

$$s_1(t) = -\frac{4\delta\beta_1}{3(n^2-1)} \left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)} \left[3(\xi_2-1) - \frac{2(n-1)}{n} (\xi_2^{2n/(n-1)} - 1) + \frac{n-1}{3n+1} (\xi_2^{(3n+1)/(n-1)} - 1) \right]$$

$$r_1(t) = -\left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)} \delta\beta_1 \frac{n-1}{3(n+1)} \left[3(\xi_2-1) - \frac{n-1}{2n} (\xi_2^{2n/(n-1)} - 1) \right]$$

$$\left(\xi_2 = 1 - \frac{n-1}{2} \left(\frac{2}{1+n}\right)^{n/(n+1)} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{2}{n-1} \left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)} \right) \quad (8.5)$$

При значениях $z_1 \geq z_{1*}$ производная $s'(z_1) \equiv 1$, а функция $s(z_1)$ возрастает линейно.

Из (8.5) получаем, что в первом приближении $s'(z_1)$ обращается в 1 при $z_1 = z_*$, а во втором приближении — при

$$z_1 = z_* \left[1 + \frac{2\delta\beta_1}{3(n+1)} \left(3 - \frac{n-1}{2n} \right) N_1^{-1} \right]$$

9. На фигуре представлена зависимость от N_1 величины $[F''(0)]^n$, пропорциональной напряжению поверхностного трения, для псевдопластической жидкости ($n = 0.7$), ньютоновской жидкости ($n = 1$) и дилатантной жидкости ($n = 1.3$), для конфузорного участка пограничного слоя. Из поведения кривых видно, что в случае дилатантной жидкости с увеличением параметра N_1 направление поверхностного трения возрастает быстрее, чем в случае ньютоновской и псевдопластической жидкостей. Величина $F''(0)$ вычисляется по формуле (7.5).

Автор благодарит С. В. Фальковича за внимание к работе.

Поступило 29 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Китанин Э. Л. Ламинарный пограничный слой проводящего газа на пластине с поперечным магнитным полем. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Машиностроение, 1964, № 232, стр. 14—19.
2. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А. Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, 1, стр. 47—50.
3. Шульман Э. П., Берковский Б. М. Пограничный слой ньютоновских жидкостей. Минск, Изд-во «Наука и техника», 1966.
4. Сычев В. В. К теории сильного взрыва в теплопроводном газе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, стр. 997—1003.

О ВЛИЯНИИ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ГАЗА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. И. ЕРОФЕЕВ

(Москва)

Влияние шероховатости поверхности на обмен энергией и импульсом между потоком газа и твердым телом было рассмотрено в работах [1, 2]. В работе [1] исследовалось влияние статистической шероховатости на законы отражения атомов от поверхности и на обмен энергией и импульсом для двух схем отражения потока газа от элемента поверхности — диффузное и зеркальное отражение; в этой работе дана общая постановка задачи.

Конечный результат получен для слабо шероховатой поверхности, т. е. для случая, когда двухкратными и т. д. столкновениями частиц газа с поверхностью можно пренебречь; решение же задачи для произвольной степени шероховатости приводит к значительным математическим трудностям. В работе [2] в качестве примера влияния шероховатости рассмотрена задача об обтекании клиновидной полости свободно молекулярным потоком газа; различная степень шероховатости задавалась разными углами раствора гофра. В этой работе учитывались только те частицы, которые испытывали не более трех столкновений с поверхностью (при локальном отражении от элемента поверхности, описываемом законом косинуса), что может оказаться не-

достаточным при сильной степени шероховатости и другом законе локального отражения.

Необходимо сделать следующие замечания о взаимодействии потока газа со слабо шероховатой поверхностью.

Во-первых, понятие слабой шероховатости — относительное, т. е. зависит от схемы отражения потока газа от элемента поверхности. Например, при локальном диффузном отражении вероятность вылета частиц после однократного столкновения со стенками гофра [2] $p = \cos \theta$, где θ — угол между нормалью к стенке гофра и осью гофра (при этом угол падения потока газа, отсчитываемый от оси гофра, должен быть меньше угла полураствора гофра), или $p = 1 - \theta^2/2 + \dots$. Условие слабой шероховатости, т. е. $p \approx 1$, выполняется при $\theta^2 \ll 1$. Нетрудно показать, что это неравенство является общим для любого вида шероховатости при локальном диффузном отражении. В схеме зеркального отражения имеет место более сложная зависимость вероятности однократного отражения от угла наклона площадок и угла падения.

