alpha \leq 30^\circ$); б) большие углы полураствора ($\psi \geq 60^\circ$) и большие углы атаки ($\alpha > 75^\circ$). Так, величина C_x для гладкой поверхности при $\alpha = 0^\circ$ изменяется в пределах от 0.013 (при $\psi = 5^\circ$) до 3.049 (при $\psi = 85^\circ$); для шероховатой поверхности конуса при тех же пределах изменения ψ коэффициент C_x изменяется от 1.384 до 2.886 (при $\sigma_1 = 0.5$) и от 2.282 до 2.546 (при $\sigma_1 = 1$).

2) Отражение частиц от гладкой поверхности при больших углах падения β , как следует из работы [5], близко к зеркальному. Шероховатость поверхности приводит к увеличению доли частиц, отраженных в направлении нормали к элементу поверхности. Это обстоятельство приводит к увеличению коэффициента подъемной силы C_y при малых углах ψ и α (то же имеет место и при больших углах ψ и α). В остальных же случаях абсолютная величина C_y для шероховатой поверхности меньше, чем для гладкой. Далее, эффект увеличения C_y в указанных пределах ψ и α оказывается, однако, меньшим эффекта увеличения C_x при тех же значениях ψ и α . Это приводит к тому, что шероховатость поверхности значительно ухудшает аэродинамическое качество для всех углов ψ и α . Например, при $\alpha = 20^\circ$ и $\psi = 5-20^\circ$, в зависимости от степени шероховатости, качество уменьшается в 3—2.6 раза при $\sigma_1 = 0.5$ и в 6—6.5 раз — при $\sigma_1 = 1$.

3) Шероховатость поверхности приводит к увеличению абсолютной величины продольного момента, отсчитываемого относительно носика конуса. Например, при $\psi \leq 15^\circ$ величина продольного момента изменяется в 1.5—2 раза при малых углах атаки и на 10—25% — при больших.

4) Шероховатость поверхности приводит к увеличению теплового потока на тело. Наибольшее увеличение имеет место: а) при $\psi \leq 30^\circ$ и $\alpha \leq 30^\circ$; б) при $\psi \geq 60^\circ$ и $\alpha > 75^\circ$ (как и при расчете C_x). Например, при $\alpha = 0^\circ$ тепловой поток для гладкой поверхности изменяется (в безразмерных единицах) от 0.017 ($\psi = 5^\circ$) до 0.671 ($\psi = 85^\circ$); для шероховатой поверхности тепловой поток изменяется (при тех же пределах изменения ψ) в пределах от 0.247 до 0.603 при $\sigma_1 = 0.5$ и от 0.466 до 0.620 — при $\sigma_1 = 1$.

5) Сравнение результатов расчетов аэродинамических характеристик конуса, проделанных в настоящей работе для гладких и шероховатых поверхностей, с результатами расчетов тех же характеристик в приближении, когда коэффициенты обмена импульсом не зависят от угла падения частиц газа на элемент поверхности тела, дает существенное расхождение; поэтому применение предположения о постоянстве коэффициентов обмена импульсом для расчета аэродинамических характеристик требует тщательного анализа в каждом конкретном случае.

Автор благодарит М. Н. Когана и В. С. Галкина за обсуждение данной работы.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцев Р. Г. Отражение молекул газа от шероховатых поверхностей. Сб. «Аэродинамика разреженных газов». Изд. Ленингр. ун-та, 1963, т. 1.
2. Ерофеев А. И. Обтекание клиновидной полости свободномолекулярным потоком газа. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
3. Маталин А. А. Качество поверхности и эксплуатационные свойства деталей машин. Машгиз, 1956.
4. Дьяченко Л. Е., Вайнштейн В. Э., Розенбаум Б. С. Количественная оценка неровностей обработанных поверхностей. Изв. АН СССР, 1952.
5. Ерофеев А. И. Об обмене энергией и импульсом между атомами и молекулами газа и поверхностью тела. ПМТФ, 1967, № 2.

К ТЕОРИИ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ

В. М. КУЗНЕЦОВ (Москва)

1. Исследования релаксационных течений на основе кинетической теории газов показывают, что тензор давления (соответствующий приближению Навье — Стокса) имеет различный вид в зависимости от рассматриваемой модели газа.

Так, в работах [1] показано, что в двухтемпературной модели среды, содержащей поступательные и колебательные степени свободы, тензор давления не содержит объемной вязкости.

Если одна (или несколько) внутренних степеней свободы находятся в квазиравновесии с поступательными, то тензор давления в уравнениях Навье — Стокса содержит, помимо сдвиговой, также и объемную вязкость [2].

