

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА К СЛУЧАЮ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

В. С. ГАЛКИН

(Москва)

Интересным свойством течений бинарной смеси нейтральных газов, отношение масс молекул которых $\varepsilon = m/M \ll 1$, является то, что в пределах применимости механики сплошной среды компоненты смеси могут иметь различные температуры. Процесс установления максвелловского равновесного состояния в такой смеси разделяется на несколько этапов, характеризующихся различными по порядку величины временами релаксации τ_i : сначала приходит в равновесное состояние легкая компонента, затем тяжелая, после чего происходит установление равновесия между компонентами [1].

В простейшем случае¹ времена релаксации отличаются друг от друга в $\sqrt{\varepsilon}$ раз.

При этом время релаксации разности температур компонентов смеси $\tau_r \approx \tau/\varepsilon$, где τ — время релаксации легкой компоненты. Если $\tau \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$ так, чтобы $\tau_r \sim 1$, то на характерном гидродинамическом масштабе времени $t \sim 1$ относительная разность температур будет порядка единицы. При отсутствии сильных внешних силовых полей разность скоростей компонент пренебрежимо мала, ибо ее время релаксации $\tau_v \approx \tau_r \varepsilon \ll 1$.

В случае полностью ионизованной плазмы метод Чепмена — Энскага довольно просто распространяется на случай двухтемпературной смеси [3], так как используется интеграл столкновений Ландау, который непосредственно разлагается по ε . В перекрестном интеграле столкновений Больцмана величина ε входит в формулы, связывающие скорости до и после столкновения, что затрудняет разложение этого интеграла по ε , необходимое при вычислении релаксационных членов в уравнениях для температур, отличных от нуля в приближении Эйлера [4] (коэффициенты переноса вычисляются значительно проще, так как для их определения достаточно учитывать лишь нулевые (лорентцовы [5]) члены разложения перекрестных интегралов столкновений по ε). Это привело к тому, что в работе [4] для получения уравнений сплошной среды рассматриваемой смеси использовалось специально «сконструированное» модельное кинетическое уравнение (типа Бхатнагара — Крука), имеющее неопределенную степень точности.

Ниже при помощи уравнений Больцмана получены уравнения движения двухтемпературной бинарной смеси газов в приближении, аналогичном приближению Навье — Стокса (для краткости это приближение будет называться приближением Навье — Стокса), определены коэффициенты переноса и релаксационные члены уравнений для температур. Аналогично можно получить уравнения в приближении Барнетта и т. д., однако этот вывод практически нецелесообразен.

За исключением температур (T_1, T_2 — температуры легкого и тяжелого газового соответственно, выраженные в энергетических единицах), величины, относящиеся к тяжелому и легкому газам, будем обозначать через соответствующие большие и малые символы: F, f — функции распределения; $R = MN, \rho = mn$ — массовые плотности; $P = NT_2, p = nT_1$ — скалярные давления; P_{ij}, p_{ij} — напряжения; Q_i, q_i — тепловые потоки; C, c — собственные скорости, вычисляемые относительно средней скорости тяжелой компоненты

$$V_i = \frac{1}{N} \int F \xi_i dC \quad (1)$$

¹ В случае максвелловских молекул с одинаковыми по порядку величины коэффициентами в законах зависимостей межмолекулярных сил от расстояния κ_{ij} и парциальными численными плотностями n, N (последнее предполагается справедливым всюду ниже), формулы для τ_i при различных законах межмолекулярных сил приведены в работе [2].

Здесь ξ — абсолютная скорость тяжелой молекулы, так что

$$\int FCdC = 0, \quad nv = \int fcdC \neq 0 \quad (2)$$

$$W_i = \left(\frac{M}{2T_2}\right)^{1/2} C_i, \quad w_i = \left(\frac{m}{2T_1}\right)^{1/2} c_i$$

$$NF^* = \left(\frac{2T_2}{M}\right)^{3/2} F_i, \quad nf^* = \left(\frac{2T_1}{m}\right)^{3/2} f \quad (3)$$

Отметим, что обычно [5] собственные скорости молекул вычисляются относительно среднемассовой скорости, которая в данном случае отличается от V величиной $\Delta \ll \sqrt{\epsilon}$, поэтому в нулевом приближении эти скорости равны.