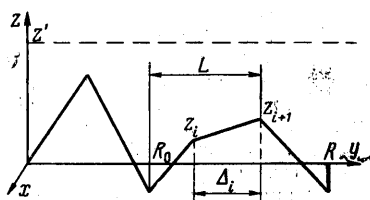
Во-вторых, коль скоро многократные столкновения не учитываются, то и расчеты коэффициентов обмена или каких-либо других величин надо проводить с такой степенью точности, с какой удовлетворяется исходное предположение о слабой шероховатости. В схеме локального диффузного отражения это означает, что надо пренебречь величинами порядка θ^2 по сравнению с 1. Нетрудно убедиться, что с этой точностью взаимодействие с любой изотропной шероховатой поверхностью происходит так же, как и с гладкой. Для схемы зеркального отражения нужно более сильное требование; однако если по условию задачи все-таки можно пренебречь величиной θ^2 по сравнению с единицей (например, если применяется схема диффузно-зеркального отражения), то в этом приближении, т. е. с точностью до величин порядка θ^2 , любая изотропная шероховатость не влияет на характеристики взаимодействия потока газа с поверхностью.

В настоящей работе для моделирования шероховатости поверхности и процесса столкновения применен метод статистических испытаний, что позволяет получить поверхности с любой заданной степенью шероховатости, а результаты расчетов коэффициентов аккомодации — в любом заданном приближении (в смысле многократных столкновений с поверхностью). Поверхность набирается из плоских площадок, угол наклона и проекция на горизонтальную плоскость которых — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному распределению. Взаимодействие потока газа с элементом поверхности описывалось следующими схемами: (1) отражение по закону косинуса, (2) зеркальное отражение (в этих двух схемах предполагалось, что коэффициент аккомодации энергии не зависит от угла падения), (3) схема отражения, учитывающая зависимость коэффициентов аккомодации энергии и импульса от угла падения. Результаты расчетов коэффициентов аккомодации, полученные для схемы (3), применены для определения аэродинамических характеристик конуса при свободно молекулярном обтекании.

1. Моделирование поверхности и процесса столкновения. Построение поверхности проводилось следующим образом: поверхность набирается из плоских площадок, каждая из которых имеет определенные угол наклона и проекцию на горизонтальную плоскость, независимые от этих же величин для других площадок (фиг. 1). Рассмотрим подробнее процесс построения поверхности в плоскости zy , перпендикулярной направлению, в котором элементарные площадки имеют бесконечную длину. Если z_i — левая координата высоты площадки, то правая координата высоты z_{i+1} будет определена соотношением

$$z_{i+1} = z_i + k_i \Delta_i \quad (1.1)$$

где k_i — тангенс угла наклона площадки, Δ_i — база площадки (проекция на горизонтальную плоскость xy). Таким образом, математически поверхность рассматривается как случайный процесс с независимыми приращениями. Если, далее, определить начало отсчета z_0 , а также величины k_i и Δ_i для любой площадки, то поверхность будет построена. Поскольку из данных по шероховатости поверхности (см., например, [3, 4]) распределение элементарных площадок по углам определить невозможно, то было выбрано нормальное распределение для величин k_i и Δ_i



Фиг. 1

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp - \frac{(k - a_1)^2}{2\sigma_1^2}, \quad f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp - \frac{(\Delta - a_2)^2}{2\sigma_2^2} \quad (1.2)$$

Здесь a_1, a_2 — средние значения k и Δ , а σ_1 и σ_2 — средние квадратичные отклонения.

После построения поверхности решается собственно задача о взаимодействии частиц газа с твердым телом. Попадание частицы газа на заданную элементарную площадку есть случайное событие, которое может быть описано следующим образом. Выбираются базовая длина L (фиг. 1) и некоторый уровень z' такой, что $z' > \max z_i$. На базовой длине разыгрывается место старта частицы, координаты которого равны

$$y = R_0 + \delta_i L, \quad z = z' \quad (1.3)$$

Здесь R_0 — начало отсчета базовой длины, δ_i — случайное число, равномерно распределенное на интервале $[0, 1]$.

Поскольку построенный участок поверхности (или реализация) имеет конечную (в направлении y) длину R , то база L должна быть меньше этой длины с тем, чтобы конечные размеры выбранного участка поверхности не оказывали влияния на результат взаимодействия. Далее, зная место «старта» и начальное направление движения частицы, можно определить место столкновения частицы с поверхностью. В зависимости от закона отражения разыгрывается или определяется направление движения частицы после первого столкновения. Затем реализуется одна из двух возможностей: либо частица не встретит на своем пути участков поверхности и пересечет уровень z' , имея компоненту скорости $v_z > 0$, либо частица второй раз столкнется с поверхностью. В последнем случае опять находится направление движения отраженной частицы и т. д.; процесс продолжается до тех пор, пока частица после многократных столкновений с поверхностью не пересечет уровень $z = z'$ с $v_z > 0$.