В работе [3] при рассмотрении некоторых типов релаксационных течений (в частности, двухтемпературной релаксации, когда колебательные степени свободы имеют температуру T_k , а поступательные и вращательные — температуру $T \neq T_k$) было получено, что структурный вид функции распределения во втором приближении содержит скалярный член G^v , который, вообще говоря, приводит к появлению дополнительного слагаемого в тензоре давления помимо членов, определяющих сдвиговую и объемную вязкости. Впервые, по-видимому, этот факт был отмечен еще в работах Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича [4] (по этому поводу см. также работу [5]).

На существование рассматриваемых добавок в давление указывает термодинамика необратимых процессов [6], однако ее методами невозможно исследовать их детальную структуру. Это связано с тем, что в термодинамике необратимых процессов принимаются довольно общие предположения относительно изучаемой среды, например, линейность связи между потоками и термодинамическими силами, симметрия, изотропия и т. п.

Поэтому при изучении более конкретных моделей сплошных сред (например, одноатомного газа, неравновесного многоатомного газа и т. д.) оказывается, что ряд членов в общем выражении для тензора давлений, даваемый термодинамикой, пропадает. Это можно доказать, используя методы кинетической теории газов, которые в каждом отдельном случае позволяют точно установить структуру всех неизвестных тензорных величин, а также определить в явном виде все диссипативные коэффициенты.

2. Структурный вид функции распределения во втором приближении для двухтемпературной модели газа с вращательными и колебательными степенями свободы имеет вид (обозначения работы [3])

$$\Phi_v = -A_a^v \frac{\partial \ln T}{\partial x_i} c^v - A_k^v \frac{\partial \ln T_k}{\partial x_i} c^v - B_{li}^v \frac{\partial u_l}{\partial x_i} - D^v \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + G^v \quad (2.1)$$

В этом выражении каждый член описывает определенный вид диссипации. Так, группа членов с A_a^v и A_k^v определяет теплопроводность от активных (т. е. поступательных и вращательных) и релаксирующих (колебательных) степеней свободы. Тензор B_{li}^v определяет сдвиговую, а величина D^v — объемную вязкость.

Способ решения интегральных уравнений для A_a^v , A_k^v , B_{li}^v указан в [7], где получены конкретные выражения для кинетических коэффициентов. Аналогичные по типу уравнения могут быть записаны относительно G^v и D^v . Они имеют следующий вид:

$$f_v^{(0)} \left\{ \frac{E_{v_2} - \varepsilon_k^{(0)}}{kT_k^2} \frac{dT_k}{d\varepsilon_k^{(0)}} - \left(\frac{mc_v^2}{2kT} - \frac{3}{2} + \frac{E_{v_2} - \varepsilon_2^{(0)}}{kT} \right) \left[nT \left(\frac{3}{2} k + \frac{d\varepsilon_2^{(0)}}{dT} \right) \right]^{-1} \right\} \quad (2.2)$$

$$\sum_{v_3} E_{v_3} \sum^{(3)} (a) - \sum_v^{(3)} (f_v^{(0)}) = \sum_v \int f_v^{(0)} f_\mu^{(0)} (G_k + G_l - G_v - G_\mu) P_{\mu\nu}^{kl} g_{\nu\mu} d\xi^k d\xi^l d\xi^\mu$$

$$f_v^{(0)} \left[\frac{mc_v^2}{3kT} - 1 - k \left(\frac{mc_v^2}{2kT} - \frac{3}{2} + \frac{E_{v_2} - \varepsilon_2^{(0)}}{kT} \right) \right] \left(\frac{3}{2} k + \frac{d\varepsilon_2^{(0)}}{dT} \right)^{-1} =$$

$$= \sum_v \int f_v^{(0)} f_\mu^{(0)} (D_k + D_l - D_v - D_\mu) P_{\mu\nu}^{kl} g_{\nu\mu} d\xi^k d\xi^l d\xi^\mu \quad (2.3)$$

Физический смысл использованных здесь обозначений указан в [3].

