

## ТЕЧЕНИЕ ВОЗДУХА ЗА ФРОНТОМ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ НЕРАВНОВЕСНОЙ ИОНИЗАЦИИ И ИЗЛУЧЕНИЯ

Л. М. БИБЕРМАН, В. С. ВОРОБЬЕВ, А. Н. ЛАГАРЬКОВ, В. П. СТУЛОВ,  
Г. Ф. ТЕЛЕНИН, Е. Г. ШАПИРО, И. Т. ЯКУБОВ

(Москва)

Рассматривается состояние газа за фронтом ударной волны в воздухе со скоростью  $v \geq 10$  км/сек. Учитываются неравновесная ионизация и перенос излучения. Принят во внимание реальный спектр воздуха — многочисленные линии, полосы и континуумы. Учет излучения приводит к интегродифференциальной системе уравнений, метод решения которой разработан. В результате получены профили параметров газа за фронтом волны, обусловленные релаксационными процессами и радиационным охлаждением. Расчеты проводились для  $v = 10-16$  км/сек и давлении перед фронтом  $p = 10^{-5}-10^{-2}$  атм.

Для того чтобы получить близкие к действительности результаты, рассматривался лишь слой газа, ограниченный фронтом волны и параллельной ему плоскостью. Предполагалось, что ограниченный этими плоскостями газ, не облучается извне. При такой постановке задачи появляется еще один определяющий параметр — расстояние между плоскостями  $l$ . Расчеты велись для  $l = 1-100$  см.

§ 1. Исходные уравнения. Основные допущения и теория развития ионизации за фронтом сильной волны были изложены в [1, 2]. Поскольку при переходе через фронт воздух быстро достигает почти полной диссоциации, система уравнений записывается для смеси атомарных газов и включает в себя уравнения кинетики ионизации, баланс энергии электронов и три уравнения сохранения

$$\frac{\partial(n_e v)}{\partial x} = S_e \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(^3/2 k T_e n_e v)}{\partial x} - k T_e n_e \frac{\partial v}{\partial x} = -Q + Q_c + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) - E_1 S_e - \frac{\partial(Fv)}{\partial x}$$

$$F = \sum_h n_h (E_1 - E_h), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v \left( h + \frac{v^2}{2} \right) \right] = -Q + \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right)$$

$$p + \rho v^2 = p_1 + \rho_1 v_1^2, \quad \rho v = \rho_1 v_1$$

Здесь  $x$  — расстояние от фронта,  $S_e$  — источник электронов,  $Q$  — дивергенция лучистого потока,  $Q_c$  — источник кинетической энергии тяжелой компоненты,  $\kappa_e$  — коэффициент электронной теплопроводности,  $F$  — энергия возбужденных состояний,  $n_h$  — населенность  $h$ -го уровня атома,  $E_1 - E_h$  — энергия возбуждения,  $E_1$  — энергия ионизации.

За сильной ударной волной давление можно считать постоянным  $p_1 \approx \rho v^2$ , ( $\rho$  — плотность газа перед фронтом);  $S_e$  представимо в виде

$$S_e = S_c + S_1 + S_2 \quad (1.2)$$

Здесь  $S_c$  обусловлено столкновениями,  $S_1$  — излучением в спектральных линиях,  $S_2$  — излучением в непрерывном спектре. Соответственно

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (1.3)$$

но  $Q_2$ , кроме излучения в непрерывном спектре, включает также излучение в молекулярных полосах.

Граничные условия для  $n_e$  и температуры атомов  $T_a$  формулируются из условий перехода газа через фронт. Предполагается, что кинетическая энергия набегающего потока затрачивается на сжатие газа и диссоциацию; возбуждение и ионизация начинаются после перехода через фронт. Правда, перед фронтом, в результате поглощения опережающего излучения, также появляются возбужденные атомы и электроны. В воздухе (в отличие от инертных газов) это не оказывает заметного влияния на релаксацию, поскольку за фронтом протекает ассоциативная ионизация, развитие которой практически не зависит от наличия малой начальной концентрации электронов. Поэтому газ перед фронтом можно рассматривать невозмущенным.

Последнее, однако, не позволяет строго поставить граничного условия для  $T_e$ . В качестве такого условия задавалось некоторое значение  $T_e(0)$  на разрыве, которое далее варьировалось. Второе условие для  $T_e$  ставилось на противоположной границе сжатого слоя. Задача решалась для случаев  $l > L$  ( $L$  — длина релаксации). Тогда в качестве этого второго условия можно принять  $\partial T_e / \partial x = 0$  при  $x = l$ . (Вопрос о втором граничном условии для  $T_e$  подробнее обсуждается в § 7).

Для излучения граничным условием будет равенство нулю лучистого потока, падающего извне на поверхности, ограничивающие сжатый слой газа.

**§ 2. Столкновительные процессы.** На первом этапе релаксации преобладает ассоциативная ионизация при столкновениях атом — атом, скорости которой были заимствованы из [3]. На больших расстояниях от фронта очень важна ионизация электронами, которая является ступенчатой и связана с наличием многочисленных возбужденных состояний атомов. Было предположено, что всю совокупность этих состояний можно разбить на два блока, внутри каждого из которых имеется равновесие, определяемое температурой электронов  $T_e$ . Состояния основных конфигураций  $k = 1, 2, 3$  образуют нижний блок, остальные тесно связаны со свободными электронами и образуют верхний блок. В этом предположении скорость ионизации была вычислена в [2]. В результате

$$S_c = S_{aa} + S_{ae} = \alpha(1 - \alpha)n^2 j_{ie}^e \left[ 1 - \frac{\alpha^2 n}{1 - \alpha} K(T_e) \right] + (1 - \alpha)^2 n^2 j_{ie}^a \left[ 1 - \frac{\alpha^2 n}{1 - \alpha} K(T_a) \right] \quad \left( \alpha = \frac{n_e}{n} \right) \quad (2.1)$$

$$j_{ie}^e \approx 2.75 \cdot 10^{-8} \sqrt{T_e} \exp\left(-\frac{11}{T_e}\right), \quad K \approx \frac{1.24 \cdot 10^{-22}}{T^{1.07}} \exp\left(\frac{16.85}{T}\right), \quad \text{см}^3$$

$$j_{ie}^a \approx 1.50 \cdot 10^{-45} \left[ 1 + 16 \left( \frac{T_a}{0.6} - 1 \right)^{2.28} \right]$$

Здесь  $\alpha$  — степень ионизации воздуха, температуры выражения в  $10^4$  °K;  $K$  — константа ионизационного равновесия воздуха.