Каждое столкновение частицы газа с поверхностью сопровождается обменом энергией и импульсом. Распределение отраженных частиц по скоростям и направлениям, зная которое, легко определить коэффициенты обмена, зависит от многих параметров: начальной энергии частицы, отношения масс атома газа и атома тела, угла падения и т. д. Все эти параметры можно учесть при рассмотрении каждого столкновения атома газа с поверхностью. В результате можно определить энергию и импульс частицы, отраженной после многократных столкновений с поверхностью, а значит, и определить коэффициенты аккомодации.

Для того, чтобы получить результат взаимодействия потока газа с поверхностью, коэффициенты аккомодации должны быть осреднены по большому числу начальных траекторий. Осреднение проводилось в две ступени: первая ступень — для данной реализации поверхности определяются средние значения коэффициентов аккомодации (количество необходимых траекторий зависит от задаваемой точности; так, при относительной точности $\epsilon = 0.001$ средние значения определялись уже при 1000 начальных траекторий); вторая ступень — осреднение по числу реализаций поверхности.

Осреднение по числу реализаций необходимо потому, что, во-первых, строился конечный участок поверхности, а во-вторых, базовая длина также имеет конечные размеры, причем меньшие, чем размер всего построенного участка поверхности, т. е. вместо того, чтобы реализовать очень большой участок поверхности, строилось большое количество участков конечной длины (в направлении оси y). Число необходимых реализаций также зависит от задаваемой степени точности. Обычно строилось 100 реализаций; таким образом, полное количество запускаемых траекторий было порядка 100 000.

2. Схема локального диффузного и локального зеркального отражения. Рассмотрим вначале взаимодействие молекул энергетического потока газа, вектор скорости которого лежит в плоскости zy (фиг. 1), с шероховатой поверхностью для случаев, когда отражение от элементарной площадки описывается либо законом косинуса (локальное диффузное отражение — ЛДО), либо определяется из условий зеркального отражения — схема ЛЗО. Предполагается также, что при каждом столкновении частица газа теряет часть энергии, определяемую локальным коэффициентом аккомодации энергии α , который не зависит от угла падения. Если частица газа, отраженная от поверхности, испытала n столкновений, то ее энергия равна

$$E_n = (1 - \alpha)^n E_0 \quad (2.1)$$

где E_0 — начальная энергия частицы. Нормальная v_z и тангенциальная v_y компоненты скорости отраженной частицы соответственно равны

$$v_z = (1 - \alpha)^{1/2} v_0 \sin \varphi \cos \chi, \quad v_y = (1 - \alpha)^{1/2} v_0 \cos \varphi \cos \chi \quad (2.2)$$

где χ — угол между вектором скорости отраженной частицы и плоскостью zy , а φ — угол между проекцией скорости в плоскости zy и положительным направлением оси y . Коэффициенты аккомодации энергии α_n , нормального σ и тангенциального σ' импульсов одной молекулы определим следующим образом:

$$\alpha_n = 1 - E_n / E_0, \quad \sigma = v_z / v_0, \quad \sigma' = v_y / v_0 \quad (2.3)$$

Имея в виду (2.1), (2.2), получаем

$$a_n = 1 - (1 - \alpha)^n, \quad \sigma = (1 - \alpha)^{1/2n} \sin \varphi \cos \chi, \quad \sigma' = (1 - \alpha)^{1/2n} \cos \varphi' \cos \chi \quad (2.4)$$

Осредненные, в соответствии с процедурой, описанной в п.1, коэффициенты аккомодации обозначим через $\langle \alpha \rangle$, $\langle \sigma \rangle$, $\langle \sigma' \rangle$.

Реализации участков поверхности строились для следующих двух серий значений параметров распределения (1.2):

- 1) $a_1 = 0, \sigma_1 = 1, a_2 = 1, \sigma_2 = 1$
- 2) $a_1 = 0, \sigma_1 = 0.5, a_2 = 1, \sigma_2 = 1$

В первом примере среднее квадратичное отклонение тангенса угла наклона элементарной площадки равно 1, что соответствует углу наклона, равному 45° , во втором примере — углу наклона 27° . Ниже приведены результаты расчетов коэффициентов аккомодации, а также данные об относительном количестве частиц p_i (в %), испытавших одно (p_1), два (p_2) и т. д. столкновений с поверхностью для указанных примеров шероховатости и $\alpha = 0.5$.

