

## РАСЧЕТ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

А. С. ПОПЕЛЬ

(Москва)

Стационарное вращение диска бесконечного радиуса в проводящей несжимаемой жидкости при наличии осевого магнитного поля приводит к тому, что на диске образуется трехмерный осесимметричный пограничный слой, причем все величины, в силу симметрии, зависят лишь от двух координат. Так как характерный размер в этой задаче отсутствует, то она является автомодельной и, следовательно, сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Известен ряд исследований стационарного вращения диска в изотропно проводящей жидкости. В работе [1] изучено асимптотическое поведение решения на большом расстоянии от диска. В статье [2] задача линейризуется в предположении малости чисел Альфвена, и решение строится при помощи метода интегральных соотношений. В случае малых магнитных чисел Рейнольдса задача была решена численными методами [3, 4]. Для исследования влияния обдува диска поступательным потоком в работе [5] был применен метод интегральных соотношений. Вращение слабопроводящей жидкости над неподвижным основанием изучалось в работах [6, 7]. Влияние анизотропии проводимости на течения подобного рода приближенно изучалось в статье [8]. Ниже излагается численное решение задачи о пограничном слое на диске с учетом эффекта Холла.

§ 1. Рассмотрим течение анизотропно проводящей несжимаемой среды над плоскостью  $z = 0$ , вращающейся с переменной угловой скоростью  $\omega(t)$ . Постоянное магнитное поле  $H_0$  направлено по оси  $z$ . Предположим, что плоскость проницаема, и на ней заданы значения всех компонент скорости  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = r\omega(t)$ ,  $v_z = v_z(t)$ . Закон Ома примем в виде, соответствующем слабоионизированному газу, когда анизотропия проводимости сводится только к эффекту Холла.

Пусть  $\omega_0$  — характерная величина угловой скорости диска. Примем в качестве масштабов длины, скорости, времени, давления, электрического поля и тока соответственно величины

$$L = \nu^{1/2} \omega_0^{-1/2}, \quad U = \omega_0 L, \quad T = \omega_0^{-1}, \quad p_0 = \rho U^2,$$

$$E_0 = U H_0 c^{-1}, \quad j_0 = \sigma U H_0 c^{-1}$$

Основные уравнения запишем в виде

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + S \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (S = \sigma H_0 L / \rho U c^2) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = R_m \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = \partial \mathbf{H} / \partial t \quad (R_m = \nu / \nu_m) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \alpha \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (1.4)$$

Здесь  $S$  — число Стюарта, остальные обозначения общепринятые.

Предположим, что  $R_m \ll 1$ . Тогда из уравнения (1.3) следует, что индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Поскольку внешнее магнитное поле не зависит от времени, существует электрический потенциал  $E = \nabla\Phi$ .

Вводя цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$ , сделаем подстановку

$$v_r = rf(z, t), \quad v_\theta = rg(z, t), \quad v_z = h(z, t)$$

$$p = 1/2 p_1 r^2 + p_2(z, t), \quad \Phi = 1/2 \Phi_1 r^2 + \Phi_2(z, t)$$

Для компонент скорости получим уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + h \frac{\partial f}{\partial z} + f^2 - g^2 = -p_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{S}{1 + \alpha^2} (\alpha g - f + \Phi_1) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + h \frac{\partial g}{\partial z} + 2fg = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{S}{1 + \alpha^2} (\alpha f + g + \Phi_1) \quad (1.6)$$

$$\partial h / \partial z = 2f \quad (1.7)$$

Величины  $p_2(z, t)$  и  $\Phi_2(z, t)$  определяются из уравнений

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - h \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{2}{1 + \alpha^2} (\alpha f + g + \Phi_1)$$

Граничные условия для скорости

$$f = 0, \quad g = \omega(t), \quad h = k \quad (z = 0); \quad f = f_\infty, \quad g = 0 \quad (z = \infty) \quad (1.8)$$