Запишем уравнения Больцмана в виде

$$\frac{dF}{dt} - \Sigma = J_{FF}, \quad \frac{df}{dt} - \sigma = J_{ff} + I \quad (4)$$

$$\Sigma = J_{Ff}, \quad \sigma = J_{fF} - I, \quad I = N \int (f' - f) cbdbde$$

Здесь использованы обозначения из монографии [5], I — нулевое по ϵ (лорентцово [5]) значение перекрестного интеграла столкновений J_{fF} , аналогичный интеграл в уравнении для F равен нулю в силу закона сохранения числа частиц. В правые части уравнений для F , f входят величины порядка $1/\tau_i \gg 1$. Если $\epsilon \ll 1$ так, чтобы $\epsilon/\tau_{fF} \sim 1$, то (как показано ниже) члены левых частей — порядка единицы. Именно в таком «предельном» смысле ниже понимаются величины Σ , σ . При указанных условиях в первом (по Чепмену — Энскогу) приближении с учетом произвольности N решениями уравнений (4) будут максвелловские функции с разными температурами

$$F_0^* = \pi^{-3/2} e^{-W^2}, \quad f_0^* = \pi^{-3/2} e^{-w^2} \quad (5)$$

Для использования в дальнейшем обычным способом из уравнений (4) с учетом (1), (2) получаем систему уравнений движения смеси газов

$$\frac{DN}{Dt} + N \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial nv_i}{\partial x_i} = 0$$

$$R \frac{DV_i}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \Phi_i, \quad \Phi_i = M \int C_i \Sigma dC \quad (6)$$

$$\frac{3}{2} N \frac{DT_2}{Dt} + (P\delta_{ij} + P_{ij}) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = E, \quad E = \frac{M}{2} \int \Sigma C^2 dC$$

$$\frac{3}{2} n \frac{DT_1}{Dt} + (p\delta_{ij} + p_{ij}) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{3}{2} T_1 \frac{\partial nv_i}{\partial x_i} = -E$$

В левой части последнего уравнения опущен член $\rho v_i DV_i / Dt$, пренебрежимо малый в используемом ниже приближении (в работе [4] неправильно опущен также последний член левой части этого уравнения). Система уравнений (6) отличается от аналогичной системы для однотемпературной бинарной смеси структурой уравнений, вместо уравнения энергии здесь имеются два уравнения для температур с релаксационными членами $E \sim 1$.

В первом (эйлеровском) приближении $\Phi_i(f_0, F_0) = 0$, интеграл

$$E = \frac{M}{2} \int_0^\infty f_0 F_0 (C'^2 - C^2) g_{12} b d b d e d e d C = \quad (7)$$

$$= 16\pi^{1/2} (T_1 - T_2) \frac{nN\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \eta^4 \Phi_{12}^{(4)} \left[(1 + \varepsilon T)^{1/2} \left(\frac{2T_1}{m} \right)^{1/2} \eta \right] d\eta$$

Здесь $\Phi_{12}^{(4)}$ — функция аргумента в квадратных скобках, используемые ниже функции $\Phi_{ij}^{(4)}(g_{ij})$ и величины $\Omega_{ij}^{(4)}(r)$ имеют тот же смысл, что и в монографии [5]. Если сила отталкивания между молекулами равна $\kappa_{12}r^{-\nu}$, то

$$\Phi_{12}^{(4)} = A_1(\nu) \left[\frac{\kappa_{12}}{m} (1 + \varepsilon) \right]^{\chi_1} \left[\frac{2T_1}{m} \eta (1 + \varepsilon T) \right]^{\chi_2}, \quad (8)$$

$$\chi_1 = \frac{2}{\nu - 1} \quad \chi_2 = \frac{\nu - 5}{2(\nu - 1)}, \quad T = \frac{T_2}{T_1}$$

Представим величину E в виде

$$E = E_0(1 + \varepsilon E_1 + \varepsilon E_2) \quad (9)$$

Здесь E_2 определяется вторым (навье-стоксовским) приближением; E_0 , E_1 находятся путем разложения интеграла (7) по ε

$$E_0 = 16nN(T_1 - T_2) \varepsilon \Omega_{12}^{(4)}(1),$$

$$\Omega_{12}^{(4)}(r) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \eta^{2r+2} \Phi_{12}^{(4)}(\eta) |_{\varepsilon=0} d\eta \quad (10)$$

$$E_1 = -2 + \frac{1}{\Omega_{12}^{(4)}(1)} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \eta^4 \frac{\partial \Phi_{12}^{(4)}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} d\eta$$