(а) схема ЛДО, $\sigma_1 = 1$

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$N = 89000$	114000	174000	109000
$\langle \alpha \rangle = 0.57$	0.57	0.57	0.56
$\langle \sigma \rangle = 0.43$	0.43	0.42	0.41
$\langle \sigma' \rangle = -0.002$	-0.058	-0.15	-0.20
$p_1 = 77\%$	76.5%	77.5%	78.7%
$p_2 = 15.3\%$	15.5%	15.8%	15.2%
$p_3 = 4.9\%$	4.9%	4.6%	4.4%

(в) схема ЛЗО, $\sigma_1 = 1$

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$N = 100000$	150000	100000	100000
$\langle \alpha \rangle = 0.63$	0.60	0.53	0.51
$\langle \sigma \rangle = 0.46$	0.48	0.52	0.56
$\langle \sigma' \rangle = 0.002$	-0.08	-0.20	-0.20
$p_1 = 52\%$	63%	91%	96%
$p_2 = 41\%$	33%	8.7%	3.6%
$p_3 = 6\%$	3.4%	0.3%	0.4%

(б) схема ЛДО, $\sigma_1 = 0.5$

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$N = 100000$	100000	100000	100000
$\langle \alpha \rangle = 0.52$	0.53	0.53	0.52
$\langle \sigma \rangle = 0.46$	0.46	0.46	0.45
$\langle \sigma' \rangle = 0.002$	-0.032	-0.087	-0.14
$p_1 = 90.5\%$	90.6%	90.6%	91%
$p_2 = 7.7\%$	7.5%	7.8%	7.8%
$p_3 = 1.1\%$	1.2%	1.1%	1%

(г) схема ЛЗО, $\sigma_1 = 0.5$

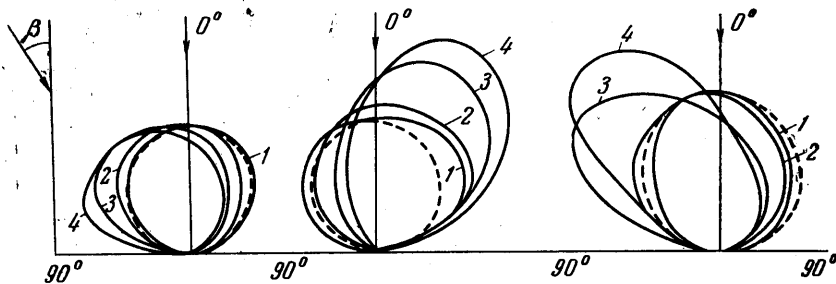
$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$N = 90000$	100000	100000	100000
$\langle \alpha \rangle = 0.52$	0.53	0.52	0.52
$\langle \sigma \rangle = 0.52$	0.53	0.56	0.57
$\langle \sigma' \rangle = 0.002$	0.08	0.18	0.22
$p_1 = 91\%$	88.8%	90.3%	93.6%
$p_2 = 8.5\%$	10.7%	9.6%	6.4%

В приведенных результатах N — полное число траекторий, а отрицательное значение $\langle \sigma' \rangle$ указывают, что отраженные частицы в среднем движутся в направлении, противоположном направлению их начального движения.

На фиг. 2—4 изображены индикатрисы рассеяния в плоскости xy для случаев a, z , e соответственно, причем кривые 1—4 соответствуют значениям $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. Для сравнения на этих же фигурах приведена индикатриса, соответствующая отражению по закону косинуса (пунктирная кривая). Для схемы ЛДО при нормальном падении распределение отраженных частиц близко к закону косинуса. При увеличении угла падения вид индикатрис изменяется, указывая на преимущественное отражение частиц в направлении, противоположном направлению начального движения. Сравним, далее, для схемы ЛДО результаты расчетов коэффициентов аккомодации для гладкой и шероховатой поверхностей. Для гладкой поверхности имеем: $\alpha = 0.5, \sigma = 2/3\sqrt{1 - \alpha} = 0.472, \sigma' = 0$. Тогда для примера (а), когда $\sigma_1 = 1$, отличие между α и $\langle \alpha \rangle$ составляют максимум 14% ($\beta = 30^\circ$), а между σ и $\langle \sigma' \rangle$ — максимум 16% ($\beta = 75^\circ$); для примера (б), когда $\sigma_1 = 0.5$, отличие в коэффициенте аккомодации энергии составляют максимум 6% ($\beta = 30^\circ, 60^\circ$), а в коэффициенте аккомодации нормального импульса — максимум 5% ($\beta = 75^\circ$). Таким образом, в рассмотренных случаях основное влияние шероховатости заключается в изменении аккомодации тангенциального импульса. Влияние степени шероховатости проявляется следующим образом: увеличение степени шероховатости увеличивает $\langle \alpha \rangle$ и $|\langle \sigma' \rangle|$ и уменьшает $\langle \sigma \rangle$. Такое же влияние имело место при задании шероховатости в виде клиновидной полости с различными углами раствора [2].