Параметр  $k$  определяет интенсивность отсоса и вдува на поверхности диска, параметр  $f_\infty$  характеризует скорость поступательного потока на бесконечности<sup>1</sup> [9]. Граничные условия при  $z = \infty$  позволяют найти величины

$$p_1 = -f_\infty(S + f_\infty), \quad \Phi_1 = -\alpha f_\infty$$

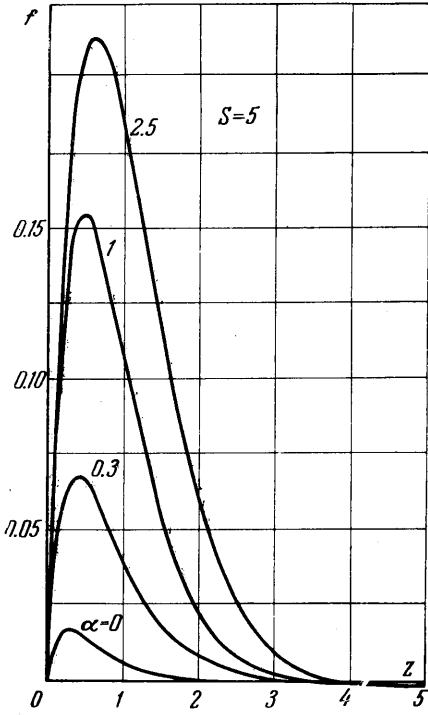
Рассмотрим диск конечного радиуса  $R$  и предположим, что этот радиус велик по сравнению с толщиной слоя жидкости, увлекаемого диском. Тогда, пренебрегая влиянием кромки, можно определить, например, момент сил трения

$$M = -(\partial g / \partial z)_{z=0} \cdot 1/2 \pi \rho R^4 \sqrt{\nu \omega_0^3}$$

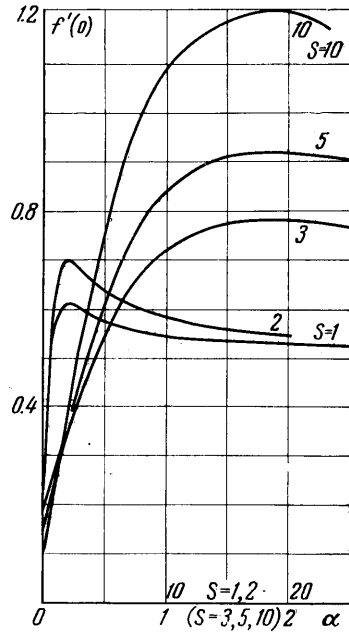
Величина радиальной компоненты трения определяется значением производной  $(\partial f / \partial z)_{z=0}$ . Секундный объем жидкости, отбрасываемой с одной стороны диска (при  $z > 0$ ) вследствие центробежного эффекта, равен

$$Q = 2\pi R \int_0^\infty v_r dz = -[h(\infty, t) - k] \pi R^2 \sqrt{\nu \omega_0}$$

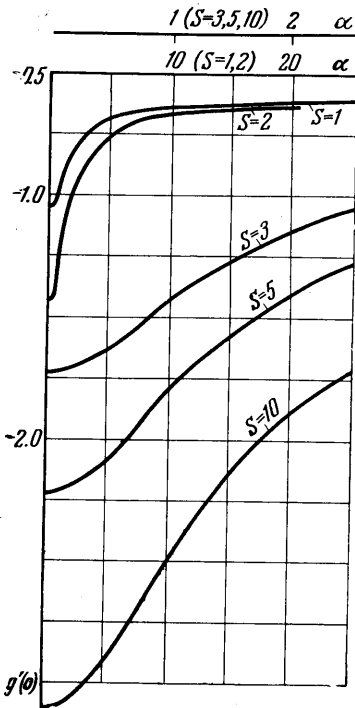
<sup>1</sup> В монографии [9] можно найти исчерпывающий обзор литературы, посвященный обычной гидродинамической задаче о диске.



