

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЖИМАЕМОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. С. ЮФЕРЕВ

(Ленинград)

Известно, что действие магнитного поля на течения проводящего газа в пограничном слое может быть различным в зависимости от характера изменения электропроводности среды. Если проводимость внешнего потока равна нулю, то электромагнитные силы тормозят газ и оттесняют его от стенки. С другой стороны, если электропроводность на внешней границе превышает проводимость внутри слоя, то последний ускоряется.

До настоящего времени применительно к указанным течениям рассматривались только автомодельные решения [1-3]. В частности, в работе [1] было обнаружено, что зависимость трения и теплоотдачи от величины приложенного магнитного поля имеет гистерезисный характер, когда электропроводность на внешней границе равна нулю. Представляет интерес исследовать такое влияние магнитного поля на поведение характеристик пограничного слоя в соответствующей неавтомодельной задаче. При этом удобно воспользоваться параметрическим методом [4], который дает возможность получить систему уравнений, не зависящую от характера течения во внешнем потоке. Решение ее может быть непосредственно использовано в приближенном интегральном методе. В работе [5] этот подход был распространен на магнитогидродинамический слой несжимаемой жидкости с постоянной проводимостью.

Ниже этот метод применяется для расчета пограничного слоя сжимаемого газа с изотропной проводимостью, зависящей от температуры.

Обозначения

x, y — прямоугольные координаты X, Y — координаты Дородницына u, v — продольная и поперечная скорость p — давление ρ — плотность μ — динамическая вязкость ν — кинематическая вязкость P — число Прандтля h — энтальпия в пограничном слое h_1 — энтальпия торможения во внешнем потоке	ϕ — безразмерная полная энтальпия в пограничном слое θ — безразмерная энтальпия в пограничном слое σ — электропроводность σ^* — безразмерная электропроводность V — энергия ионизации, добавляемой присадки λ — параметр ионизации k — постоянная Больцмана
---	---

Индекс 1 внизу означает параметры адиабатически и изэнтропически заторможенного газа во внешнем потоке; индекс $^{\circ}$ сверху — характеристики внешнего потока в фиксированной точке; индекс 0 внизу — характеристики пограничного слоя в отсутствие поля (автомодельная задача); индекс T снизу — тепловые интегральные характеристики пограничного слоя; индекс ∞ — параметры внешнего потока.

B — магнитная индукция Δ^{**} — толщина потери импульса Δ^* — толщина вытеснения Δ_1 — толщина вытеснения электрического тока ζ^* — безразмерное трение f^*, g^* — динамические формпараметры Δ_T — толщина потери энергии ζ_T — безразмерная теплопередача	f_h, g_h — тепловые формпараметры ψ — функция тока Φ — безразмерная функция тока ξ — безразмерная поперечная координата D — нормирующая константа ϕ_w — энтальпия на стенке q — тепловой поток на стенке
--	---

Предполагается, что магнитное поле направлено перпендикулярно обтекаемой поверхности, электрическое поле равно нулю, газ является совершенным, магнитное число Рейнольдса малым, а вязкость линейно зависит от температуры.

$$X = \int_0^x \frac{p}{\rho_1^{\circ}} dx_1, \quad Y = \int_0^y \frac{p}{\rho_1^{\circ}} dy \quad (1)$$

уравнения пограничного слоя и граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} &= v_1^{\circ} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\sigma_1^{\circ} B^2}{\rho_{\infty}} \frac{p_1^{\circ}}{p} u_{\infty} \theta \left(\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_1^{\circ}} - \frac{\sigma u}{\sigma_1^{\circ} u_{\infty}} \right) + \theta u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} \\ u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} &= \frac{v_1^{\circ}}{P} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} - v_1^{\circ} \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \kappa \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{u}{u_{\infty}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta = (1 - \kappa)\theta + \kappa(u/u_{\infty})^2, \quad \theta = h/h_{\infty}, \quad \kappa = u_{\infty}^2/2h_1$$

$$u = v = 0, \quad \theta = \theta_w \quad \text{при } Y = 0, \quad u \rightarrow u_{\infty}, \quad \theta \rightarrow 1 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty$$