При записи рекомбинации в (2.1) учтено, что за сильными у.в. ионы всех сортов находятся в локальном относительном равновесии при  $T_a$ , которое создается перезарядкой и реализуется при таких  $x$ , когда становится важной рекомбинация.

В  $Q_c$  дают вклад потери энергии при столкновениях атом — атом и обмен энергией при упругих столкновениях электронов с атомами

$$Q_c = (1 - \alpha)^2 n^2 (E_1 + kT_a) j_{ie}^a \left[ 1 - \frac{\alpha^2 n}{1 - \alpha} K(T_a) \right] + \alpha^2 n^2 q_{ie} + \alpha(1 - \alpha)n^2 q_{ae} \quad (2.2)$$

где  $q_{ae}$  и  $q_{ie}$  — скорости обмена энергией между электронами и атомами или ионами соответственно;  $q_{ae}$  вычислена в [2],  $q_{ie}$  имеет обычный вид.

Учтено, что в акте ассоциативной ионизации рождается [4] электрон с энергией  $\sim 3/2 kT_a$ . Как и упругие столкновения, это существенно во втором уравнении (1.1) при малых  $x$ ; в этой же области существенны два

последних члена правой части.  $\kappa_e$  вычислялась обычным путем для неполностью ионизованной плазмы. В выражении

$$F \approx (1 - \alpha)n0.62 \cdot 10^{-11} \exp(-2.48/T_e)$$

реальный вклад дают лишь состояния основных конфигураций атомов. Поэтому  $\partial(Fv)/\partial x$  — затраты энергии на поддержание равновесия в нижнем блоке состояний.

§ 3. **Излучение в спектральных линиях.** Определим энергию, переносимую в спектральных линиях. Баланс лучистой энергии для единицы объема, выделенного в неоднородном плоском слое газа, имеющего толщину  $l$ , записывается в виде

$$Q_1(x) = \sum^* \left\{ h\nu_{n'n} A_{n'n} \left[ n_{n'}(x) - \frac{1}{2} \int_0^l d\xi n_{n'}(\xi) \int_0^\infty d\nu \varepsilon_{n'n}(\nu, \xi) k_{n'n}(\nu, \xi) \text{Ei} \left( \left| \int_x^\xi k_{n'n}(\nu, x') dx' \right| \right) \right] \right\} \equiv \\ \equiv \sum^* \left\{ h\nu_{n'n} A_{n'n} \left[ n_{n'}(x) - \int_0^l d\xi n_{n'}(\xi) K(x, \xi) \right] \right\} \quad (3.1)$$

Здесь  $A_{n'n}$  и  $\nu_{n'n}$  — вероятность и частота перехода  $n' \rightarrow n$ ;  $\varepsilon_{n'n}(\nu, x)$  — форма линии испускания;  $k_{n'n}(\nu, x)$  — коэффициент поглощения.  $\sum^*$  означает, что суммирование ведется по всем возможным оптически разрешенным переходам атомов  $N$  и  $O$ , т. е. по всем  $n$  и  $n'$ , причем  $n' > n$ .

В (3.1) первое слагаемое учитывает излучение, выходящее из данного элемента объема, второе — излучение, поглощаемое в нем;  $\varepsilon_{n'n}(\nu, x)$  и  $k_{n'n}(\nu, x)$  определяются характером уширения линий. Оценки показали, что при  $p \approx 10^{-4} - 10^{-2}$  атм линии имеют практически дисперсионную форму, параметры которой определяются столкновениями с электронами

$$\varepsilon_{n'n}(\nu, x) = \frac{\gamma_{n'n}(x)}{2\pi(\nu^2 + 1/4\gamma_{n'n}^2(x))}, \quad k_{n'n}(\nu, x) = \frac{\pi e^2 n_n(x) f_{n'n'}}{mc} \varepsilon_{n'n}(\nu, x) \quad (3.2)$$

Здесь  $\gamma_{n'n}(x)$  — полуширина линии;  $\nu$  — частота, отсчитываемая в данном случае от центра линии;  $n_n(x)$  — концентрация поглощающих атомов;  $f_{n'n'}$  — сила осциллятора.

В случае сильной реабсорбции для переноса излучения существен контур линий в крыльях, поэтому в (3.2) можно положить  $\varepsilon_{n'n} \sim k_{n'n} \sim 1/\nu^2$ . Это позволяет вычислить интеграл по частоте в (3.1), что дает (индексы  $n'$  и  $n$  опущены)

$$K(x, \xi) = \frac{k(0, x) \gamma(\xi) \gamma^2(x)}{6\sqrt{\pi}} \left[ \left( \left| \int_x^\xi k(0, x') \gamma^2(x') dx' \right| \right)^{3/2} \right]^{-1}, \\ k(0, x) = \frac{2e^2 n(x) f}{mc \gamma(x)} \quad (3.3)$$

Приближенное выражение (3.3) при  $x \rightarrow \xi$  имеет особенность. Чтобы ее устранить, воспользуемся аппроксимацией

$$K(x, \xi) = k(0, x) \gamma^2(x) \gamma(\xi) \left[ a + 6\sqrt{\pi} \left( \left| \int_x^\xi k(0, x) \gamma^2(x') dx' \right| \right)^{3/2} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

где  $a$  — некоторая безразмерная постоянная.

Определим  $a$ , рассмотрев однородный слой газа, в котором

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ei} \left( \frac{\tau}{1 + \omega^2} \right) \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)^2}, \quad \tau = k(0, x)(x - \xi) \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} K(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$$