В схеме ЛЗО сравнение результатов для $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_1 = 0.5$ (случаи e и z) показывает, что с увеличением степени шероховатости количество частиц, испытавших два и более столкновений с поверхностью, увеличивается при малых углах падения.

При больших углах падения из-за эффекта затенения доля частиц, испытавших два столкновения, увеличилась при более слабой шероховатости. Поэтому и коэффициент аккомодации энергии для более сильной шероховатости больше при малых углах падения и несколько меньше при $\beta = 75^\circ$. Коэффициент $\langle \sigma \rangle$ меньше для более сильной шероховатости при всех углах падения. Коэффициент $\langle \sigma' \rangle$ для рассматриваемых случаев имеет разные знаки, указывая на то, что при $\sigma_1 = 1$ доминирует отражение частиц в направлении, противоположном направлению начального движения, а при $\sigma_1 = 0.5$ доминирует отражение в направлении начального движения. При заданной степени шероховатости $\langle \alpha \rangle$ уменьшается с увеличением угла падения в соответствии с уменьшением доли частиц, испытавших многократные столкновения с поверхностью, $\langle \sigma \rangle$ увеличивается, абсолютная величина $\langle \sigma' \rangle$ также увеличивается, за исключением случая $\sigma_1 = 1$, $\beta = 75^\circ$, что связано с изменением распределения отражен-



Фиг. 2

Фиг. 3

Фиг. 4

ных частиц по направлениям (фиг. 4). Сравним теперь значения коэффициентов аккомодации для гладкой и шероховатой поверхностей. Для схемы ЛЗО на гладкой поверхности имеем следующие значения коэффициентов аккомодации импульса (коэффициент аккомодации α предполагается не зависящим от угла падения β):

$$\sigma = \sqrt{1 - \alpha \cos \beta}, \quad \sigma' = \sqrt{1 - \alpha \sin \beta}.$$

Тогда при $\alpha = 0.5$ получаем

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$\sigma = 0.707$	0.612	0.354	0.183
$\sigma' = 0$	0.354	0.612	0.683

Сравнение этих результатов с результатами примеров в и г показывает, что в схеме ЛЗО изменения коэффициентов аккомодации импульса весьма значительны при переходе от гладкой поверхности к шероховатой. Коэффициент аккомодации энергии в принятом предположении менее чувствителен к виду поверхности: максимальное отличие имеет место при $\sigma_1 = 1$, $\beta = 0^\circ$ и составляет примерно 27%.

О точности расчетов можно судить по сходимости результатов с увеличением числа запускаемых траекторий. На фиг. 5 представлены изменения положительной $\langle \sigma_+ \rangle$ и отрицательной $\langle \sigma_- \rangle$ частей тангенциального импульса в зависимости от числа траекторий N для следующих случаев: кривая 1 — пример (а), $\beta = 75^\circ$; кривая 2 — пример (б), $\beta = 0^\circ$; кривая 3 — пример (в), $\beta = 60^\circ$; кривая 4 — пример (г), $\beta = 75^\circ$. Как видно из фиг. 5, сходимость результатов достаточно хорошая. Отметим, что значения $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \sigma \rangle$ сходятся быстрее, чем значения $\langle \sigma_+ \rangle$ и $\langle \sigma_- \rangle$. Наибольшая ошибка должна быть при определении $\langle \sigma' \rangle$, так как эта величина есть разность $\langle \sigma_+ \rangle$ и $|\langle \sigma_- \rangle|$. Из приведенных примеров видно, что при нормальном падении величина $\langle \sigma' \rangle$ близка к нулю, как это и должно быть. При наклонном падении в ряде случаев для получения надежного результата требовалось более 100 000 траекторий, так, в примере (в), $\beta = 30^\circ$, зависимость $\langle \sigma' \rangle$ от N была такой:

$N' = 25000$	50000	750000	100000	150000
$\langle \sigma' \rangle = -0.074$	-0.065	-0.068	-0.077	-0.078

В этом случае различие в $\langle \sigma' \rangle$ для полного числа траекторий N и для $1/2N$ составляет менее 15%. В остальных случаях при наклонном падении различия в $\langle \sigma' \rangle$ при числе траекторий, равном N и $1/2N$ не превышает 10%. Различия в значениях $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \sigma \rangle$ для N и $1/2N$ значительно меньше, чем для $\langle \sigma' \rangle$.

