АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Я. Г. САПУНКОВ *(Саратов)*

В работах [1, 2] рассматривались автомодельные решения пограничного слоя ньютоновской жидкости в магнитной гидродинамике для случая степенного распределения скорости вдоль внешней границы слоя и постоянной электропроводности во всем течении. Однако магнитогидродинамические течения многих проводящих сред, которыми являются растворы или расплавленные металлы, не могут описываться уравнениями магнитной гидродинамики ньютоновских жидкостей.

Автомодельные решения пограничного слоя неньютоновской жидкости без учета взаимодействия с электромагнитным полем изучались в [3].

Ниже приводятся автомодельные решения пограничного слоя псевдопластических и дилатантных жидкостей с учетом взаимодействия с электромагнитным полем для случая степенного распределения скорости вдоль внешней границы слоя, когда электропроводность жидкости постоянна во всем течении и магнитное число Рейнольдса мало.

1. Течение в плоском пограничном слое неньютоновской несжимаемой электропроводной жидкости при наличии электромагнитного поля, когда вектор напряженности магнитного поля H перпендикулярен к поверхности тела, вектор напряженности электрического поля E перпендикулярен к H и направлению движения газа вдоль поверхности тела, а магнитное число Рейнольдса мало, описывается уравнениями

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\sigma\mu^2}{\rho}uH^2-\frac{\sigma\mu}{\rho}EH \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Здесь u и v — продольная и поперечная составляющие скорости течения; p — давление; ρ — плотность; k — коэффициент в законе, связывающем поверхностное напряжение в жидкости со скоростями деформации; σ — электропроводность; μ — магнитная проницаемость; n — постоянная ($n>1$ для дилатантной жидкости, $n=1$ — для ньютоновской, $n<1$ — для псевдопластической). Продольная составляющая скорости вдоль внешней границы пограничного слоя обозначается через u_∞. Считая, что жидкость во внешнем течении также электропроводна, можно гидродинамическое давление и напряженность электрического поля исключить из (1.1) при помощи соотношения

$$u_\infty\frac{du_\infty}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\sigma\mu^2}{\rho}u_\infty H^2-\frac{\sigma\mu}{\rho}EH \tag{1.2}$$

Тогда первое уравнение системы (1.1) примет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{du}{\partial y}=u_\infty\frac{du_\infty}{dx}+\frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\sigma\frac{\mu^2}{\rho}(u_\infty-u)H^2 \tag{1.3}$$

Задача автомодельна, если положить

$$u_\infty=cx^m,\qquad H=H_0x^{1/2(m-1)}\qquad (c,\ H_0,\ m=\mathrm{const})$$

2. Полагая $(2n-1)m+1=r>0$, введем функцию тока ψ следующим образом:

$$\psi=cx^{r/(1+n)}\left[\frac{n(n+1)k}{rc^{2-n}\rho}\right]^{1/(n+1)}F(\eta),\qquad \eta=yx^{m-r/(1+n)}\left[\frac{rc^{2-n}\rho}{n(n+1)k}\right]^{1/(n+1)} \tag{2.1}$$

Тогда, учитывая, что $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$, из (1.3) получим уравнение

$$F'''|F''|^{n-1}+FF''+\beta(1-F'^2)+N(1-F')=0\quad\left(\beta=\frac{m(1+n)}{r},\ N=\frac{\sigma\mu^2H_0^2(1+n)}{c\rho r}\right) \tag{2.2}$$

Функция $F(\eta)$ удовлетворяет граничным условиям

$$F=F'=0\quad\text{при }\eta=0,\qquad F'=1\quad\text{при }\eta=\infty. \tag{2.3}$$

Здесь и ниже штрих обозначает производную. Решение уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) будем искать методом разложения по малому параметру N^{-1}. Для этого введем новые переменные

$$z=\eta N^{1/(n+1)},\qquad f(z)=N^{1/(n+1)}F(\eta). \tag{2.4}$$

В новых переменных уравнение (2.2) и граничное условие (2.3) примут вид

$$f'''|f''|^{n-1} + 1 - f' = N^{-1}(\beta f'^2 - \beta - ff'') \tag{2.5}$$
$$f = f' = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad f' = 1 \quad \text{при } z = \infty$$

Функцию $f(z)$ ищем в виде

$$f = f_0 + f_1 N^{-1} + f_2 N^{-2} + \ldots \tag{2.6}$$

где f_0, f_1, f_2 зависят от переменной z и параметров n и β. Подставляя (2.6) в (2.5), получим уравнения и граничные условия для определения f_0, f_1, $f_2, \ldots$

3. Функция f_0 удовлетворяет уравнению

$$f_0'''|f_0|^{n-1} + 1 - f_0' = 0 \tag{3.1}$$

и граничному условию

$$f_0 = f_0' = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad f_0' = 1 \quad \text{при } z = \infty \tag{3.2}$$

Вид решения f_0 и ее производной f_0' зависят от значения n.