Потребуем, чтобы этому же равенству удовлетворяла аппроксимация (3.4). Тогда  $a = 1$ . Можно показать, что аппроксимация (3.4) с  $a = 1$  достаточно удовлетворительна. Окончательно  $Q_1$  имеет вид:

$$Q_1(y) = 0.255 \cdot 10^{20} c_1^2 \sum^* a_{n'n} \lambda_{n'n}(y) \quad (3.6)$$

$$\lambda_{n'n}(y) = a(y) - \quad (3.7)$$

$$- b_{n'n} l f \int_0^1 a(y') \left[ 1 + \left( \frac{c_{n'n}^{2/3} l}{\eta^{2/3}(y) \eta^{1/3}(y')} \left| \int_y^{y'} \eta f dy'' \right| \right)^{3/2} \right]^{-1} dy'$$

$$\eta = \frac{\alpha^2}{(T_a + \alpha T_e)^2}, \quad y = \frac{x}{l}; \quad c_1 = p v^2, \quad a = \psi \exp \frac{\beta_{n'}}{T_e}$$

$$\psi = \frac{\alpha^2}{(T_a + \alpha T_e)^2 T_e^{3/2} (1 + 0.15 T_e)}, \quad f = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \exp \left( - \frac{\beta_n}{T_e} \right) \frac{1}{1 + 1.16 T_e}$$

$$\beta_n = (E_1 - E_n) k^{-1} 10^{-4}; \quad \beta_{n'} = 10^{-4} E_n k^{-1}$$

$$E_n = R \cdot n^{*-2} \equiv R \cdot \varepsilon_n, \quad a_{n'n} = \frac{1.1 \cdot 10^{-1}}{2.0 \cdot 10^{-3}} \left. \vphantom{a_{n'n}} \right\} g_n (\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})^3 f_{n'n'}$$

$$b_{n'n} = \frac{3.9 \cdot 10^6}{4.6 \cdot 10^5} \left. \vphantom{b_{n'n}} \right\} g_n f_{n'n'} (w_n n'^{*7})^{-2/3}, \quad c_{n'n} = 6 \sqrt{\pi} (b_{n'n'})^{1/2}$$

Здесь  $E_n$  — энергия связи уровня  $n$ ;  $R$  — постоянная Ридберга. Верхний множитель у  $a_{n'n}$  и  $b_{n'n}$  относится к атому  $N$ , нижний — к  $O$ ;  $g_n$  — статистический вес состояния  $n$ ,  $w_{n'}$  — фактор порядка единицы. Температуры даны в  $10^4$  °K,  $p$  — в атм,  $v$  — в  $10$  км/сек,  $x$  — в см. В расчетах использованы данные работ [5, 6]. Для  $n_n$  и  $n_{n'}$  применено приближение блоков состояний. В (3.6) учитываются как реабсорбируемые, так и неабсорбируемые линии (в случае неабсорбируемых линий второе слагаемое в (3.7) мало по сравнению с первым). Однако в целях сокращения расчетного времени из суммы по  $n, n'$  выделены линии, которые в рассматриваемых условиях заведомо не реабсорбируются.

Вклад большого числа неабсорбируемых линий рассчитывался согласно [5]. Он оказался небольшим. Это обстоятельство позволяет существенно ограничить число слагаемых в (3.6). Коэффициенты  $a_{n'n}$  и  $b_{n'n}$  для спектральных линий, которые необходимо учитывать в рассматриваемых условиях, приведены в таблице.

Отметим, что при  $p \approx 10^{-2}$  атм большая часть линий из таблицы накладывается на интенсивный непрерывный спектр и при условии  $k_2 l \gg 1$  ( $k_2$  — коэффициент поглощения непрерывного спектра) должна быть опущена.

Выражение  $S_1$  получается из  $Q_1$  заменой коэффициента  $a_{n'n}$  на  $a_{n'n}R$ , где  $a_{n'n} = a_{n'n}(\epsilon_n - \epsilon_{n'})^{-1}$ . При этом в  $S_1$  переходы между возбужденными состояниями отбрасываются.

§ 4. Излучение в непрерывном спектре. Для плоского слоя имеем

$$Q_2(x) = \int_0^{\infty} E_\nu(x) d\nu - 1/2 \int_0^{\infty} d\nu \int_0^l d\xi E_\nu(\xi) k_\nu(x) \left( \left| \int_x^{\xi} k_\nu(\xi') d\xi' \right| \right) \quad (4.1)$$

Здесь  $E_\nu$  — спектральная излучательная способность в непрерывном спектре,  $k_\nu$  — коэффициент поглощения.

В исследуемых условиях  $E_\nu$  определяется в основном следующими процессами: (1) фоторекомбинацией на возбужденные состояния атомов;

$$A^{-r} = A \cdot 10^{-r}$$

	Переход	$a_{nn'}$	$b_{nn'}$
NI	$3s^4P - 2p^3^4S^0$	$2.0^{-2}$	$3.6^4$
OI	$3s^3S - 2p^4^3P$	$0.86^{-2}$	$3.9^4$
NI	$2p^4^4P - 2p^3^4S$	$2.6^{-3}$	$2.9^3$
NI	$4s^4P - 2p^3^4S$	$4.6^{-3}$	$0.9^3$
OI	$3d^3D - 2p^4^3P$	$0.81^{-2}$	$6.8^3$
NI	$3d^4P - 2p^3^4S$	$2.1^{-2}$	$4.8^3$
NI	$5s \left. \vphantom{5s} \right\} - 2p^3^4S$	$1.2^{-2}$	$6.4^3$
NI	$6s \left. \vphantom{6s} \right\} - 2p^3^4S$	$0.75^{-2}$	$9.6^2$
NI	$5d \left. \vphantom{5d} \right\} - 2p^3^4S$		
NI	$7s \left. \vphantom{7s} \right\} - 2p^3^4S$	$4.5^{-3}$	$2.3^2$
NI	$6d \left. \vphantom{6d} \right\} - 2p^3^4S$		
NI	$8s \left. \vphantom{8s} \right\} - 2p^3^4S$	$2.9^{-3}$	$6.4^1$
NI	$7d \left. \vphantom{7d} \right\} - 2p^3^4S$		
NI	$9s \left. \vphantom{9s} \right\} - 2p^3^4S$	$1.9^{-3}$	$2.2^1$
NI	$8d \left. \vphantom{8d} \right\} - 2p^3^4S$		
NI	$10s \left. \vphantom{10s} \right\} - 2p^3^4S$	$1.4^{-3}$	$8.4$
NI	$9d \left. \vphantom{9d} \right\} - 2p^3^4S$		
NI	$3s^2P - 2p^3^2D$	$1.4^{-2}$	$4.0^4$
NI	$4s^2P - 2p^3^2D$	$0.65^{-2}$	$2.8^3$
NI	$3d^2P, ^2F \left. \vphantom{3d^2P} \right\} - 2p^3^2D$	$2.9^{-2}$	$1.2^4$
NI	$5s \left. \vphantom{5s} \right\} - 2p^3^2D$	$2.0^{-2}$	$1.2^4$
NI	$4d \left. \vphantom{4d} \right\} - 2p^3^2D$		
NI	$6s \left. \vphantom{6s} \right\} - 2p^3^2D$	$1.1^{-2}$	$2.0^3$
NI	$5d \left. \vphantom{5d} \right\} - 2p^3^2D$		

(2) свободно-свободными переходами в полях ионов; (3) фотоприлипанием с образованием ионов  $N^-$  и  $O^-$ ; (4) электронными переходами в молекулах; (5) фоторекомбинацией на состояния основной конфигурации атомов.