Здесь электропроводность определяется выражением

$$\frac{\sigma}{\sigma_1^{\circ}} = \left(\frac{p_1^{\circ}}{p} \right)^{1/2} [(1 - \kappa)\theta]^{3/4} \exp \left\{ -\lambda \left[\frac{1}{(1 - \kappa)\theta} - 1 \right] \right\} = \left(\frac{p_1^{\circ}}{p} \right)^{1/2} \sigma^* \quad (3)$$

$$\lambda = 1/2 V / kT_1$$

где V — энергия ионизации добавляемой в поток присадки.

Из системы (2) нетрудно получить соответствующие интегральные уравнения. Так, уравнение импульсов можно представить следующим образом:

$$\frac{dZ^*}{dX} = \frac{F^*}{u_{\infty}}, \quad Z^* = \frac{(\Delta^{**})^2}{v_1^{\circ}}, \quad F^* = 2[\zeta^* - f^*(2 + H) - g^*H_1] \quad (4)$$

$$H = \frac{\Delta^*}{\Delta^{**}}, \quad H_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta^{**}}, \quad \zeta^* = \left[\frac{\partial(u/u_{\infty})}{\partial(Y/\Delta^{**})} \right]_{Y=0} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^{\infty} \theta \left(\sigma_{\infty}^* - \sigma^* \frac{u}{u_{\infty}} \right) dY, \quad N = \frac{\sigma_1^{\circ} B^2}{\rho_{\infty}} \left(\frac{p_1^{\circ}}{p} \right)^{1/2} \\ f^* &= u_{\infty}' Z^*, \quad g^* = N Z^* \end{aligned} \quad (6)$$

Через Δ^* и Δ^{**} обозначены соответственно толщина вытеснения и толщина потери импульса. Величину Δ_1 можно назвать толщиной вытеснения электрического тока. Интегральное уравнение энергии будет выглядеть так:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{F_r}{u_{\infty}}, \quad Z = \frac{(\Delta_r)^2}{v_1^{\circ}}, \quad F_r = \frac{2}{P} (\zeta_r - f_1) \quad (7)$$

$$\zeta_r = \left[\frac{\partial v}{\partial(Y/\Delta_r)} \right]_{Y=0}, \quad \zeta = \frac{\zeta^*}{\Lambda}, \quad \Lambda = \frac{\Delta^{**}}{\Delta_r}, \quad H_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_r} \quad (8)$$

$$f_1 = u_{\infty}' Z, \quad g_1 = N Z \quad (9)$$

Здесь Δ_r — толщина потери энергии.

Решение системы уравнений (2) определяется видом функций $u_{\infty}(X)$ и $N(X)$. Предположим, что последние можно представить в некоторой

области рядом Тейлора

$$u_{\infty}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, \quad N(X) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \quad (10)$$

Тогда это решение возможно выразить таким образом:

$$\psi = \psi(X, Y, a_k, b_k), \quad \vartheta = \vartheta(X, Y, a_k, b_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

где ψ — функция тока.

Если рассматривать (11) как общее решение системы уравнений (2) для всех допустимых функций $u_{\infty}(X)$ и $N(X)$, то переменные X и Y и коэффициенты a_k и b_k становятся равноправными. Поэтому их можно сгруппировать между собой так, что ψ и ϑ станут функциями от бесконечной последовательности новых независимых переменных.