Отсюда в случае (8) получаем

$$E_0 = 8\varepsilon nN(T_1 - T_2) \pi^{1/2} A_1(\nu) \left(\frac{\kappa_{12}}{m} \right)^{\chi_1} \left(\frac{2T_1}{m} \right)^{\chi_2} \Gamma\left(\frac{3\nu - 5}{\nu - 1} \right)$$

$$E_1 = (\nu - 1)^{-1} [4 - 2\nu + 1/2(\nu - 5)T]$$

Из формул (10) вытекает условие, при котором компоненты смеси могут иметь разные температуры

$$E_0 / NT_2 \sim 1, \quad \text{или} \quad n\varepsilon \Omega_{12}^{(4)}(1) \sim 1 \quad (11)$$

Последнее условие легко выразить через обычные для аэродинамики параметры газа (см. также [4], характерное время течения $t \sim 1$). С учетом (10), (11) из уравнений (6) получаем уравнения первого приближения

$$\frac{D \ln n}{Dt} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad \frac{D \ln N}{Dt} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad R \frac{DV_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

$$\frac{3}{2} \frac{D \ln T_2}{Dt} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{E_0}{NT_2}, \quad \frac{3}{2} \frac{D \ln T_1}{Dt} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \frac{E_0}{nT_1} \quad (12)$$

Подставляя в левые части уравнений Больцмана (4) функции (5) и исключая полные производные $\dot{D}(\dots)/Dt$ при помощи (12), получим сле-

дующие выражения для них:

$$F_0 \left\{ \left(W^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \frac{\partial \ln T_2}{\partial x_i} + 2[W] \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{E_0}{NT_2} \left(\frac{2}{3} W^2 - 1 \right) \right\} - \Sigma_0 \quad (13)$$

$$f_0 \left\{ \left(w^2 - \frac{5}{2} \right) c_i \frac{\partial \ln T_1}{\partial x_i} + 2[w] \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{E_0}{nT_1} \left(1 - \frac{2}{3} w^2 \right) + c_i \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} \right\} - \sigma_0 \quad (14)$$

$$[w] = w_i w_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} w^2, \quad \Sigma_0 = \Sigma(f_0, F_0), \quad \sigma_0 = \sigma(f_0, F_0)$$

Задачи определения переносных свойств легкого и тяжелого газов разделяются. Напряжения и тепловые потоки тяжелого газа те же, что и у такого же однокомпонентного газа. Обозначим второе приближение к f через $f_0\varphi$. Из выражения (14) следует, что

$$\varphi = -A \frac{c_i}{n} \frac{\partial \ln T_1}{\partial x_i} - B \frac{[w]}{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - D \frac{c_i}{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} + K \quad (15)$$

Коэффициенты A, B, D, K зависят от $w, T_1, N/n$. Уравнения для первых трех коэффициентов решаются тем же способом, что и для однокомпонентного газа, причем вторые члены правых частей уравнений интегрируются так же, как и в случае лорентцова газа [5]. Например, уравнение для A приобретает вид

$$f_0^* c_i \left(w^2 - \frac{5}{2} \right) = \int f_0^* f_{01}^* \{A c_i\} g b d b d \varepsilon d w_1 + 2 \pi \frac{N}{n} f_0^* \Phi_{12}^{(4)} A c_i \quad (16)$$

Здесь и ниже $\{H\} = H_1 + H - H_1' - H'$.

Уравнение для D получается из (16) заменой $w^2 - 5/2$ на 1 и A — на D . В отличие от обычного случая бинарной смеси, здесь имеются лишь два (вместо трех) условия разрешимости

$$\int f_0 \varphi d c = 0, \quad \int f_0 \varphi c^2 d c = 0 \quad (17)$$

Этим условиям первые три члена φ удовлетворяют тождественно.

Вследствие быстрой сходимости рядов по полиномам Сонина [5] ограничимся следующим приближением для A, D , позволяющим с хорошей точностью вычислить коэффициенты теплопроводности, диффузии и термодиффузии:

$$A = a_0 + a_1 S_{3/2}^{(4)}(w^2), \quad D = d_0 + d_1 S_{3/2}^{(4)}(w^2) \quad (18)$$

Используя приближение (18) в уравнениях для A, D , получим

$$a_1 = -\frac{15}{16} \left\{ \Omega_{11}^{(2)}(2) + 2 \frac{N}{n} \frac{1}{\Omega_{12}^{(4)}(1)} [\Omega_{12}^{(4)}(1) \Omega_{12}^{(4)}(3) - \Omega_{12}^{(4)}(2)^2] \right\}^{-1}$$

$$a_0 = -^{5/2} d_1, \quad d_1 = a_1 [1 - ^{2/5} \Omega_{12}^{(4)}(2) / \Omega_{12}^{(4)}(1)] \quad (19)$$

$$d_0 = ^{1/10} a_1 [\Omega_{12}^{(4)}(1)]^{-1} [20 \Omega_{12}^{(4)}(2) - 25 \Omega_{12}^{(4)}(1) - 4 \Omega_{12}^{(4)}(3) - 2nN^{-1} \Omega_{11}^{(2)}(2)]$$