Для решения уравнений (2.2) и (2.3) неизвестные функции G^v и D^v по аналогии с [7] следует представить в виде следующих рядов:

$$G^v = \sum_{rps} g_{rps} Q^{rps} = \sum_r \sum_p \sum_s g_{rps} S_{1/2}^{(r)}(\xi^2) P^{(p)} \left(\frac{E_{v_2}}{kT} \right) P^{(s)} \left(\frac{E_{v_1}}{kT_k} \right) \quad (2.4)$$

$$D^v = \sum_{rps} d_{rps} Q^{rps} = \sum_r \sum_p \sum_s d_{rps} S_{1/2}^{(r)}(\xi^2) P^{(p)} \left(\frac{E_{v_2}}{kT} \right) P^{(s)} \left(\frac{E_{v_1}}{kT_k} \right)$$

$$(\xi^2 = mc_v^2/2kT)$$

где $S_{1/2}^{(r)}$ — полиномы Сонина, а $P^{(p)}$, $P^{(s)}$ — полиномы, определенные в работе [8]. Обозначим через p_1 часть тензора давлений, связанного с дивергенцией скорости, а через p_2 — часть, определяемую G^v .

Уравнения (2.2) и (2.3) имеют нетривиальные решения, которые могут быть получены, если к ним применить процедуру, подробно описанную в [7]. Для определе-

ния p_2 , однако, не обязательно решать до конца эти уравнения; достаточно применить следующее рассуждение.

Из условий, накладываемых на φ_v в методе Энского, в главном приближении для D^v и G^v можно получить

$$\begin{aligned} D^v &= d_{100} \left[S_{1/2}^{(1)} - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{c_v} \right) P_{v_2}^{(1)} \right] = d_{010} \left[P_{v_2}^{(1)} - \frac{2}{3} \left(\frac{c_v}{k} \right) S_{1/2}^{(1)} \right] \quad \left(c_v = \frac{de_2^{(0)}}{dT} \right) \\ G^v &= g_{100} \left[S_{1/2}^{(1)} - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{c_v} \right) P_{v_2}^{(1)} \right] = g_{010} \left[P_{v_2}^{(1)} - \frac{2}{3} \left(\frac{c_v}{k} \right) S_{1/2}^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Алгебраические уравнения относительно d_{100} , g_{100} имеют следующий вид

$$\left[G^{100/100} - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{c_v} \right) G^{100/010} \right] d_{100} = R_{100}, \quad \left[G^{100/100} - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{c_v} \right) G^{100/010} \right] g_{100} = R_{100}' \quad (2.6)$$

где

$$G^{rps/gsq} = n^2 \{ [Q_v^{rps}, Q_v^{gsq}] + [Q_v^{rps}, Q_\mu^{gsq}] \}$$

$$[Q_v^{rps}, Q_\mu^{gsq}] = \frac{1}{n^2} \sum_v \int f_v^{(0)} f_\mu^{(0)} (Q_v^{rps} - Q_k^{rps}) Q_\mu^{gsq} P_{\nu\mu}^{kl} g_{\nu\mu} d\xi^k d\xi^l d\xi^\mu d\xi^\nu$$

Отметим, что элементы $G^{rps/gsq}$ — одни и те же в уравнениях (2.6) в силу совпадения интегральных операторов и индексов r, p, s, g, h, q . Выражения R_{100} , R_{100}' представляют собой известные функции левых частей уравнений (2.2—2.3).

$$R_{100} = nkTc_v \left(\frac{3}{2}k + c_v \right)^{-1}, \quad R_{100}' = \frac{c_v}{(3/2k + c_v)} \sum_{v_2} E_{v_2} \sum^{(3)}(a) \quad (2.7)$$

Вторая формула (2.7) получена в предположении, что переход поступательной энергии в колебательную не сопровождается изменением вращательной энергии (что имеет место, например, для модели гармонического осциллятора). Если указанное условие не выполняется, выражение для R_{100}' имеет более сложный вид. Так как, по определению коэффициента объемной вязкости ζ в главном приближении равен

$$\zeta = \frac{m}{3} \sum_v \int f_v^{(0)} c_v^2 D^v d\xi^v = \frac{3}{2} nkT d_{100} \quad (2.8)$$

$$p_2 = \frac{m}{3} \sum_v \int f_v^{(0)} c_v^2 G^v d\xi^v = \frac{3}{2} nkT g_{100}$$

то нетрудно получить, что

$$p_2 = \frac{\zeta}{nkT} \sum_{v_2} E_{v_2} \sum^{(3)}(a) \quad (2.9)$$

Выражение под знаком суммы в (2.9) представляет собой правую часть релаксационного уравнения для колебательной энергии, которое преобразуется к виду Ландау — Теллера в случае модели гармонического осциллятора [9]

$$\sum_{v_2} E_{v_2} \sum^{(3)}(a) = \frac{E_{v_2}(T) - E_{v_2}(T_k)}{\tau(n, T)} \quad (2.10)$$

Таким образом, общий вид тензора давления в изучаемой модели газа в приближении Навье — Стокса имеет вид