Оценки показали, что для

$$pl < 10^{-1} \text{ атм см}$$

излучение, определяемое процессами (1), (2), (3), (4) не реабсорбируется. Для этих процессов

$$Q_2(x) = \int E_\nu(x) d\nu$$

Для расчета излучения, определяемого процессами (1), (2), использовались выражения для  $E_\nu$ , приведенные в [7]. Проинтегрировав  $E_\nu$  по частоте и проведя ряд аппроксимаций, справедливых при  $6000 - 20\,000^\circ K$ , получаем выражения для  $Q_2^{(1)+(2)}$  — потерь энергии за счет процессов (1), (2)

$$Q_2^{(1)+(2)} \approx [\text{эрг см}^{-3} \text{сек}^{-1}] \quad (4.2)$$

$$\approx 2.4 \cdot 10^{17} c_1^2 \eta T_e^{-1/2} (1 + 0.15 T_e)$$

Используя сечения поглощения  $N^-$  в состоянии  $^1D$  и  $O^-$  в состоянии  $^2P$ , находим  $E_\nu$ , обусловленную процессами (3). Сечение поглощения и энергия уровня  $N^- ^1D$  даны в [8], а для  $O^- ^2P$  — в [9].

В промежутках между пороговыми частотами сечения считались постоянными. После интегрирования по  $\nu$  получаем

$$Q_2^{(3)} \approx 9 \cdot 10^{16} c_1^2 \eta^{1/2} \psi_1 T_e^{5/2} \left[ \exp \frac{-0.79}{T_e} + 0.21 \frac{1 + 1.16 T_e}{1 + 0.15 T_e} \exp \frac{1.71}{T_e} \right] \quad (4.3)$$

Излучение молекул учитывалось только в тех условиях, когда температуры  $T_e$  и  $T_a$  равны и молекулярные компоненты находятся в локальном равновесии. При больших давлениях длина релаксации мала по сравнению с  $l$ , и такое рассмотрение будет достаточно точным. При малых  $p$

излучение молекул зачастую несущественно в общем балансе. Поэтому возможная ошибка невелика.

При расчете учитывались  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\epsilon$  и  $\delta$  системы полос NO и первая отрицательная система  $N_2^+$ . Учитывалось также рекомбинационное излучение электрона и иона  $NO^+$ . Сечения поглощения, усредненные по вращательной и сглаженные по колебательной структуре, можно найти в [10]. Оценки показали, что в рассматриваемых условиях роль остальных систем полос невелика.

Проведя интегрирование по частоте и ряд аппроксимаций, справедливых при  $8000-20\,000^\circ\text{K}$ , получим

$$Q_2^{(4)} = 1.33 \cdot 10^{13} c_1^2 \psi_1^2 (1 + 1.16 T_e)^2 \exp \frac{0.68}{T_a} + \quad (4.4)$$

$$+ 8.2 \cdot 10^{17} c_1^2 \eta^{1/2} \psi_1 (1 + 1.16 T_e) \exp \frac{-5.45}{T_a} \left[ 1 + 1.24 \cdot 10^8 \exp \frac{-21.88}{T_a} \right]$$

$$\psi_1 = \frac{1 - \alpha}{(T_a + \alpha T_e) (1 + 1.16 T_e)}$$

При учете процессов (5) необходимо учитывать реабсорбцию.

Предварительные оценки показали, что в континуумом кислорода для этих процессов можно пренебречь, а сечение поглощения азота с состояний основной конфигурации (см. [8, 11]) аппроксимировать тремя ступеньками. В результате получаем  $Q_2^{(5)}$ , обусловленное фоторекомбинацией на основную конфигурацию азота

$$Q_2^{(5)} \approx 1.743 \cdot 10^{18} c_1^2 \eta \left[ \exp \frac{-0.454}{T_e} + 1.508 \exp \frac{-0.787}{T_e} + \quad (4.5)$$

$$+ 0.762 \exp \left( -\frac{1.104}{T_e} \right) \right] - c_1^3 l (1.096 \cdot 10^{22} I_1 + 2.654 \cdot 10^{22} I_2 + 2.931 \cdot 10^{22} I_3)$$

где

$$I_1 = \psi_3 \int_0^1 \eta \exp \frac{-1.104}{T} \text{Ei} \left( \left| 1.65 \cdot 10^4 c_1 l \int_{y'}^y \psi_3(y'') dy'' \right| \right) dy'$$

$$I_2 = (\psi_3 + 1.66 \psi_2) \int_0^1 \eta \exp \frac{-0.787}{T_e} \text{Ei} \left( \left| 2.018 \cdot 10^4 c_1 l \int_{y'}^y [\psi_3(y'') + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 1.66 \psi_2(y'') \right] dy'' \right| \right) dy'$$

$$I_3 = (\psi_3 + 0.363 \psi_1) \int_0^1 \eta \exp \frac{-0.454}{T_e} \text{Ei} \left( \left| 3.364 \cdot 10^4 c_1 l \int_{y'}^y [\psi_3(y'') + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 0.363 \psi_1(y'') \right] \right| \right) dy'$$

$$\psi_2 = \psi_1 \exp \frac{-2.72}{T_e}, \quad \psi_3 = \psi_1 \exp \frac{-4.14}{T_e}$$

Полная дивергенция потока энергии в непрерывном спектре

$$Q_2 = Q_2^{(1)+(2)} + Q_2^{(3)} + Q_2^{(4)} + Q_2^{(5)}$$

Величина  $S_2$  получается из (4.1) заменой  $E_\gamma$  на  $E_\gamma/h\nu$  для процесса, дающего вклад в источник электронов. Оценки показали, что в  $S_2$  можно учитывать лишь фоторекомбинацию на основную конфигурацию азота и фотоионизацию с этих состояний. Проводя вычисления, аналогичные сделанным выше, получим

$$S_2 = 7.448 \cdot 10^{28} c_1^2 \eta \left[ \exp \frac{-0.454}{T_e} + 0.996 \exp \frac{-1.104}{T_e} + \right. \quad (4.6) \\ \left. + 1.721 \exp \frac{-0.787}{T_e} \right] - 6.123 \cdot 10^{32} c_1^3 l (I_1 + 2.114 I_2 + 2.045 I_3) \quad [\text{см}^{-3} \text{сек}^{-1}]$$