После этого легко определяются выражения для скорости легкой компоненты и ее теплового потока

$$v_i = -D_{12} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x_i} + k_r \frac{\partial \ln T_1}{\partial x_i} \right), \quad q_i = n T_1 v_i \left(\frac{5}{2} + k_r \right) - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x_i}$$

$$D_{12} = \frac{d_0}{\rho} T_1, \quad \lambda = -\frac{5}{2m} T_1 (a_1 - k_r d_1), \quad k_r = \frac{a_0}{d_0} \quad (20)$$

Решение уравнения для B ищется в виде ряда

$$B(w) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r S_{1/2}^{(r-1)}(w^2)$$

В первом приближении коэффициент b_1 , которому пропорционален коэффициент вязкости μ , равен

$$b_1 = 5/4 [\Omega_{11}^{(2)}(2) + 2(N/n)\Omega_{12}^{(2)}(2)]^{-1}, \quad \mu = b_1 T_1 / 2 \quad (21)$$

В случае максвелловских молекул полученные приближенные решения для коэффициентов переноса (19) — (21) будут точными, $k_r = 0$.

С учетом условий (17) будем искать решение уравнения

$$f_0 \frac{E_0^*}{nT_1} \left(1 - \frac{2}{3} w^2 \right) - \sigma_0 = \int f_0 f_{01} \{K\} g b d b d \epsilon d c_1 \quad (22)$$

в виде ряда

$$K = 16\varepsilon \frac{N}{n} (1 - T) \sum_{q=2}^{\infty} k_q S_{1/2}^{(q)}(w^2), \quad T = \frac{T_2}{T_1} \quad (23)$$

Умножая (22) на $S_{1/2}^{(p)}$ (где $p \geq 2$) и интегрируя, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$\beta_p = \alpha_{pq} k_q, \quad \beta_p = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} (r + 3/2)^{p-r}}{(r-1)! (p-r)!} \Omega_{12}^{(1)}(r) \quad (24)$$

$$(r + 3/2)^{p-r} = (r + 3/2)(r + 5/2) \dots (p + 1/2), \quad (r + 3/2)_0 = 1$$

$$\beta_2 = 5/2 \Omega_{12}^{(1)}(1) - \Omega_{12}^{(1)}(2), \quad 2\beta_3 = 35/4 \Omega_{12}^{(1)}(1) - 7\Omega_{12}^{(1)}(2) + \Omega_{12}^{(1)}(3)$$

$$\alpha_{22} = 2\Omega_{11}^{(2)}(2), \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = 7/2 \Omega_{11}^{(2)}(2) - \Omega_{11}^{(2)}(3) \quad (25)$$

$$2\alpha_{33} = 63/4 \Omega_{11}^{(2)}(2) - 7\Omega_{11}^{(2)}(3) + \Omega_{11}^{(2)}(4)$$

Величины Ω определены формулой (10). Правая часть системы уравнений (24) имеет обычный для метода Чепмена — Энскога вид (диагональный в случае максвелловских молекул). При вычислении β_p (и при проведенном ниже вычислении E_2) из интегралов от σ_0 выделяется главная по ε часть (отметим, что в данном приближении второй член выражения для σ_0 обращается в нуль), полиномы Сонина вычисляются как соответствующие члены разложения производящей функции [5].

По известным k_q вычисляется величина E_2 , входящая в формулу (9) (остальные члены Φ не дают вклада в E_2)

$$E_2 = \frac{N}{n} \frac{16}{\Omega_{12}^{(1)}(1)} \sum_{q=2} k_q I_q, \quad I_q = (1 - T) \frac{(-1)^q}{q!} \Omega_{12}^{(1)}(1 + q) + \\ + \sum_{r=0} \frac{(-1)^r \Omega_{12}^{(1)}(1 + r)}{r!(q - r - 1)!} \left[\frac{1 - T}{q - r} \left(r + \frac{5}{2} \right)_{q-r} - \left(r + \frac{5}{2} \right)_{q-r-1} \right] \quad (26)$$

$$8I_2 = 4(1 - T)\Omega_{12}^{(1)}(3) + 4(7T - 5)\Omega_{12}^{(1)}(2) + 5(3 - 7T)\Omega_{12}^{(1)}(1)$$