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] - \zeta \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} - \frac{\zeta}{kT} \frac{E_{v_2} - E_{v_2}(T_k)}{\tau} \delta_{ij} \quad (2.11)$$

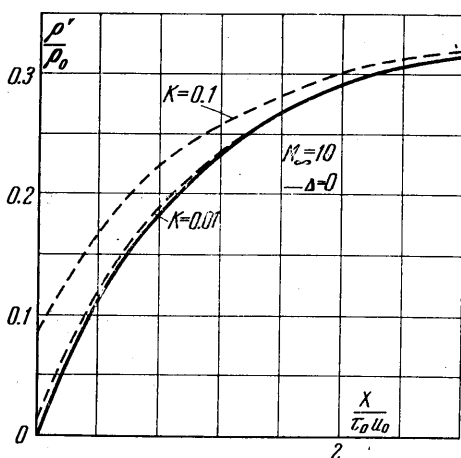
Величина $p_2 \rightarrow 0$ при $T_k \rightarrow T$. Структура выражения (2.11) представляется весьма интересной. В частности, в гидродинамике до сих пор считалось [10], что скаляр, от которого может зависеть давление, является дивергенция скорости. Эта зависимость связана с коэффициентом объемной вязкости ζ .

Настоящее рассмотрение показывает, что коэффициент ζ допускает новое толкование, а именно: напряжения в газе, вызываемые объемной вязкостью, имеют место

не только тогда, когда изменение давления не успевает следить за изменением плотности ($\text{div } V = dp / \rho dt$ [10]), но также и тогда, когда оно не успевает следить за изменением внутренней энергии релаксирующей степени свободы.

Следует отметить, что p_2 отлично от нуля только в том случае, когда одна из внутренних степеней свободы (например вращения) находится в равновесии с поступательными степенями свободы, в то время как другая (например колебания) с ними неравновесна. При этом эффект, связанный с p_2 , существует только на длинах релаксации, по порядку величины много больших средних длин свободного пробега. Отсюда нетрудно заключить, что p_2 — небольшая величина.

Так, например, можно показать, что значением p_2 можно пренебречь в уравнениях пограничного слоя, так как, в соответствии с предположениями, принимаемыми



при выводе этих уравнений, p_2 оказывается величиной более высокого порядка малости и отбрасывается [11].

3. Несмотря на то, что возмущения, вызываемые p_2 , являются малым эффектом, их можно оценить на примере задачи о структуре прямой ударной волны в релаксирующем газе.

С этой целью примем основные допущения работы [12] и оценим величину p_2 в релаксационной зоне за вязким скачком уплотнения.

Уравнения, описывающие ударную волну, имеют вид (ниже обозначения работы [12])

$$\rho u = C_1, \quad p + \rho u^2 = C_2, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + c_p T + E_i = h_0$$

Для модели слабoreлаксирующего газа, в котором отношение $\omega = E_i / c_p T_0 \ll 1$, где E_i — энергия внутренних (в данном случае колебательных) степеней свободы, структурный член за счет колебательной релаксации может быть получен в виде малой вариации к обычному вязкому скачку, толщина которого имеет порядок длины релаксации поступательных и вращательных степеней свободы, т. е. равна нулю в рассматриваемой нами двухтемпературной модели [12].

Проведем линеаризацию системы (3.1) и разрешим ее относительно возмущений, предполагая, что число Кнудсена $K \sim \omega$, так что, помимо обычного газодинамического возмущения давления p' , в релаксационной зоне имеется некоторое дополнительное возмущение $\Delta \sim p'$, которое отождествим с p_2 в соответствии с рассматриваемой моделью течения. Для оценок предположим, что другими диссипативными членами из выражения (2.11) в релаксационной зоне можно пренебречь, так как они зависят от производных гидродинамических величин и существуют только в вязком скачке уплотнения, структура которого не рассматривается [10].

В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{p' - \Delta}{\rho_0} &= \frac{\Delta M_0^2 + (\gamma - 1) M_0^2 \rho_0 E_i'}{(1 - M_0^2) \rho_0}, & \frac{T'}{T_0} &= \frac{\Delta + \gamma \rho_0 E_i' (M_0^2 - 1/\gamma)}{(1 - M_0^2) \rho_0 c_p}, \\ \frac{\rho'}{\rho_0} &= \frac{\Delta + (\gamma - 1) \rho_0 E_i'}{(1 - M_0^2) \rho_0 \gamma}, & \frac{u'}{u_0} &= -\frac{\rho'}{\rho_0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь величины с индексом 0 соответствуют значениям непосредственно за вязким скачком уплотнения, расположенным в точке $x = 0$. При этом

$$E_i'(x) = E_i(T_0) \{1 - \exp(-x/\tau_0 u_0)\} \quad (3.3)$$

где τ_0 — время релаксации, предполагаемое постоянным.