Основная идея параметрического метода состоит в том, что вместо переменных, связанных с продольной координатой X , вводятся новые переменные — формпараметры, построенные по характерной толщине пограничного слоя. В данной задаче имеются две характерные толщины — толщина потери импульса и толщина потери энергии; соответственно можно получить и два ряда формпараметров. Однако численное интегрирование однопараметрического уравнения показало, что использование динамических параметров, основанных на толщине потери импульса, не всегда удобно, так как зависимость от них характеристик пограничного слоя оказывается в некоторых случаях неоднозначной. Поэтому воспользуемся толщиной потери энергии и введем следующие последовательности формпараметров:

$$f_k = u_{\infty}^{k-1} u_{\infty}^{(k)} Z^k, \quad f_0 = \kappa = u_{\infty}^2 / 2h_1, \quad g_k = u_{\infty}^{k-1} N^{(k-1)} Z^k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (12)$$

Теперь решение системы (2) можно записать в виде

$$\psi = u_{\infty} \Delta \tau D^{-1} \Phi(\xi, f_k, g_k), \quad \vartheta = \vartheta(\xi, f_k, g_k), \quad \xi = DY / \Delta \tau \quad (13)$$

где D — нормирующая константа.

Подставляя (13) в (2) и используя (7), (8), (9), получим универсальное уравнение плоского ламинарного пограничного слоя электропроводного газа в поперечном магнитном поле

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{f_1}{D} \left[\vartheta - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \frac{F_{\tau} - 2f_1}{2D^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{g_1}{D^2} \vartheta \left[\sigma_{\infty}^* - \sigma^* \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] = \\ & = \frac{1}{D^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial g_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial g_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + P \frac{F_{\tau} + 2f_1}{2D^2} \Phi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + 2(P-1)f_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) =$$

$$= \frac{P}{D^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial g_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial g_k} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) \right]$$

$$\Phi = \Phi' = 0, \quad \vartheta = \vartheta_w = \vartheta_w \quad \text{при } \xi = 0$$

$$\Phi' \rightarrow 1, \quad \vartheta \rightarrow 1 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_k &= [(k-1)f_1 + kF_{\tau}]f_k + f_{k+1}, & \alpha_0 &= 2f_0 f_1 \\ \beta_k &= [(k-1)f_1 + kF_{\tau}]g_k + g_{k+1} \end{aligned} \quad (15)$$

Константа D в системе (14) выбирается таким образом, чтобы при $f_k = g_k = 0$ ($k \geq 1$) последняя совпадала с автомодельной системой уравнений для пластинки

$$\Phi_0''' + \Phi_0 \Phi_0'' = 0, \quad \vartheta_0'' + P \Phi_0 \vartheta_0' + 2(P-1)\kappa(\Phi_0' \Phi_0'')' = 0 \quad (16)$$

Отсюда следует, что

$$D^2 = P^{-1}[\zeta_\tau]_0$$

Решение уравнений (16) используется как дополнительное граничное условие для системы (14), когда все формпараметры f_k и g_k ($k \geq 1$) равны нулю. Такая форма условия означает, что в пограничном слое в некотором сечении имеется однородный профиль скорости и температуры.

Уравнения (14) не зависят от распределения скорости внешнего потока и приложенного магнитного поля, но, в отличие от пограничного слоя несжимаемой жидкости, содержат некоторые характеристики конкретного потока — число Прандтля P , температурный фактор ϑ_w и параметр ионизации λ . Для каждого набора значений этих величин решение системы (14) будет общим для произвольных функций $u_\infty(X)$ и $N(X)$. Бесконечную сумму в правых частях (14) необходимо понимать как предел при неограниченном увеличении числа формпараметров или, что то же самое, числа членов в разложениях (10). Если эта сумма конечна, то система (14) описывает более узкий класс течений в пограничном слое, когда u_∞ и N представлены многочленами той или иной степени.

Для перехода к физической переменной X , то-есть для решения конкретной задачи, необходимо, учитывая (12), проинтегрировать уравнение энергии (7). Это свойство решения универсальной системы уравнений (14) дает возможность использовать его непосредственно в интегральном методе, который в общем случае уже будет многопараметрическим. Причем опыт интегрирования уравнений пограничного слоя позволяет предполагать, что уже первые формпараметры обеспечат вполне удовлетворительные результаты.