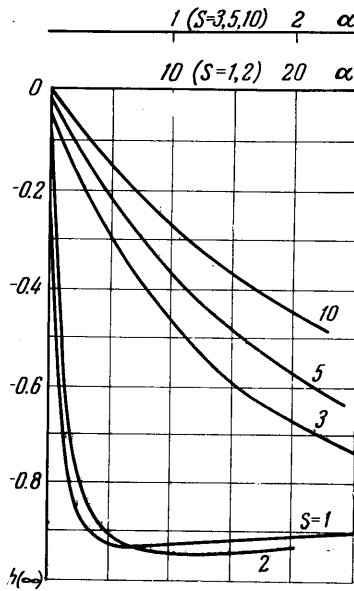
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



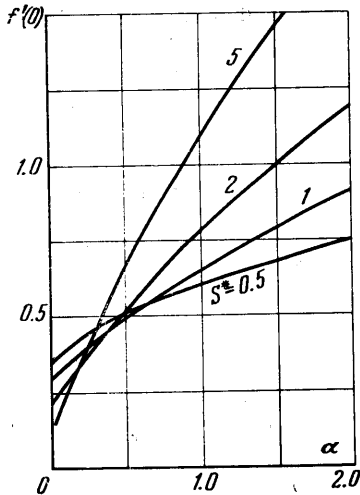
Фиг. 4

§ 2. Будем рассматривать сначала случай стационарного вращения непроницаемого диска, когда вдали от него радиальная скорость равна нулю ( $\omega(t) = 1$ ,  $k = f_\infty = 0$ ). Система уравнений (1.5)–(1.7) с граничными условиями (1.8) решалась численно методом конечных разностей [10] на ЭВМ «Стрела» с использованием стандартной программы [11].

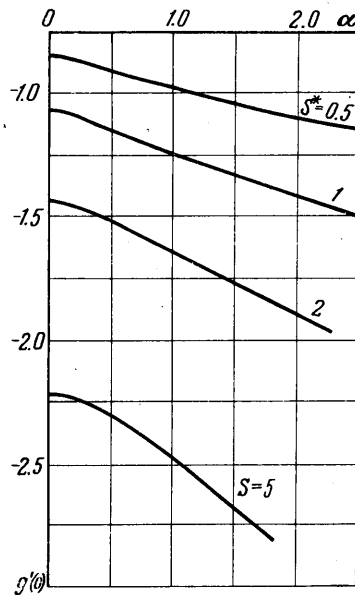
Ранее было установлено [3, 4], что количество жидкости, притекающей к диску вследствие вращения, радиальная компонента трения, толщина пограничного слоя и тепловой поток убывают с ростом магнитного поля, а момент сил трения возрастает. Кроме того, известно что при вращении жидкости над неподвижной плоскостью возникает квазипериодическое распределение скоростей [6–8]. Причиной такой немонотонности может служить также анизотропия проводимости [8].

Из фиг. 1 видно, что величина максимума радиальной компоненты скорости растет вместе с параметром Холла; при этом растет и толщина пограничного слоя. Распределение скоростей немонотонно, но из-за сильного затухания периодичность выражена гораздо слабее, чем при вращении жидкости на бесконечности [6, 7].

Из уравнений (1.5)–(1.7) видно, что при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $S = \text{const}$  решение должно стремиться к обычному гидродинамическому. Расчет показывает, что при  $S = 1$ ,  $\alpha = 30$  решение лишь на 1% отличается от гидродинамического решения. На фиг. 2 показана зависимость радиальной компоненты трения от параметра Холла. Трение достигает максимального значения при  $\alpha = 1.8$ , причем положение максимума не зависит от числа Стюарта. При небольших значениях  $\alpha$  радиальное трение убывает при увеличении  $S$ , если же значение  $\alpha$  велико, то имеет место обратное явление. При  $\alpha \rightarrow \infty$  величина трения асимптотически стремится к вычисленному в [3] значению  $f'(0) = 0,510$ . При  $\alpha = 0$  получаются результаты работы [3]. Величина момента сил трения уменьшается при увеличении  $\alpha$  (фиг. 3) тем быстрее, чем больше магнитное поле. Величина  $g'(0)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  стремится к значению  $-0,616$ . При малых  $\alpha$  расход жидкости возрастает с увеличением  $\alpha$  (см. фиг. 4). После перехода через максимальное значение ( $h(\infty)$ ) переходит при этом через минимум) расход далее медленно уменьшается, стремясь к асимптотическому значению ( $h(\infty) = -0,886$ ).