а) Псевдопластическая жидкость ($n < 1$)

$$f_0 = z + \frac{1}{n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}\left\{\left[1 + \frac{1-n}{2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n/(n+1)} z\right]^{2n/(n-1)} - 1\right\},$$
$$f_0' = 1 - \left[1 + \frac{1-n}{2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n/(n+1)} z\right]^{(n+1)/(n-1)} \tag{3.3}$$

б) Ньютоновская жидкость ($n = 1$). Из (3.3) предельным переходом $n \to 1$ получаем результат работы [2]

$$f_0 = z + e^{-z} - 1, \qquad f_0' = -1 - e^{-z} \tag{3.4}$$

в) Дилатантная жидкость ($n > 1$).

при $0 \leqslant z$

$$f_0 = z + \frac{1}{n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}\left\{\left[1 - \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n/(n+1)} z\right]^{2n/(n-1)} - 1\right\}$$
$$f_0' = 1 - \left[1 - \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n/(n+1)} z\right]^{(n+1)/(n-1)} \tag{3.5}$$

при $z \geqslant z_*$

$$f_0 = z - \frac{1}{n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}, \qquad f_0' \equiv 1 \quad z_* = \frac{2}{n-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n/(n+1)}$$

Отсюда видно, что продольная составляющая скорости в первом приближении достигает граничного значения при $z = z_*$ и после не меняется при увеличении z. Как увидим, это свойство будет характерным для дилатантных жидкостей.

4. Функция f_1 удовлетворяет уравнению

$$f_1'''(f_0'')^{n-1} + (n-1)f_1''(f_0'')^{n-2}f_0''' - f_1' = \beta f_0'^2 - \beta - f_0 f_0'' \tag{4.1}$$

и однородным граничным условиям

$$f_1 = f_1' = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad f_1' = 0 \quad \text{при } z = \infty. \tag{4.2}$$

Это линейное уравнение приводится к уравнению Эйлера.

а) Для псевдопластической жидкости ($n < 1$) решение для f_1 и f_1' имеет вид

$$f_1(z) = \frac{2}{1-n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(1+n)}\left\{\frac{1}{2n}\left(2\beta + \frac{1+n}{1-n}\right)(1 - \xi^{-2n/(1-n)}) + \right.$$
$$+ \frac{1-n}{3n(1+3n)}\left(\beta - \frac{1+n}{2n}\right)(1 - \xi^{(1+3n)/(n-1)}) - \left[\frac{1+5n}{3n(1+n)}\beta + \frac{5n^2+2n-1}{6n^2(1-n)}\right] \times$$
$$\left. \times (1 - \xi^{-(1+n)/(1-n)}) + \frac{(n+1)^2}{n(1-n)(3+n)}\xi^{(1+n)/(n-1)}\ln\xi\right\}$$
$$f_1'(z) = \frac{1}{1-n}\left(2\beta + \frac{1+n}{1-n}\right)\left(\xi^{(1+n)/(n-1)} - \xi^{2/(n-1)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{3n}\left(\beta - \frac{1+n}{2n}\right)(\xi^{2(n+1)/(n-1)} - \xi^{2/(n-1)}) - \frac{(1+n)^3}{n(1-n)^2(3+n)}\xi^{2/(n-1)}\ln\xi \tag{4.3}$$
$$\xi = 1 + \frac{1-n}{2}\left(\frac{2}{1+n}\right)^{n/(n+1)} z$$

б) Для ньютоновской жидкости ($n = 1$) из (4.3) можно получить известный результат (см. [2]) переходом к пределу $n \to 1$.