Пусть

$$g_1 \neq 0, \quad f_0 = \kappa = \text{const}, \quad f_k = g_k = 0 \quad (17)$$

Такая задача соответствует внешнему потоку, в котором

$$u_\infty = \text{const}, \quad h_\infty = \text{const}, \quad N = \text{const} \quad (18)$$

Можно показать, что при этих условиях магнитное поле удовлетворяет выражению

$$\frac{\sigma_1^\circ B^2}{\rho_\infty^\circ} = N(1-\kappa)^{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 + \sigma_\infty^* \frac{2\gamma}{\gamma-1} (1-\kappa)^{\gamma-1} \kappa \frac{Nx}{u_\infty} \right]^{-\gamma/2} \quad (19)$$

Если проводимость внешнего потока равна нулю $\sigma_\infty^* = 0$, то поле (19) становится однородным.

Теперь система (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F_\tau}{2D^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{g_1}{D^2} \theta \left[\sigma_\infty^* - \sigma^* \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] &= \frac{F_\tau}{D^2} g_1 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial g_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial g_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + P \frac{F_\tau}{2D^2} \Phi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + 2(P-1) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right] &= \\ &= P \frac{F_\tau}{D^2} g_1 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial g_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial g_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

$$\Phi = \Phi' = 0, \quad \vartheta = \vartheta_w = \theta_w \quad \text{при} \quad \xi = 0$$

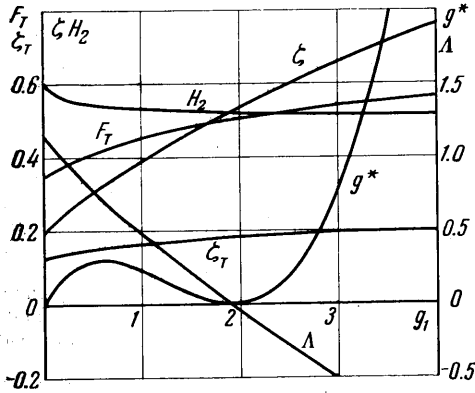
$$\Phi' \rightarrow 1, \quad \vartheta \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi), \quad \vartheta = \vartheta_0(\xi) \quad \text{при} \quad g_1 = 0$$

где Φ_0 и ϑ_0 — автомодельные решения уравнений (16).

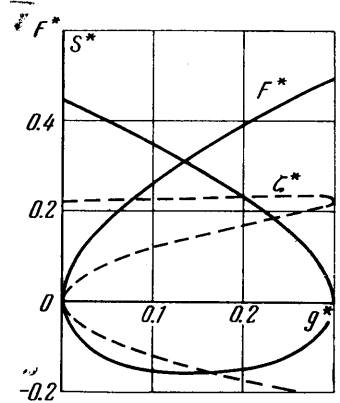
Система (20) была численно проинтегрирована на электронно-вычислительной машине БЭСМ-3М для двух вариантов

$$\begin{aligned} (1) \quad & \kappa = 0.2, \quad \vartheta_w = 0.25, \quad \lambda = 7.5, \quad P = 0.72, \quad \gamma = 1.4 \\ (2) \quad & \kappa = 0.93, \quad \vartheta_w = 0.4, \quad \lambda = 6.0, \quad P = 0.72, \quad \gamma = 1.4 \end{aligned} \quad (21)$$



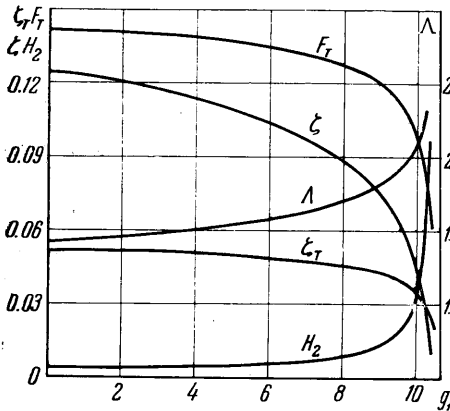
Фиг. 1

Значения параметров, принятых при вычислениях $\kappa = 0.2, \vartheta_w = 0.25, \lambda = 7.5$