Формулы (3.2) переходят в соответствующие выражения из работы [12] при $\Delta \rightarrow 0$. Нетрудно показать, что по порядку величины $\Delta = K r_0 \exp(-x/\tau_0 u_0)$, где число Кнудсена $K < 1$. В качестве примера на рис. 1 показано влияние Δ на распределение плотности в релаксационной зоне.

Очевидно, что формулы (3.2) могут служить основой для определения коэффициента объемной вязкости экспериментальным путем по измерению распределения газодинамических величин внутри релаксационной зоны, однако точность измерений при этом должна быть очень высокой.

В звуковых и слабых ударных волнах величина p_2 незначительна, так как при $l_{rk} \sim L \gg l_i$ (где l_{rk} — длина релаксации, l_i — средняя длина свободного пробега,

L — длина волны) диссипативные процессы, связанные с поглощением звука, определяются уже в первом приближении, поскольку в этом случае в системе Эйлера со-держится релаксационное уравнение. В предельных случаях $L \gg l_{rk}$, $L \ll l_{rk}$, $p_2 = 0$, и в приближении Навье — Стокса имеем обычное выражение для тензора давлений, в котором коэффициент ξ связан только с дивергенцией скорости. Теория поглощения в этом случае хорошо разработана [4, 13–16].

Автор выражает благодарность В. Н. Жигулеву за ряд ценных указаний при выполнении этой работы и признателен Е. В. Самуйлову, Е. В. Ступоченко, А. И. Осипову и Ю. Л. Климонтовичу за ценное обсуждение полученных результатов.

Поступило 8 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Об уравнениях движения неравновесной среды с учетом излучения. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2, 3.
2. Самуйлов Е. В. К вопросу о влиянии внутренних степеней свободы частиц на коэффициенты переноса многокомпонентной смеси газов. Сб. «Физическая газодинамика», Изд-во АН СССР, 1959.
3. Коган М. Н. Об уравнениях неравновесных течений газа. ПМТФ, 1965, № 1 (см. также Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Изд-во «Наука», 1967, стр. 192).
4. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 3, стр. 438.
5. Людвиг Г., Хейль М. Теория пограничного слоя с диссоциацией и ионизацией. Пробл. механики, Изд. иностр. лит., 1963, вып. 4, стр. 39.
6. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. Физматгиз, 1965.
7. Кузнецов В. М. Диссипативные коэффициенты в сильно неравновесных газовых смесях с бинарными столкновениями. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
8. Waldmann L., Trübenbacher E. Formale Kinetische Theorie von Gas Gemischen aus Anregbaren Molekülen. Zeit. für Naturforsch., 1962, B. 17, S. 363.
9. Егоров Б. В. О релаксационном уравнении для колебательных степеней свободы двухатомного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
10. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. Г. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1966.
11. Кузнецов В. М., Селиверстов С. Н. К обтеканию пластинки вязким потоком неравновесного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
12. Жигулев В. Н. К вопросу о течении неравновесного газа. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 6.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
14. Леонтович М. А. Некоторые вопросы теории поглощения звука многоатомных газов. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1936, т. 5, стр. 633.
15. Herzfeld K., Litovitz T. Absorption and Dispersion of ultrasonic waves. Acad. Press, N. — Y., 1959.
16. Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П. Основы молекулярной акустики. Изд-во «Наука», 1964.

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Б. Т. ПОРОДНОВ, П. Е. СУЕТИН

(Свердловск)

В последние годы появилось значительное число экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованиям течений разреженных газов.

Течение Пуазейля при низких давлениях было исследовано экспериментально Кнудсеном [1] для капилляра и Геде [2] для плоской щели. Было обнаружено, что в промежуточной области давлений при числах Кнудсена ~ 0.4 для капилляра и ~ 0.8 для плоской щели наблюдается минимум объемного расхода газа. Кнудсеном было также отмечено, что при дальнейшем уменьшении давления расход газа увеличивается до некоторой постоянной величины, отличающейся от минимального значения расхода на $\sim 5\%$ и равной хорошо известному теоретически вычисленному им значению. В опытах Геде объемный расход газа при наименьшем давлении отличается от минимального более чем в два раза, и не замечается приближения его к какому-либо постоянному значению. Кнудсеном получены эмпирические формулы, которые хорошо описывали экспериментальные данные во всей области давлений, и сделана попытка объяснить наличие минимума объемного расхода газа.