Фиг. 5



Фиг. 6

Таким образом, если магнитное поле постоянно, то изменение параметра Холла сильно влияет на характеристики течения лишь при сравнительно небольших значениях  $\alpha$ . При больших  $\alpha$  изменение параметра Холла уже не влияет существенно на течение, что связано с уменьшением эффективной проводимости среды.

Иначе происходит изменение характеристик течения при увеличении параметра  $\alpha$ , если при этом остается постоянным эффективное число Стюарта  $S^* = S / (1 + \alpha^2)$ . В этом случае при  $\alpha \rightarrow \infty$  уже не получается гидродинамического решения. Радиальная компонента трения (фиг. 5) так же, как и в предыдущем случае, возрастает при небольших значениях  $\alpha$ , причем вблизи  $\alpha = 0$  большему значению  $S^*$  соответствует меньшая сила трения, но уже при  $\alpha > 1$  имеет место обратное. Величина момента сил трения (фиг. 6), в отличие от случая фиксированных  $S$ , возрастает при увели-

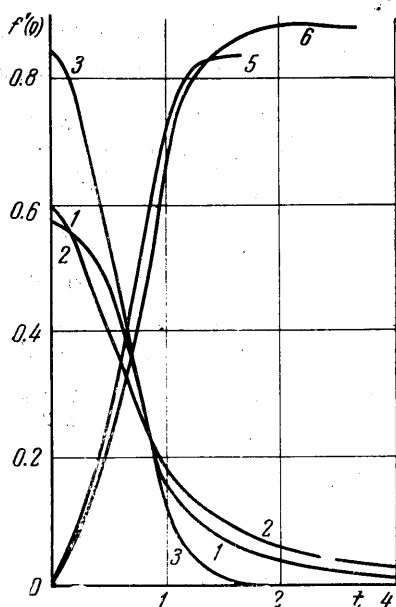
чении параметра Холла. Легко показать, что при  $\alpha = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [g'(0)]_S = \frac{\partial}{\partial \alpha} [g'(0)]_{S=0} = 0$$

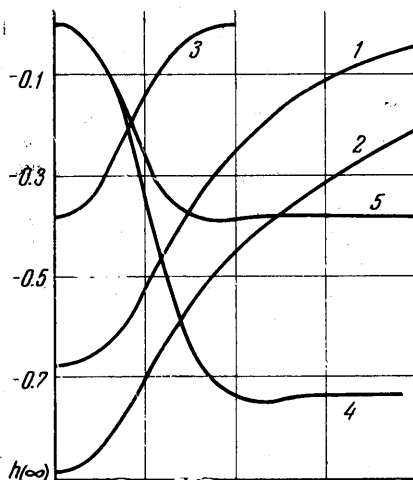
Таким образом, при очень малых значениях параметра Холла момент сил трения, по сравнению с радиальной компонентой трения и расходом, меняется медленно.

§ 3. Для исследования влияния отсоса и вдува на поверхности диска уравнения (1.5)–(1.7) решались с граничными условиями (1.8), причем  $\omega(t) = 1$ ,  $f_\infty = 0$ ,  $-4 \leq k \leq 2$ . Расчеты производились для случаев  $S = 1$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ . Результаты сравнивались с [9], где исследован случай  $S = 0$ ,  $\alpha = 0$ .

Толщина пограничного слоя сильно возрастает при увеличении интенсивности вдува и убывает при отсосе. Радиальное трение достигает максимального значения при  $k \approx 0.5$ . Момент сил трения возрастает при увеличении интенсивности отсоса и убывает при вдуве. Влияние параметра Холла становится несущественным при сильном отсосе. Расход жидкости стремится к нулю при  $k \rightarrow -\infty$ , так как почти вся жидкость, притекающая к диску, отсасывается. Эффект Холла в этом случае не влияет на течение. Наоборот, при сильном вдуве расход становится отрицательным, т. е. через диск всprysкивается больше жидкости, чем подтекает из бесконечности. Здесь эффект Холла играет существенную роль:  $h(\infty)$  уменьшается с ростом  $\alpha$ .