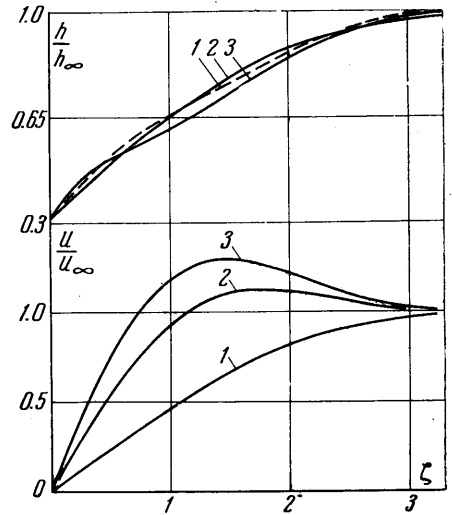


Фиг. 2

В первом случае проводимость внутри слоя меньше, чем на его внешней границе, во втором — электропроводность внешнего потока практически равна нулю. Промежуток интегрирования по ζ был выбран равным 10 при шаге $\Delta\zeta = 0.05$. Шаг Δg_1 в первом варианте был равен $\Delta g_1 = 0.0015$, во втором — изменялся от $\Delta g_1 = 2^{-7}$ в начале счета до 2^{-16} в конце.



Фиг. 3. Значения параметров, принятых при вычислениях $\kappa = 0.93, \vartheta_w = 0.4, \lambda = 6.0$



Фиг. 4. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $g_1 = 0, 2.0, 4.0$

Найденные таким образом основные характеристики пограничного слоя представлены на фиг. 1—3, а профили скорости и температуры для различных значений g_1 — на фиг. 4—5. В первом случае газ ускоряется, профили

скорости (фиг. 4) становятся не монотонными, а отношение толщины потери импульса к толщине потери энергии (величина Λ) уменьшается. Во втором случае, наоборот, газ тормозится, и толщина пограничного слоя возрастает, причем последний процесс в основном имеет место в узком диапазоне значений g_1 и происходит настолько быстро, что делает необходимым сильное дробление шага интегрирования Δg_1 . Для первого варианта на фиг. 1 показана также зависимость динамического формпараметра g^* (6), построенного по толщине потери импульса, от теплового формпараметра g_1 . Вследствие ускорения газа эта зависимость будет немонотонной, что делает характеристики пограничного слоя неоднозначными функциями от g^* (фиг. 2). Поэтому использование этого формпараметра в интегральном методе становится невозможным.

Когда проводимость внешнего потока равна нулю, такого явления не наблюдается. Однако, как указывалось выше, в этом случае имеется узкий диапазон значений g_1 , в котором трение и теплоотдача (величины ξ_r, ξ) резко стремятся к нулю, а суммарная плотность тока, выражаемая величиной N_2 , быстро возрастает (фиг. 3). При этом максимум температуры в сечении слоя перемещается вверх от обтекаемой поверхности. Последнее приводит к тому, что тормозящее действие магнитного поля на некотором расстоянии от стенки становится значительно больше, чем в непосредственной близости от нее, в результате чего в профиле скорости появляется характерный провал (фиг. 5). Когда в таком провале скорость достигнет нуля, возможно резкое падение трения и теплоотдачи. Однако этого состояния при наших вычислениях достигнуть не удалось, так как толщина пограничного слоя стала больше выбранного промежутка интегрирования.

Как указывалось выше, найденные решения справедливы, когда $u_\infty = \text{const}$, а $B(x)$ задано выражением (19). Однако они могут быть использованы в интегральном методе для отыскания приближенных решений при произвольном магнитном поле ($u_\infty = \text{const}$ по-прежнему). Для этого надо проинтегрировать уравнение энергии (7), которое теперь принимает следующий вид:

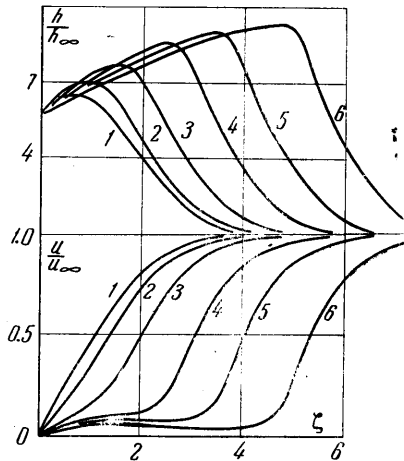
$$dZ / dX = F_T(NZ) / u_\infty \tag{22}$$

Функция $F_T(NZ)$ берется здесь из решения системы (20).