§ 5. Метод решения. Для решения исходной системы уравнений относительно неизвестных  $T_e$ ,  $T_a$ ,  $\alpha$  был использован метод итераций. Если систему уравнений представить в виде

$$d\bar{z}/dy = f(\bar{z}) + I \quad (5.1)$$

(где  $\bar{z}$  — вектор искомых функций,  $f(\bar{z})$  — скорости изменения энергии и ионизации за счет столкновений,  $I$  — интегральные члены, связанные с излучением), то итерационная схема запишется так:

$$d\bar{z}_n/dy = f(\bar{z}_n) + I_{n-1} \quad (5.2)$$

где  $n$  — номер итерации,  $I_{n-1}$  вычисляется по предыдущей итерации  $z_{n-1}$ . Следовательно, решение (5.1) сводится к последовательному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.2) до тех пор, пока итерации  $\bar{z}_n$  и  $\bar{z}_{n-1}$  не совпадут с заданной точностью. Быстрота сходимости отражает влияние излучения на состояние газа: при слабом влиянии — достаточно двух — трех итераций, с увеличением роли излучения — до десяти.

В качестве нулевого приближения используется решение задачи без излучения. Эта проблема имеет различный характер в зависимости от того, учитывается ли электронная теплопроводность:

1) при  $\kappa_e \neq 0$  имеем нелинейную краевую задачу для зависимых переменных  $T_a$ ,  $T_e$ ,  $\alpha$ , причем уравнение  $T_e$  — второго порядка;

2) при  $\kappa_e = 0$  приходим к задаче Коши. Заметим, что в  $n$ -м приближении получаются задачи того же типа. Поэтому ниже методы решения поставленных задач изложены только для нулевого приближения.

В случае  $\kappa_e \neq 0$  система уравнений имеет вид:

$$d\alpha/dy = lc_1 v (T_a + \alpha T_e)^{-2} (\Phi_1 + \Phi_2) \quad (5.3)$$

$$dT_a/dy = lc_1 v (T_a + \alpha T_e)^{-2} (\Phi_3 + m\Phi_2) - {}_2^2/{}_5 d(\alpha T_e)/dy \quad (5.4)$$

$$d^2 T_e / dy^2 + a(dT_e/dy)^2 + b dT_e/dy + c\Phi_3 + d\Phi_1 + e\Phi_2 = 0$$

где

$$\Phi_1 = 2.05 \cdot 10^{-26} c_1^{-2} (T_a + \alpha T_e)^2 S_{aa}$$

$$\Phi_2 = 2.05 \cdot 10^{-26} c_1^{-2} (T_a + \alpha T_e)^2 S_{ea}$$

$$\Phi_3 = 6 \cdot 10^{-15} c_1^{-2} (T_a + \alpha T_e)^2 (q_{ae} + q_{ie})$$

Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $m$  — коэффициенты, вид которых может быть получен сопоставлением с (1.1) — (1.3). Напомним, что граничное условие для  $\alpha$  и  $T_a$  ставится при  $y = 0$ , а для  $T_e$  — при  $y = 0$  и 1. Для решения применим метод прогонки в сочетании с методом итераций. Итерационную схему запишем так:

$$d\alpha_n/dy = f_1(\alpha_n, T_{an}, T_e^0, n-1) \quad (5.6)$$

$$dT_{an}/dy = f_2(\alpha_n, T_{an}, T_e^0, n-1) - {}_2^2/{}_5 d(\alpha_n T_e^0, n-1)/dy \quad (5.7)$$

$$d^2 T_{en}/dy^2 + p(\alpha_{n-1}, T_{a, n-1}, T_{e, n-1}) dT_{en}/dy + q T_{en} = r \quad (5.8)$$

где  $f_1$ ,  $f_2$  — правые части (5.3), (5.4), не содержащие производных.

Вначале решается задача Коши для уравнений (5.6), (5.7) при заданной функции  $T_e^0, n-1$ , в результате чего определяется  $\alpha_n$  и  $T_{an}$ . Затем методом прогонки решается уравнение (5.8). В качестве  $T_e^0, n-1$  выбиралась линейная комбинация двух предыдущих итераций

$$T_e^0, n-1 = T_{e, n-1} + \gamma(T_{e, n-2} - T_{e, n-1}) \quad (5.9)$$

При значении параметра  $\gamma = 0$  в (5.8) итерации расходились. Устойчивая сходимость была достигнута при  $\gamma = 0.5$ .

Можно показать, что решение задачи Коши для уравнений (5.6) и (5.7) при помощи явных разностных схем может оказаться неустойчивым. Действительно, функции  $\Phi_i$  можно представить в виде

$$\Phi_i = l_i^{-1}(z_e - z) \quad (5.10)$$

где  $z = \alpha, T_a$ , а  $z_e$  — равновесное значение соответствующей переменной,  $l_i$  — длина релаксации  $i$ -го процесса;  $l_i$  зависит от температур и концентрации. Известное условие устойчивости решения системы уравнений с правыми частями вида (5.10) ограничивает шаг интегрирования

$$h < \min(l_i) \quad (5.11)$$

Из анализа скоростей реакций можно установить следующий характер ионизации: сразу за фронтом волны главную роль играет сравнительно медленный процесс ассоциативной ионизации. Его длина релаксации  $l_2$  почти постоянна. В отсутствие других процессов длина  $l_2$  определяла бы всю зону релаксации. Следовательно, если надо получить структуру релаксационного перехода, условие (5.11) для  $l_2$  автоматически удовлетворяется. Вблизи фронта волны  $l_1 \gg l_2$ . Однако по мере накопления электронов и увеличения  $T_e$  скорость ионизации электронным ударом  $\Phi_1$  резко увеличивается, т. е.  $l_1$  уменьшается. Кроме того, скорость обмена энергией при упругих столкновениях  $\Phi_3$  быстро возрастает с ростом  $T_e$  и  $\alpha$ . Уменьшение  $l_1, l_3$  может привести к необходимости вести расчет с очень малым шагом. Чтобы обойти эту трудность, в настоящей работе использовалась некая разностная схема для записи уравнений (5.6), (5.7), аналогичная схеме Эйлера с пересчетом

$$(\alpha_{i+1} - \alpha_i) / h = 1/2 [f_1(\alpha_i, T_{ai}, T_{ei}^0) + f_1(\alpha_{i+1}, T_{a\ i+1}, T_{e\ i+1}^0)] \quad (5.12)$$

$$(T_{a\ i+1} - T_{ai}) / h = 1/2 [f_2(\alpha_i, T_{ai}, T_{ei}^0) + f_2(\alpha_{i+1}, T_{a\ i+1}, T_{e\ i+1}^0)] - \\ - 2/5 (\alpha_{i+1} T_{e\ i+1}^0 - \alpha_i T_{ei}^0) / h \quad (5.13)$$

где  $T_e^0$  — заданная функция  $y$ ,  $i$  — номер шага интегрирования, номер итерации  $n$  опущен. Уравнения (5.12), (5.13) решались методом Ньютона.