в) Для дилатантной жидкости ($n > 1$) при $0 \leqslant z \leqslant z_*$ получаем формулы (4.3), а при $z \geqslant z_*$ получаем

$$f_1(z) \equiv \frac{2}{1-n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}\left\{\frac{1}{2n}\left(2\beta + \frac{1+n}{1-n}\right) + \frac{1-n}{3n(1+3n)}\left(\beta - \frac{1+n}{2n}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1+5n}{3n(1+n)}\beta - \frac{5n^2+2n-1}{6n^2(1-n)}\right\}, \qquad f_1'(z) \equiv 0. \tag{4.4}$$

5. Необходимо отметить, что в случае дилатантной жидкости член $N^{-1}ff''$ из уравнения (2.5), который не учитывался при определении первого приближения функции f, при подстановке вместо f ее первого приближения (3.5) в $O(N^{-1})$ — окрестности точки $z = z_*$ становится больше, чем члены уравнения (3.1). В связи с этим следует учитывать влияние этого члена на первое приближение f_0 в окрестности точки $z = z_*$. Найденные выше первое и второе приближения определяют функцию f и ее производную f' с точностью до $O(N^{-1})$ включительно всюду в пограничном слое. Для более полного изучения поведения функции f в окрестности особой точки уравнения (2.5), где f'' обращается в 0, воспользуемся методом внутренних и внешних разложений [4].

Таким образом, для определения нулевого приближения необходимо решать не уравнение (3.1), а следующее:

$$f_0'''|f_0''|^{n-1} + 1 - f_0' = -N^{-1}f_0f_0'' \tag{5.1}$$

Формула (3.5) определяет внешнее разложение решения этого уравнения. В $O(N^{-1})$ окрестности особой точки уравнение (5.1) в первом приближении можно аппроксимировать уравнением

$$-\varphi''|\varphi'|^{-1} + \varphi = AN^{-1}\varphi' \qquad \left(\varphi = 1 - f_0', \quad A = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n/(n+1)}\frac{n+1}{n(n-1)}\right) \tag{5.2}$$

Здесь A — значение f_0, вычисленное по (3.5) при $z = z_*$.

Введя новые переменные $\varphi' = -g(\varphi)$, уравнение (5.2) представим в виде

$$g'g^n - \varphi = AN^{-1}g \tag{5.3}$$

Внешнее разложение (3.5) в новых переменных запишется так

$$g = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/(n+1)}\varphi^{2/(n+1)} \tag{5.4}$$

Внутренние переменные Φ, G введем таким образом, чтобы в уравнении (5.3) член, стоящий слева, имел во внутренней области тот же порядок, что и члены справа

$$\Phi = \varphi N^{(n+1)/(n-1)}, \qquad G(\Phi) = gN^{2/(n-1)} \tag{5.5}$$

Тогда уравнение (5.3) примет вид

$$G'G^n - \Phi = AG \tag{5.6}$$

Из сращивания внешнего и внутреннего разложений получаем граничные условия для уравнения (5.6)

$$G(0) = 0, \qquad G \to [{}^1/_2(n+1)]^{1/(n+1)}\Phi^{2/(n+1)} \quad \text{при } \Phi \to \infty. \tag{5.7}$$

При больших значениях Φ функцию G можно представить в виде

$$G = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/(n+1)}\Phi^{2/(n+1)}(1 + a_1\Phi^{-k_1} + a_2\Phi^{-2k_1} + \ldots)\left(k_1 = \frac{n-1}{n+1}\right) \tag{5.8}$$

Здесь коэффициенты a_2 определяются из уравнения (5.6). В частности

$$a_1 = A\frac{n+1}{n+3}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n/(n+1)}$$

При малых значениях Φ функцию G можно представить в виде

$$G = (An)^{1/n}\Phi^{1/n}(1 + b_1\Phi^{k_2} + b_2\Phi^{2k_2} + \ldots) \quad (k_2 = (n-1)/n) \tag{5.9}$$

Здесь коэффициенты b_i определяются из уравнения (5.6) однозначно. В частности,

$$b_1 = n(An)^{-(n+1)/n}(2n-1)^{-1}$$

Заметим, что для $n = 2$ первые два члена разложений (5.8) и (5.9) при $1 \leqslant \Phi \leqslant 2$ дают значения G, различающиеся между собой менее чем на 0.5%

Таким образом, формулы (5.8) и (5.9) достаточно точно определяют функцию G, и поэтому численного интегрирования уравнения (5.6) не требуется.

Определив $G(\Phi)$, можно уточнить зависимость f_0 от z вблизи особой точки. Аналогичным образом можно уточнить и второе приближение.