Фиг. 7



Фиг. 8

Исследовался также случай обдува диска перпендикулярным к его поверхности потоком ( $0 \leq f_\infty \leq 2$ ,  $k = 0$ ,  $\omega(t) = 1$ ), т. е. случай осесимметричного течения вблизи критической точки [9]. Расчеты, проводившиеся при  $S = 1$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , показали, что радиальная компонента трения увеличивается с ростом  $f_\infty$ , причем при малых значениях  $f_\infty$  большему значению  $\alpha$  соответствует большее значение  $f'(0)$ , а при больших  $f_\infty$  имеет место обратная ситуация. При указанных значениях  $S$  и  $\alpha$  эффект Холла слабо влияет на радиальное трение, если  $f_\infty \sim 1$ . Зависимость момента сил трения от  $f_\infty$  уже при  $\alpha < 0.5$  быстро приближается к ливейной:  $g'(0) = a - bf_\infty$ , причем коэффициент  $b$  уменьшается при увеличении параметра Холла.

Таким образом, обдув увеличивает радиальную компоненту трения и момент сил трения.

§ 4. Нестационарная задача при переменной скорости диска в случае мгновенного разгона и мгновенной остановки будет автомодельной и, следовательно, снова сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Более интересны неавтомодельные случаи постепенного разгона и остановки, когда соответственно

$$\omega(t) = \begin{cases} t & (t \leq 1), \\ 1 & (t > 1), \end{cases} \quad \omega(t) = \begin{cases} 1 - t & (t \leq 1) \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$

Решения этих задач были найдены путем интегрирования системы (1.5)–(1.7) с граничными условиями (1.8), в которых считалось  $k = f_\infty = 0$ . На фиг. 7, 8 приведены графики функций  $(\partial f / \partial z)_{z=0}$  и  $h(\infty, t)$  в зависимости от времени при различных значениях  $S$  и  $\alpha$  (1)  $S = 1, \alpha = 1$ ; (2)  $S = 1, \alpha = 3$ ; (3)  $S = 5, \alpha = 1$ ; (4)  $S = 5, \alpha = 3$ ; (5)  $S = 5, \alpha = 1$ . Видно, что характерное время выхода на стационарный режим сильно уменьшается при увеличении числа Стюарта; параметр Холла оказывает на эту величину гораздо меньшее влияние. Для значений  $S = 5, \alpha = 1$  построены кривые для случаев разгона и остановки, которые оказываются симметричными относительно точки пересечения.

НИИ механики МГУ

Поступило 4 VII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Шидловский В. П. Исследование движения вязкой электропроводной жидкости, вызванного вращением диска, при наличии осевого магнитного поля. Магнитная гидродинамика, 1966, № 1.
3. Kakutani T. Hydromagnetic flow due to a rotating disk. J. Phys. Soc. Japan, 1962, vol. 17, No. 9.
4. Sparrow E. M., Cess R. D. Magnetohydrodynamic flow and heat transfer about a rotating disk. Paper ASME, WA — 111, 1961.
5. Jagadeesan K. Hydromagnetic flow against a rotating disk. Bull. Inst. Polit. Jasi, 1964, vol. 10, No. 3–4.
6. King W. S., Lewellen W. S. Boundary layer similarity solutions for rotating flows with and without magnetic interaction. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 10.
7. Lewellen W. S., King W. S. The boundary layer of a conducting vortex flow over a disk with an axial magnetic field. Developm. Mech. 2, pt. 1, Pergamon Press, 1965.
8. Регирер С. А., Чекмарев И. Б. Стационарные течения анизотропно проводящей среды в полупространстве. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
9. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление вращающихся тел. Физматгиз, 1960.
10. Брайловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Кн. «Вычислительные методы и программирование», Изд. МГУ, 1962, вып. 1.
11. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя. Кн. «Численные методы в газовой динамике». Изд. МГУ, 1963, вып. 2.