В случае, когда электронную теплопроводность можно не учитывать, уравнение (5.5) для  $T_e$  целесообразно заменить условием сохранения полной энтальпии

$$d[T_a + \alpha T_e + 6.72\alpha + (1 - \alpha)F(T_e)] / dy = 0 \quad (5.14)$$

При учете излучения в правой части стоит производная потока лучистой энергии. Таким образом, состояние газа описывается уравнениями (5.3), (5.4) и (5.14) с заданными значениями  $T_a, T_e, \alpha$  на фронте волны. Разностная схема для решения уравнений (5.3) и (5.4) выписана в (5.12), (5.13), эта же схема применяется для уравнения (5.14). Полученная система трансцендентных уравнений решалась методом Ньютона.

Задача вычисления радиационных членов в уравнениях (1.2) при заданных распределениях  $T_a, T_e, \alpha$  сводится к вычислению двойных интегралов от функций, заданных таблично (речь идет, конечно, только о реабсорбируемых компонентах). Рассмотрим типичный вклад одной реабсорбируемой линии  $\lambda_{nn'}(y)$ , приведенный в (3.7). Для вычисления внутреннего интеграла в (3.7) применялся стандартный метод трапеций.

В случае сильно реабсорбируемых линий подынтегральная функция внешнего интеграла  $\chi(y, y')$  имеет резко выраженный максимум при  $y = y'$ . В самом деле,  $\chi(y, y) = a(y) \sim 1$ . Функция  $\chi(y, y')$  остается порядка единицы лишь при  $|y - y'| \sim \sim c_{nn'}^{-2/3}$ . Вне этой малой окрестности  $\chi(y, y') \sim c_{nn'}^{-1}$ , т. е. очень мала, так как  $c_{nn'} \sim 10^5$ . Для интегрирования такой функции был использован прием, аналогичный описанному в [12]. После выполнения преобразований выражение (3.7) приобретает вид

$$\lambda_{nn'}(y) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ a [\Phi(D_{nn'} y) + \Phi(D_{nn'}(1 - y))] + 3D_{nn'} \int_0^1 \chi^*(y, y') dy' \right\} \quad (5.15)$$

$$D_{nn'} = f\eta c_{nn'}^{2/3}, \quad \chi^* = a(y) [1 + (D_{nn'}(y) |y - y'|)^{3/2}]^{-1} - \chi(y, y')$$

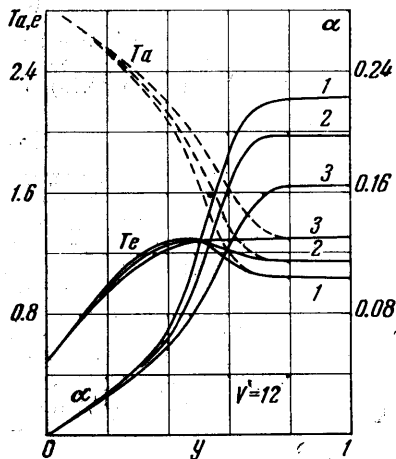
$$\Phi(\tau) = 2\sqrt{3}^{1/2} \pi - \arctg(2\sqrt{\tau - 1} / \sqrt{3}) - \ln[(1 - \sqrt{\tau + 1})(1 + \sqrt{\tau - 1})^{-2}]$$

Легко показать, что функция  $\chi^*$  не имеет особенностей, которой обладает функция  $\chi$ . В самом деле,  $\chi^*(y, y) = 0$  и  $\partial \chi^* / \partial y' \sim 1$  на всем отрезке  $[0, 1]$ . Интеграл в (5.15) вычислялся по формуле трапеций.

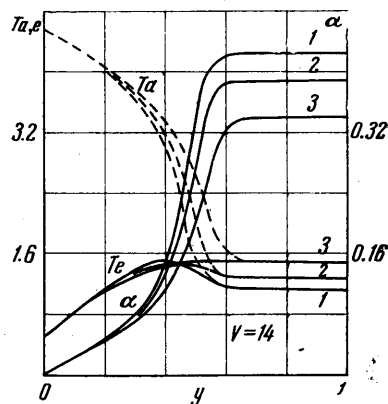
Отметим, что при вычислении вклада реабсорбируемой составляющей непрерывного спектра возникли аналогичные трудности. Они устранялись методом, подобным упомянутому.



Одновременно с решением полной системы уравнений методом итераций (1.2) вычислялся суммарный поток радиации  $q$  [эрг/см<sup>2</sup> сек] от слоя в направлении движения газа.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вклад одной линии и одной компоненты излучения континуума в  $q$  имеет вид

$$q_{\lambda_{nn'}} = 0.17 \cdot 10^{15} l c_1^2 \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^1 \left[ a \Phi(D_{nn'}, y) + 3D_{nn'} \int_0^y \chi^*(y, y') dy' \right] dy \quad (5.16)$$

$$q_i = 0.17 \cdot 10^{15} l c_1^2 \int_0^1 \eta \exp \frac{-a_i}{T_e} \left[ \frac{1}{2} - \frac{A_i l c_1}{2} \eta f_i \exp \frac{a_i}{T_e} \times \right. \\ \left. \times \int_0^y \eta \exp \frac{-a_i}{T_e} \text{Ei} \left( A_i l c_1 \int_{y'}^y f_i dy'' \right) dy' \right] dy \quad (5.17)$$

Выражения для  $a_i$ ,  $A_i$ ,  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) очевидны из сравнения формул (5.17) и (4.5).

Внешние интегралы в (5.16), (5.17) вычислялись по формуле трапеций, за исключением интеграла от первого слагаемого в квадратной скобке в (5.16). Для сильно реабсорбируемых линий  $\Phi(D_{nn'}, y)$  резко изменяется вблизи точки  $y = 0$ . Действительно,  $\Phi(0) = 4\pi/\sqrt{3}$ , а  $\Phi(D_{nn'}, h) \sim 3(D_{nn'}, h)^{-1/2} \ll 1$ , так как  $D_{nn'}$  очень велико ( $h$  — шаг интегрирования). Применялся следующий способ вычисления интеграла от этого слагаемого: отрезок  $[0, 1]$  разбивался на  $n$  шагов; на каждом шаге функции  $T_e$ ,  $T_a$ ,  $\alpha$  считаются постоянными. После этого интеграл от  $\Phi(D_{nn'}, y)$  на каждом шаге берется в конечном виде.