6. Напряжение трения на стенке

$$\tau_w = k\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = k^{1/(1+n)}(x^{3m-1}c^2\sigma\mu H_0{}^2 n^{-1})^{n/(1+n)}(f''(0))^n \tag{6.1}$$

Отсюда видно, что напряжение трения на стенке с увеличением x будет возрастать при $m > {}^1/_3$ и убывать при $m < {}^1/_3$. В первых двух приближениях $f''(0)$ определяется формулой

$$f''(0) = f_0''(0) + \frac{1}{N}f_0''(0) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/(n+1)}\left[1 + \left(\frac{1}{3N}\left(\frac{4m}{r} + \frac{1}{3+n}\right)\right]\right. \tag{6.2}$$

Эта формула справедлива одновременно для псевдопластических, ньютоновских и дилатантных жидкостей.

7. В случае, когда $(2n-1)m+1 = r = 0$, т. е. $m = -1/(2n-1)$, удается получить точное решение задачи. Пусть

$$u_\infty = \delta c_1 x^{-1/(2n-1)} \qquad (c_1 > 0)$$

Если рассматривается диффузорный участок пограничного слоя, то $\delta = 1$, если конфузорный — то $\delta = -1$. Тогда, задав функцию тока ψ_1 в виде

$$\psi_1 = \delta c_1\left(\frac{nk}{c_1{}^{2-n}\rho}\right)^{1/(1+n)} F_1(\eta_1), \quad \eta_1 = yx^{-1/2n-1}\left(\frac{c_1{}^{2-n}\rho}{nk}\right)^{1/(1+n)} \tag{7.1}$$

Из уравнения (1.3) получаем уравнение для $F_1(\eta_1)$

$$|F_1''|^{n-1}F_1''' - \delta\beta_1(1 - F_1'^2) + N_1(1 - F_1') = 0 \quad \beta_1 = \frac{1}{2n-1}, \quad N_1 = \frac{\sigma\mu^2 H_0{}^2}{\rho c_1} \tag{7.2}$$

Функция $F_1(\eta_1)$ удовлетворяет граничным условиям

$$F_1 = F_1' \neq 0 \quad \text{при } \eta_1 = 0, \qquad F_1' = 1 \quad \text{при } \eta_1 = \infty \tag{7.3}$$

Интегрируя (7.2) один раз, получим

$$\frac{|F_1''|^{n+1}}{n+1} = (1 - F_1')^2\left[\frac{N_1}{2} - \frac{\delta}{3}\beta_1(F_1' + 2)\right] \tag{7.4}$$

Отсюда следует, что в случае конфузорного участка пограничного слоя решение уравнения (7.2) с граничными условиями (7.3) возможно для любых $N_1 \geqslant 0$, а в случае диффузорного (то есть $\delta = 1$) решение возможно только для $N_1 \geqslant 2\beta_1$.

Из (7.4) при $\eta_1 = 0$ получаем

$$F_1''(0) = (n+1)^{1/(n+1)}({}^1/_2 N_1 - {}^2/_3\delta\beta_1)^{1/(1+n)}) \tag{7.5}$$

Напряжение трения на поверхности

$$\tau_w = x^{2n/(1-2n)}(kc_1{}^{2n}\rho^n n^{-n})^{1/(1+n)}(F_1''(0))^n \tag{7.6}$$

Интегрируя (7.4) и удовлетворяя условиям (7.3), получим

$$\eta_1 = \left(\frac{3}{n+1}\right)^{1/(n+1)}\int\limits_0^{F_1'}\left\{(1 - F_1')^2\left[\frac{3}{2}N_1 - \delta\beta_1(F_1' + 1)\right]\right\}^{-1/(1+n)} dF_1' \tag{7.7}$$

Так как $0 \leqslant F_1' \leqslant 1$, то из (7.7) следует, что при $n \leqslant 1$ значение интеграла (7.7) меняется от 0 до ∞, при $n > 1$ — от 0 до некоторого конечного значения η_{1*}, а для $\eta_1 \geqslant \eta_{1*}$ надо полагать $F_1' \equiv 1$. Следовательно, в случае дилатантной жидкости продольная составляющая скорости достигает граничного значения при конечном значении η_1. В частном случае, когда $n = 1$, то есть для ньютоновской жидкости, интеграл (7.7) выражается в элементарных функциях:

$$F_1' = {}^3/_2(2 - \delta N_1)\,\mathrm{th}^2\left[\frac{\eta}{2}\sqrt{N_1 - 2\delta} + \mathrm{ar\,th}\left(\frac{3N_1 - 4\delta}{3N_1 - 6\delta}\right)^{1/2}\right] - 2 + \frac{3}{2}\delta N_1 \tag{7.8}$$

Здесь N_1 при $\delta = -1$ может принимать любое неотрицательное значение, включая $N_1 = 0$ (отсутствие взаимодействия с электромагнитным полем), при $\delta = 1$ на N_1 налагается условие $N_1 > 2$. Для случая $\delta = 1$ интеграл (7.8) был получен в [1].