В рассмотренных выше примерах предполагалось, что вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости zy , перпендикулярной направлению, в котором поверхность имеет бесконечное измерение. Пусть теперь вектор скорости v_1 составляет с осью x угол η , тогда проекция скорости на плоскость zy равна $v_1 \sin \eta$. Легко ви-

деть, что вероятности двукратных и т. д. столкновений будут определяться составляющими v_y и v_z скорости отраженной от элемента поверхности частицы; таким образом, вероятность многократных столкновений не будет зависеть в принятых предположениях (схемы ЛДО и ЛЗО) от наличия компоненты скорости в направлении x . Поэтому и результаты расчетов коэффициентов аккомодации энергии также не зависят от угла η . Если определить коэффициенты аккомодации импульса как отношение средних компонент скорости в направлении x , y и z к абсолютной величине скорости набегающего потока, то получим следующую связь между коэффициентами $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \sigma' \rangle$ для случая $\eta = 1/2 \pi$ и случая произвольного угла η , для которого введем обозначения $\langle \sigma \rangle_\eta$, $\langle \sigma' \rangle_\eta$:

$$\langle \sigma \rangle_\eta = \langle \sigma \rangle \sin \eta; \quad \langle \sigma' \rangle_\eta = \langle \sigma' \rangle \sin \eta \quad (2.5)$$

В схеме ЛЗО появится также составляющая скорости отраженных частиц в направлении x , которую можно вычислить следующим образом:

$$\langle v_x \rangle = v_1 \sum_i p_i (1 - a)^{1/2 i} \quad (2.6)$$

где p_i — вероятность i -кратного столкновения с поверхностью (величина p_i дана в примерах a — g в %).

3. Схема локального отражения, учитывающая зависимость коэффициентов аккомодации от угла падения. Рассмотрим теперь такую схему отражения частиц от элемента поверхности, в которой обмен энергией и импульсом между частицами газа и твердым телом зависит от угла падения. Поскольку функция распределения по скоростям и направлениям частиц, взаимодействовавших с гладкой поверхностью, неизвестна, то будем предполагать, что направление отражения и абсолютную величину скорости после столкновения с элементом поверхности можно определить, зная локальные коэффициенты аккомодации энергии и импульса. Тогда направление отражения или угол между вектором скорости отраженной частицы и нормалью к элементу поверхности можно определить из соотношения

$$\cos \gamma = (\sigma^2 + \sigma'^2)^{-1/2} \quad (3.1)$$

а абсолютную величину скорости отраженной частицы v_r определим так:

$$v_r = \sqrt{1 - a} v_0 \quad (3.2)$$

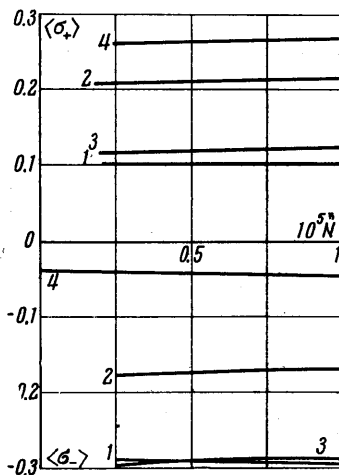
В отношениях (3.1), (3.2) величины a , σ , σ' — локальные коэффициенты аккомодации энергии, нормального и тангенциального импульса соответственно, зависящие от «входных» параметров — угла падения на элемент поверхности, отношения масс атома газа и атома тела κ и т. д.

Зависимости a , σ и σ' от интересующих параметров можно определить на основе данных по взаимодействию атомов газа с гладкой поверхностью. Так, на основе результатов взаимодействия атомов с плоской квадратной решеткой, моделирующей твердое тело [5], были составлены следующие приближенные выражения для зависимости a , σ и σ' от местного угла падения θ и отношения масс κ :

$$a(\kappa, \theta) = \frac{3,8 \kappa}{(1 + \kappa)^2} \cos^2 \theta, \quad \sigma(\kappa, \theta) = \frac{1,2 - \kappa}{1,4 + \kappa} \cos \theta (1 + \sin^2 \theta) \quad (3.3)$$

$$\sigma'(\theta) = (2\theta / \pi) [1 + 2/3 \sin^4 \theta \overline{\cos \theta}]$$

Эти соотношения приближенно справедливы при $0.15 \leq \kappa \leq 0.5$. Предполагая далее, что зависимости (3.3) сохраняют свой вид при многократных столкновениях, легко определить параметры частиц, отлетающих от поверхности. Средняя интересующие нас «выходные» параметры — энергию, компоненты импульса — по числу траекторий для данной реализации поверхности и по числу реализаций, как это сделано в п.2, получим эффективные коэффициенты аккомодации энергии и импульса, которые, как и раньше, обозначим через $\langle a \rangle$, $\langle \sigma \rangle$, $\langle \sigma' \rangle$.



Фиг. 5

Ниже приводятся результаты расчетов $\langle \alpha \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \sigma' \rangle$ для случая, когда вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости xy , а отношение масс $\kappa = 0.3$.