**§ 6. Неравновесная ионизация за фронтом ударной волны.** Рассмотрим случай, когда длина релаксации  $L$  порядка толщины рассматриваемого слоя. В этих условиях величина  $l$  — определяющий параметр только в связи с учетом излучения. Задача решается с учетом электронной теплопроводности.

Рассмотрим вначале зону релаксации без излучения. На фиг. 1, 2 даны распределения температур  $T_a$  и  $T_e$  для  $p = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  (кривые 3, 2, 1) и скоростей  $v = 1.2$  (фиг. 1) и 1.4 (фиг. 2). Там же даны распределения  $\alpha$ . Кривые, приведенные на фиг. 1 и 2, относятся к условиям  $lpv^2 = \text{const} = 0.2 \cdot 10^{-3}$ , т. е. по оси абсцисс отложена величина  $y = x/l = xrv^2/0.2 \cdot 10^{-3}$  (здесь  $x$  — в см,  $p$  — в атм,  $v$  — в 10 км/сек). Основные расчеты проводились при  $T_e(0) = 0.5$ .

Кривые, полученные при заданном  $v$  и различных  $p$ , демонстрируют бинарное подобие в большей части зоны релаксации. По мере приближения к равновесию оно нарушается, так как становится заметной рекомбинация тройным соударением.

Расчеты подтвердили описанный выше ход различных процессов и в тех случаях, когда сравнение возможно, находится в хорошем соответствии с результатами работы [2]. Вначале  $\alpha$  изменяется линейно, поскольку ассоциативная ионизация про-

текает почти с постоянной скоростью. Далее, с ростом  $\alpha$  на первый план выходит ионизация электронным ударом, скорость которой пропорциональна  $\alpha$ ; распределение  $\alpha$  становится экспоненциальным.

Специальными расчетами выяснилась зависимость решения от  $T_e(0)$ . Оказалось, что зависимость от начального значения локализуется вблизи фронта. Величины  $T_e$  и  $\alpha$  практически не зависят от  $T_e(0)$ . Это связано с тем, что ионизация на рассматриваемых расстояниях от фронта обусловлена межатомными столкновениями и не зависит от  $T_e$ .

На фиг. 3 построен баланс энергии электронов для  $v = 1,2$  и  $p = 10^{-4}$ . Нагрев электронов обусловлен упругими столкновениями с ионами  $W_{ei} = n^2 \alpha^2 Q_{ie}$ , а вблизи фронта — также ассоциативной ионизацией

$$W_{aa} = \frac{3}{2} k (T_a - T_e) n^2 (1 - \alpha)^2 j_{1e}^1 \left( 1 - \alpha^2 n \frac{K(T_a)}{1 - \alpha} \right)$$

Роль упругих столкновений с атомами

$$W_{ea} = n^2 \alpha (1 - \alpha) Q_{ea}$$

и теплопроводности

$$W_h = d(x_e dT_e / dx)$$

$$W_e = d(Fv) / dx$$

мала. Потери обусловлены также возбуждением (вблизи фронта) и ионизацией электронным ударом<sup>1</sup>

$$W_i = E_1 n^2 \alpha (1 - \alpha) j_{1e}^0 [1 - \alpha^2 n K(T_e) / (1 - \alpha)]$$

Потери на подогрев электронов

$$W_r = n_e v d(\frac{3}{2} k T_e) / dx$$

малы.

Рассмотрим теперь излучение газа. Вклад излучения в скорость ионизации

$$\Phi' = 2,05 \cdot 10^{-26} c_1^{-2} (T_a + \alpha T_e)^2 (S_1 + S_2)$$

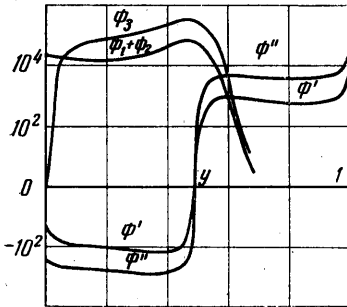
и в баланс энергии

$$\Phi'' = 6 \cdot 10^{-45} c_1^{-2} (T_a + \alpha T_e)^2 (Q_1 + Q_2)$$

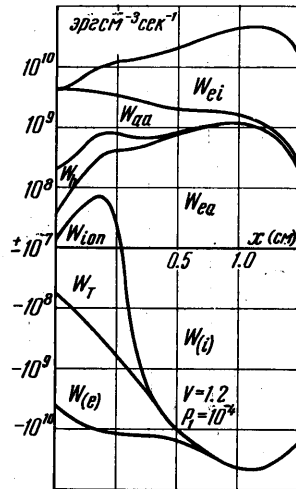
представлен на фиг. 4 для  $v = 1,4$   $p = 10^{-4}$ .

Функции  $\Phi'$  и  $\Phi''$  положительны в той части слоя, где релаксация уже закончилась (назовем эту область зоной постоянных параметров). Следовательно, эта область будет охлаждаться за счет выхода излучения.

В зоне релаксации  $\Phi'$  и  $\Phi''$  отрицательны, так как там поглощается излучение, идущее от зоны постоянных параметров. При приближении к границам слоя значения  $\Phi'$  и  $\Phi''$  резко возрастают, поскольку излучение, запертое в середине объема, на его границах выходит свободно.

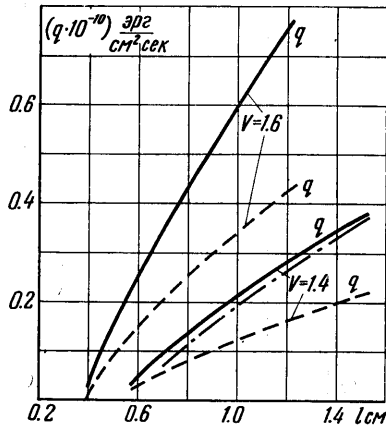


Фиг. 3



Фиг. 3

Фиг. 4



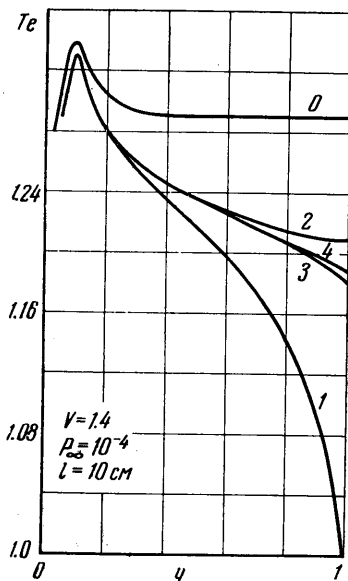
Фиг. 5

На фиг. 4 приведены также скорости столкновительных процессов  $\Phi_1 + \Phi_2$  и  $\Phi_3$  (см. формулы (5.3) — (5.5)). Сравнение  $\Phi_1 + \Phi_2$  с  $\Phi'$  и  $\Phi_3$  с  $\Phi''$  показывает, что излучение не оказывает заметного воздействия на ход релаксации; столкновительные члены на два — три порядка превосходят радиационные.