Для предельного случая диффузорного участка пограничного слоя ($\delta = 1$), когда $N_1 = 2\beta_1$, интеграл (7.7) при всех значениях n вычисляется в элементарных функциях, и тогда имеем

а) при $n < 2$

$$F_1' = 1 - \left\{1 + \eta_1\left[\frac{(n+1)\beta_1}{3}\right]^{1/(n+1)}\frac{2-n}{n+1}\right\}^{(n+1)/(n-2)}$$

$$F_1 = \eta_1 + \frac{n+1}{2n-1}\left[\frac{3}{(n+1)\beta_1}\right]^{1/(n+1)}\left\{\left[1 + \eta_1\left(\frac{(n+1)\beta_1}{3}\right)^{1/(n+1)}\frac{2-n}{n+1}\right]^{(n+1)/(n-2)} - 1\right\}$$

б) при $n = 2$

$$F_1' = 1 - \exp(-\eta_1 3^{-1/3}), \qquad F_1 = \eta_1 + 3^{1/3}\exp(-\eta_1 3^{-1/3})$$

в) при $n > 2$

$$F_1' = 1 - \left\{1 - \eta_1\left[\frac{(n+1)\beta_1}{3}\right]^{1/(n+1)}\frac{n-2}{n+1}\right\}^{(n+1)/(n-2)},$$

$$F_1 = \eta_1 + \frac{n+1}{2n-1}\left[\frac{3}{(n+1)\beta_1}\right]^{1/(n+1)}\left\{\left[1 - \eta_1\left(\frac{(n+1)\beta_1}{3}\right)^{1/(n+1)}\frac{n-2}{n+1}\right]^{(n+1)/(n-2)} - 1\right\}$$

$$\left(0 \leqslant \eta_1 \leqslant \frac{n+1}{n-2}\left[\frac{3}{(n+1)\beta_1)}\right]^{1/(n+1)}\right)$$

$$F_1' \equiv 1, \qquad F_1 = \eta_1 - \frac{n+1}{2n-1}\left[\frac{3}{(n+1)\beta_1}\right] \qquad \left(\eta_1 \geqslant \frac{n+1}{n-2}\left[\frac{3}{(n+1)\beta_1}\right]^{1/(n+1)}\right)$$

8. Для достаточно больших N можно предложить, кроме точного решения (7.7), приближенное, решая уравнение (7.2) так же, как (2.2).

Приняв

$$z_1 = \eta_1 N_1^{1/(1+n)}, \qquad s(z_1) = N_1^{1/(1+n)} F_1(\eta_1) \tag{8.1}$$

и представив

$$s = s_0 + sN_1^{-1} + s_2 N_1^{-2} + \ldots \tag{8.2}$$

для случая псевдопластической жидкости, получим

$$s_0 = z_1 + \frac{1+n}{2n}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/(1+n)}\left\{\left[1 + \frac{1-n}{1+n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/(n+1)} z_1\right]^{2n/(n-1)} - 1\right\}$$

$$s_0^1 = 1 - \left[1 + \frac{1-n}{1+n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/(n+1)} z_1\right]^{(n+1)/(n-1)}$$

$$s_1 = -\delta\beta_1\frac{2}{1-n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(1+n)}\left[\frac{1}{n}(1 - \xi_1^{2n/(n-1)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1-n}{3n(1+3n)}\left(1 - \xi_1^{(1+3n)/(n-1)}\right) - \frac{1+5n}{3n(1+n)}\left(1 - \xi_1^{(1+n)/(n-1)}\right)\right]$$

$$s_1' = -\delta\beta_1\left[\frac{2}{1-n}\left(\xi_1^{(1+n)/(n-1)} - \xi_1^{2/(n-1)}\right) + \frac{1}{3n}(\xi_1^{2(n+1)/(n-1)} - \xi_1^{(2/(n-1))})\right]$$

$$\xi_1 = 1 + \frac{1-n}{2}\left(\frac{2}{1+n}\right)^{n/(1+n)} z_1 \tag{8.3}$$

В случае псевдопластической жидкости, чтобы учесть поведение функции $s(z_1)$ в окрестности особой точки уравнения (7.2), необходимо применить метод ПЛГ. Для этого представим s и z в виде