Рассмотрим, например, однородное магнитное поле $B = \text{const}$. Тогда из уравнений для внешнего потока нетрудно найти выражение для N

$$N = \frac{\sigma_1^\circ B^2}{\rho_\infty^\circ} \omega^3 [1 - 3\delta \omega m x]^{-5/3}$$

$$\omega = (1 - \kappa)^{-1/2 \gamma (\gamma - 1)}, \quad m = \frac{\sigma_1^\circ B^2}{\rho_\infty^\circ u_\infty}, \quad \delta = \sigma_\infty^* \frac{\kappa}{1 - \kappa} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tag{23}$$



Фиг. 5. Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям $g_1 = 0, 8.01, 10.01, 10.30, 10.35, 10.37$

Полагая, что $g_1 = 0$ при $x = 0$, и учитывая (23), решение уравнения (22) можно записать в виде

$$mx = \frac{1}{3\delta\omega} \{1 - \exp[-3\delta G(g)]\}, \quad \left(G(g) = \int_0^{g_1} \frac{dg_1}{F_\tau + 5\delta g_1}\right) \quad (24)$$

При этом сравнение (23) с (19) и (18) показывает, что в первом случае решение будет приближенным, а во втором — точным, так как при $\sigma_\infty^* = 0$ величина N в (23) становится постоянной.

Отношение трения и теплового потока на стенке к соответствующим величинам в пограничном слое на пластине в отсутствие магнитного поля будет иметь вид

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\Delta\tau_0}{\Delta\tau} \frac{\rho_w}{\rho_{w0}} \frac{\zeta}{\zeta_0}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{\Delta\tau_0}{\Delta\tau} \frac{\rho_w}{\rho_{w0}} \frac{\zeta_\tau}{\zeta_{\tau_0}}$$

$$\frac{\Delta\tau_0}{\Delta\tau} = \left(\frac{NZ\tau_0}{g_1}\right)^{1/2} = \quad (25)$$

$$= F_{\tau_0}^{1/2} \omega^{1/2} \left(\frac{mx}{g_1}\right)^{1/2} \exp[5/2 \delta G(g)]$$

$$\frac{\rho_w}{\rho_{w0}} = \frac{p}{p_0} = \exp\{-2\delta G(g)\}$$

а индекс 0 снизу обозначает характеристики слоя в отсутствие поля.

Результаты расчетов представлены на фиг. 6 (кривые a относятся к первому варианту, кривые b — ко второму).

Падение теплоотдачи во втором варианте объясняется торможением газа в слое и соответствующим уменьшением конвективного переноса энтальпии.

В заключение необходимо отметить, что быстрый рост пограничного слоя, который имеет место, когда проводимость внешнего потока равна нулю, указывает на необходимость учета взаимодействия основного потока и пограничного слоя. Более того, основные предпосылки теории пограничного слоя в данном случае могут оказаться несправедливыми.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Bush W. B. C. Compressible flat-plate boundary-layer flow with an applied magnetic field. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, No. 1, p. 49. (русск. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1960, т. 64, № 6, стр. 89).
2. Bush W. B. The stagnation — Point boundary eayer in the Presence of an Applied Magnetic Field. J. Aerospace Sci., 1961, vol. 28, No. 8, p. 610.
3. Смыслов Ю. Н., Чекмарев И. Б. Магнитогидродинамический пограничный слой на пластине, обтекаемой высокотемпературным потоком при наличии длува паров легкоионизирующей присалки. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 4, стр. 630.
4. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, стр. 70.
5. Юферев В. С. Параметрический метод расчета ламинарного пограничного слоя в магнитной гидродинамике. Магнитная гидродинамика, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 85.
6. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.