(д) $\sigma_1 = 1$

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$N = 100000$	150000	100000	100000
$\langle \alpha \rangle = 0.62$	0.62	0.57	0.53
$\langle \sigma \rangle = 0.47$	0.47	0.50	0.57
$\langle \sigma' \rangle = -0.004$	-0.04	-0.14	-0.14
$p_1 = 54.6\%$	62.9%	91.4%	96.94%
$p_2 = 40.1\%$	34.3%	8.3%	2.94%
$p_3 = 5\%$	2.6%	0.3%	0.1%

(е) $\sigma_1 = 0.5$

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$N = 100000$	90000	100000	100000
$\langle \alpha \rangle = 0.60$	0.56	0.43	0.35
$\langle \sigma \rangle = 0.46$	0.50	0.60	0.65
$\langle \sigma' \rangle = -0.005$	0.13	0.24	0.29
$p_1 = 91.3\%$	89.8%	91%	94%
$p_2 = 8.3\%$	9.6%	8.4%	5.7%

Отметим качественное совпадение направлений изменения коэффициентов аккомодации и вероятностей k -кратных столкновений примеров (д, е) и примеров в, г схемы ЛЗО. Качественно совпадает также вид индикатрис рассеяния для примеров (д), (е) и (в), (г) соответственно. Сравним теперь значения коэффициентов аккомодации для гладкой и шероховатой поверхностей, для чего приведем значения α , σ и σ' для разных углов падения, подсчитанные по формуле (3.3) ($\kappa = 0.3$)

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	75°
$\alpha = 0.674$	0.573	0.238	0.089
$\sigma = 0.530$	0.573	0.463	0.265
$\sigma' = 0$	0.338	0.725	0.911

Как видно из сравнения при нормальном падении ($\beta = 0^\circ$), влияние шероховатости сказалось в уменьшении α и σ . Такое изменение α связано с тем, что эффект уменьшения α с увеличением угла падения проявился в этом случае в большей степени, чем эффект многократных столкновений. Уменьшение же коэффициента аккомодации нормального импульса связано с разбросом отраженных частиц по направлениям, причем $\langle \sigma \rangle$ при $\sigma_1 = 1$ больше, чем при $\sigma_1 = 0.5$, так как в первом случае индикатрисы рассеяния имеют более вытянутый вверх вид (фиг. 3, 4). Изменения коэффициентов аккомодации с изменением угла падения для шероховатой поверхности очевидны, если учесть изменение числа частиц, испытавших одно, два и т. д. столкновений и вид индикатрис рассеяния. В то время как на гладкой поверхности коэффициент аккомодации нормального импульса уменьшается с увеличением угла падения, на шероховатой поверхности имеет место противоположная тенденция. При углах $\beta = 0^\circ, 30^\circ$ изменения в α и σ для гладкой и шероховатой поверхностей невелики (менее 22%), а при больших углах падения — значительны. Отличия же в σ' велики при всех углах падения, причем в примере (д) знак коэффициента аккомодации тангенциального импульса противоположен знаку σ' для гладкой поверхности.

О достоверности результатов можно судить, как и в п.2, по сходимости результатов, причем наибольшее отклонение имеют место для $\langle \sigma' \rangle$. Так, в примере (д) понадобилось 150 000 траекторий, чтобы значения $\langle \sigma' \rangle$ стабилизировались; зависимость $\langle \sigma' \rangle$ от числа траекторий N' в этом случае была следующей:

$N' = 25000$	50000	75000	100000	125000	150000
$\langle \sigma' \rangle = -0.054$	-0.049	-0.049	-0.042	-0.040	-0.042

Во всех остальных случаях при наклонном падении значения для полного числа траекторий N и для $1/2N$ различались не более чем на 12%. Сходимость результатов расчетов $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \sigma \rangle$ значительно лучше, чем $\langle \sigma' \rangle$.

4. Влияние шероховатости поверхности на аэродинамические характеристики конуса в свободномолекулярном потоке газа. Зависимость коэффициентов аккомодации энергии и импульса от угла падения β , полученные в п.3, были применены для расчета аэродинамических характеристик конуса (с углом полураствора ψ) при свободномолекулярном обтекании. Для этого зависимости $\langle \alpha \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \sigma' \rangle$ от β аппроксимировались аналитическими соотношениями, причем только в двух случаях (первый — $\sigma_1 = 0.5$, $\beta = 30^\circ$; второй — $\sigma_1 = 1$, $\beta = 30^\circ$) приближенные и точные значения $\langle \sigma' \rangle$ различались более чем на 10%.

Основные результаты расчетов могут быть сформулированы следующим образом.