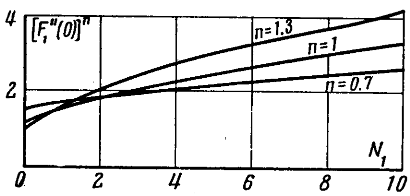
$$s = s_0(t) + s_1(t)N_1^{-1} + s_2(t)N_1^{-2} + \ldots, \qquad z_1 = t + r_1(t)N_1^{-1} + r_2(t)N_1^{2-} + \ldots \tag{8.4}$$

Подставляя (8.4) и (8.1) в (7.2) и собирая члены с одинаковыми степенями N_1, получим уравнения для s_i и r_i, решая которые, получим, удовлетворив соответствующим граничным условиям, решения

$$s_0(t) = t + \frac{1}{n}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/n+1)}\left\{\left[1 - \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n/(n+1)} t\right]^{2n/(n-1)} - 1\right\}$$

$$s_1(t) = -\frac{4\delta\beta_1}{3(n^2-1)}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}\left[3(\xi_2-1)-\frac{2(n-1)}{n}\left(\xi_2^{2n/(n-1)}-1\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{n-1}{3n+1}\left(\xi_2^{(3n+1)/(n-1)}-1\right)\right]$$
$$r_1(t) = -\left(\frac{2}{n-1}\right)^2\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}\delta\beta_1\frac{n-1}{3(n+1)}\left[3(\xi_2-1)-\frac{n-1}{2n}\left(\xi_2^{2n/(n-1)}-1\right)\right]$$
$$\left(\xi_2 = 1-\frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{1+n}\right)^{n/(n+1)}t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{2}{n-1}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{n/(n+1)}\right) \qquad (8.5)$$

При значениях $z_1 \geqslant z_{1*}$ производная $s'(z_1) \equiv 1$, а функция $s(z_1)$ возрастает линейно.



Из (8.5) получаем, что в первом приближении $s'(z_1)$ обращается в 1 при $z_1 = z_*$. а во втором приближении — при

$$z_1 = z_*\left[1+\frac{2\delta\beta_1}{3(n+1)}\left(3-\frac{n-1}{2n}\right)N_1^{-1}\right]$$

9. На фигуре представлена зависимость от N_1 величины $[F''(0)]^n$, пропорциональной напряжению поверхностного трения, для псевдопластической жидкости ($n = 0.7$), неньютоновской жидкости ($n = 1$) и дилатантной жидкости ($n = 1.3$), для конфузорного участка пограничного слоя. Из поведения кривых видно, что в случае дилатантной жидкости с увеличением параметра N_1 направление поверхностного трения возрастает быстрее, чем в случае неньютоновской и псевдопластической жидкостей. Величина $F''(0)$ вычисляется по формуле (7.5).

Автор благодарит С. В. Фальковича за внимание к работе.

Поступило 29 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Китанин Э. Л. Ламинарный пограничный слой проводящего газа на пластине с поперечным магнитным полем. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Машиностроение, 1964, № 232, стр. 14—19.
2. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А. Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, 1, стр. 47—50.
3. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, Изд-во «Наука и техника», 1966.
4. Сычев В. В. К теории сильного взрыва в теплопроводном газе. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, стр. 997—1003.

О ВЛИЯНИИ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ГАЗА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. И. ЕРОФЕЕВ

(Москва)

Влияние шероховатости поверхности на обмен энергией и импульсом между потоком газа и твердым телом было рассмотрено в работах [1, 2]. В работе [1] исследовалось влияние статистической шероховатости на законы отражения атомов от поверхности и на обмен энергией и импульсом для двух схем отражения потока газа от элемента поверхности — диффузное и зеркальное отражение; в этой работе дана общая постановка задачи.

Конечный результат получен для слабо шероховатой поверхности, т. е. для случая, когда двухкратными и т. д. столкновениями частиц газа с поверхностью можно пренебречь; решение же задачи для произвольной степени шероховатости приводит к значительным математическим трудностям. В работе [2] в качестве примера влияния шероховатости рассмотрена задача об обтекании клиновидной полости свободно молекулярным потоком газа; различная степень шероховатости задавалась разными углами раствора гофра. В этой работе учитывались только те частицы, которые испытывали не более трех столкновений с поверхностью (при локальном отражении от элемента поверхности, описываемом законом косинуса), что может оказаться не-