Можно показать, что в случае максвелловских молекул $k_q \sim \varepsilon^{q-1}$, и, следовательно, в рассматриваемом приближении по ε величина $E_2 = 0$. Рассмотрение другого предельного случая — случая упругих сфер — позволяет ответить на вопрос о сходимости полученного решения. Ограничи-

ваясь двумя членами ряда, с учетом соотношений (24), (25) получим

$$k_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_{22}} - \frac{\alpha_{23}(\beta_2\alpha_{23} - \beta_3\alpha_{22})}{\alpha_{22}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2)}, \quad k_3 = \frac{\alpha_{22}\beta_3 - \alpha_{23}\beta_2}{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}$$

где первый член в формуле для k_2 будет первым приближением (обозначим его через $k_{2,1}$). В случае упругих сфер

$$k_2/k_{2,1} - 1 = {}^1/_{15}, \quad k_3/k_2 = {}^4/_{15}, \quad k_3I_3/k_2I_2 < {}^2/_{15}$$

В случае реальных потенциалов ряды будут сходиться быстрее, и можно будет ограничиться первым приближением

$$E_2 \approx 8Nn^{-1}I_2[\Omega_{11}^{(2)}(2)\Omega_{12}^{(4)}(1)]^{-1}[\frac{5}{2}\Omega_{12}^{(4)}(1) - \Omega_{12}^{(4)}(2)] \quad (27)$$

Аналогичные вычисления для тяжелой компоненты показывают, что ее вклад в E_2 пренебрежимо мал по сравнению со вкладом легкой компоненты (27): их отношение

$$\delta < \epsilon\Omega_{11}^{(2)}(2) / \Omega_{22}^{(2)}(2) \ll 1$$

Остается рассчитать интеграл Φ_i в уравнении импульса тяжелой компоненты. Это легко сделать, подставляя в интеграл вторые приближения для f , F и выделяя из него нулевую по ϵ часть. Однако тот же результат можно получить следующим «окольным» путем, используя уравнение для суммарного импульса смеси, получаемого обычным способом из уравнений Больцмана [5], и учитывая, что среднemasовая скорость и полный тензор напряжений смеси отличаются соответственно от скорости и тензора напряжений тяжелой компоненты величиной порядка $\sqrt{\epsilon}$ (оценку для напряжений легко сделать с помощью приведенных выше формул). Пренебрегая в этом уравнении членами порядка $\sqrt{\epsilon}$ и выше, получим, что искомое уравнение импульса в приближении Навье — Стокса имеет следующий вид

$$R \frac{DV_i}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}(p + P) + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (28)$$

Здесь тензор напряжений тяжелой компоненты P_{ij} дается обычной «навье-стоксовской» формулой. Отметим, что к виду (28) приводится и соответствующее уравнение из работы [4], если пренебречь непропорционально удерживаемым там слагаемым порядка ϵ в выражении для скорости легкой компоненты относительно тяжелой v . Тогда это выражение приводится к нашему выражению для v (первая из формул (20)) при $k_T = 0$, т. е. при условии, что молекулы максвелловские, когда термодиффузия отсутствует (в работе [4] молекулы предполагались максвелловскими).

Если пренебречь термодиффузией, то $v_i \sim \partial p / \partial x_i$, т. е. диффузия определяется только градиентом давления легкой компоненты. Такой же результат следует из общей формулы для диффузионной скорости в бинарной однотемпературной смеси [5] при $\epsilon \rightarrow 0$.

Когда работа находилась уже в печати, автор познакомился с работой [6], где метод, близкий использованному выше, применен к случаю частично ионизованной плазмы, однако не решалось уравнение для скалярной поправки к функции распределения, аналогичное (22), не рассматривалась поправка E_2 , не доведено до конца вычисление коэффициентов переноса легкой компоненты.

Поступило 28 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Theory of rarefied gases. In: Rarefied Gas Dynamics Proc. 1-st Int. Symp., Nice. Ed. F. Devienne, London, Pergamon Press, 1960, p. 100—138.
2. Morse T. F. Energy and momentum exchange between nonequilibrium gases. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 10.
3. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Госатомиздат, 1963, стр. 183—272.
4. Hamel B. Two-fluid hydrodynamic equations for a neutral, disparate — mass, binary mixture. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 1, p. 12—22.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
6. Chmieleski R. M., Ferziger J. H. Transport Properties of a Nonequilibrium Partially Ionized Gas. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2, p. 364—371.