1) С увеличением степени шероховатости коэффициент сопротивления C_x увеличивается почти для всех углов полураствора конуса ψ и углов атаки α . Наибольшие изменения (в несколько раз) от шероховатости C_x претерпевает в случае: а) малые углы полураствора конуса ($\psi \leq 30^\circ$) и малые углы атаки ($\alpha \leq 30^\circ$); б) большие углы полураствора ($\psi \geq 60^\circ$) и большие углы атаки ($\alpha > 75^\circ$). Так, величина C_x для гладкой поверхности при $\alpha = 0^\circ$ изменяется в пределах от 0.013 (при $\psi = 5^\circ$) до 3.049 (при $\psi = 85^\circ$); для шероховатой поверхности конуса при тех же пределах изменения ψ коэффициент C_x изменяется от 1.384 до 2.886 (при $\sigma_1 = 0.5$) и от 2.282 до 2.546 (при $\sigma_1 = 1$).

2) Отражение частиц от гладкой поверхности при больших углах падения β , как следует из работы [5], близко к зеркальному. Шероховатость поверхности приводит к увеличению доли частиц, отраженных в направлении нормали к элементу поверхности. Это обстоятельство приводит к увеличению коэффициента подъемной силы C_y при малых углах ψ и α (то же имеет место и при больших углах ψ и α). В остальных же случаях абсолютная величина C_y для шероховатой поверхности меньше, чем для гладкой. Далее, эффект увеличения C_y в указанных пределах ψ и α оказывается, однако, меньшим эффекта увеличения C_x при тех же значениях ψ и α . Это приводит к тому, что шероховатость поверхности значительно ухудшает аэродинамическое качество для всех углов ψ и α . Например, при $\alpha = 20^\circ$ и $\psi = 5-20^\circ$, в зависимости от степени шероховатости, качество уменьшается в 3-2.6 раза при $\sigma_1 = 0.5$ и в 6-6.5 раз — при $\sigma_1 = 1$.

3) Шероховатость поверхности приводит к увеличению абсолютной величины продольного момента, отсчитываемого относительно носика конуса. Например, при $\psi \leq 15^\circ$ величина продольного момента изменяется в 1.5-2 раза при малых углах атаки и на 10-25% — при больших.

4) Шероховатость поверхности приводит к увеличению теплового потока на тело. Наибольшее увеличение имеет место: а) при $\psi \leq 30^\circ$ и $\alpha \leq 30^\circ$; б) при $\psi \geq 60^\circ$ и $\alpha > 75^\circ$ (как и при расчете C_x). Например, при $\alpha = 0^\circ$ тепловой поток для гладкой поверхности изменяется (в безразмерных единицах) от 0.017 ($\psi = 5^\circ$) до 0.671 ($\psi = 85^\circ$); для шероховатой поверхности тепловой поток изменяется (при тех же пределах изменения ψ) в пределах от 0.247 до 0.603 при $\sigma_1 = 0.5$ и от 0.466 до 0.620 — при $\sigma_1 = 1$.

5) Сравнение результатов расчетов аэродинамических характеристик конуса, сделанных в настоящей работе для гладких и шероховатых поверхностей, с результатами расчетов тех же характеристик в приближении, когда коэффициенты обмена импульсом не зависят от угла падения частиц газа на элемент поверхности тела, дает существенное расхождение; поэтому применение предположения о постоянстве коэффициентов обмена импульсом для расчета аэродинамических характеристик требует тщательного анализа в каждом конкретном случае.

Автор благодарит М. Н. Когана и В. С. Галкина за обсуждение данной работы.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцев Р. Г. Отражение молекул газа от шероховатых поверхностей. Сб. «Аэродинамика разреженных газов». Изд. Ленингр. ун-та, 1963, т. 1.
2. Ерофеев А. И. Обтекание клиновидной полости свободномолекулярным потоком газа. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
3. Маталин А. А. Качество поверхности и эксплуатационные свойства деталей машин. Машгиз, 1956.
4. Дьяченко Л. Е., Вайнштейн В. Э., Розенбаум Б. С. Количественная оценка неровностей обработанных поверхностей. Изв. АН СССР, 1952.
5. Ерофеев А. И. Об обмене энергией и импульсом между атомами и молекулами газа и поверхностью тела. ПМТФ, 1967, № 2.

К ТЕОРИИ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ

В. М. КУЗНЕЦОВ (Москва)

1. Исследования релаксационных течений на основе кинетической теории газов показывают, что тензор давления (соответствующий приближению Навье — Стокса) имеет различный вид в зависимости от рассматриваемой модели газа.

Так, в работах [1] показано, что в двухтемпературной модели среды, содержащей поступательные и колебательные степени свободы, тензор давления не содержит объемной вязкости.

Если одна (или несколько) внутренних степеней свободы находятся в квазиравновесии с поступательными, то тензор давления в уравнениях Навье — Стокса содержит, помимо сдвиговой, также и объемную вязкость [2].