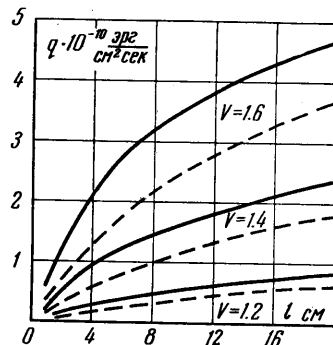
В зоне постоянных параметров выход излучения приводит к очень слабому охлаждению. Поэтому при  $L \sim l$  излучение практически не влияет на состояние газа.

<sup>1</sup> Около фронта столкновения атом — атом создают концентрацию электронов выше равновесной при  $T_e$ . Это приводит к преобладанию рекомбинации над ионизацией и изменению знака  $W_i$ .

Этот результат не связан с использованной моделью возбужденных состояний и, по-видимому, носит для ударных волн в воздухе более общий характер, однако для  $u$ . в другом газе этого может и не быть. Поток излучения  $q$  в зависимости от толщины слоя  $l$  для  $v = 1.4$  и  $1.6$  и  $p = 10^{-4}$  представлен на фиг. 5 (пунктиром дан вклад линейчатого спектра). Оценивался вклад зоны релаксации в  $q$ . На фиг. 5 для  $v = 1.4$  штрих-пунктиром изображен поток лучистой энергии от однородного слоя толщиной  $l = L$ . Сравнение его с потоком  $q$  от слоя толщины  $l$ , содержащего зону релаксации, обнаруживает, что её вклад в  $q$  весьма мал. Заметим, что потоки от однородных слоев находятся в хорошем согласии с вычисленными в [1].

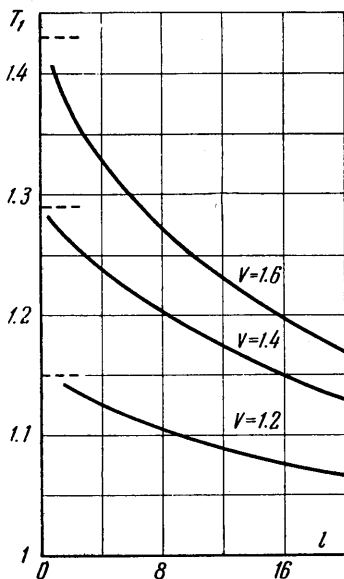


Фиг. 6

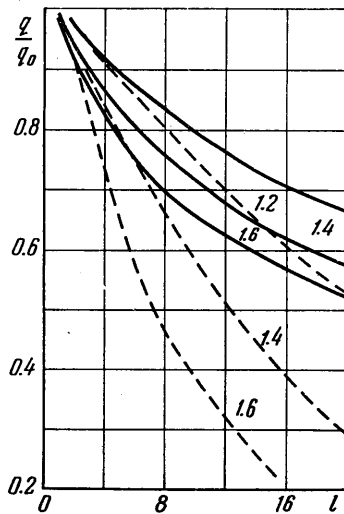


Фиг. 7

Применяемая в данной работе кинетическая схема не дает удовлетворительного описания излучения зоны релаксации при меньших скоростях. В частности, она не дает пика неравновесного излучения при  $v = 10$  км/сек. Описание излучения зоны релак-



Фиг. 8



Фиг. 9

сации требует учета некоторых дополнительных факторов [13,14]. С ростом  $v$  роль этих факторов ослабляется, и описание в рамках используемой здесь кинетической схемы становится удовлетворительным.

§ 7. Радиационное охлаждение. Из предыдущего следует, что заметное влияние излучения на состояние газа можно ожидать в зоне постоянных параметров при больших её толщинах. В этих условиях зона релаксации занимает весьма малую часть слоя. Электронную теплопроводность при  $l \gg L$  можно не учитывать, в связи с чем отпадает необходимость второго граничного условия для  $T_e$ .

В рассматриваемых условиях  $l \gg L$  было обнаружено сильное влияние излучения на состояние газа. Формально это отражается прежде всего на скорости сходимости итераций, описанных в § 5. Пример изменения  $T_e$  в процессе итераций для  $v = 1.4$ ,  $p = 10^{-4}$ ,  $l = 10$  приведен на фиг. 6. Аналогичный характер имеют итерации для  $T_a$  и  $\alpha$ . Был найден суммарный поток излучения  $q$  в зависимости от толщины слоя  $l$ . (В связи с тем, что реабсорбция некоторых составляющих непрерывного спектра не учитывалась (см. § 4), результаты ограничены областью  $pl \leq 10^{-1}$  атм см.) На фиг. 7 в качестве примера приведена зависимость  $q$  от  $l$  для  $p = 10^{-4}$ ,  $v = 1.2$ , 1.4, 1.6. Там же пунктиром показан вклад линейчатого излучения. Поток увеличивается с ростом  $l$ , однако скорость роста существенно замедляется радиационным охлаждением.

На фиг. 8 приведена зависимость температуры  $T_1$  на правой стенке слоя от его толщины при  $p = 10^{-4}$  для трех значений скорости  $v = 1.2, 1.4, 1.6$ . Пунктиром показано значение температуры в неохлажденном слое.

В рассматриваемых условиях охлаждение газа приводит к падению потока  $q$  до двух раз. На фиг. 9 представлено отношение  $q/q_0$ , где  $q_0$  — поток излучения, вычисленный без учета радиационного охлаждения. Там же пунктиром приведено отношение  $q_1/q_2$ , где  $q_1$  — поток, рассчитанный после первой итерации по температуре. Видно, что  $q_1/q_0$  резко отлично от  $q/q_0$ . Это обстоятельство свидетельствует о недостаточности одной итерации, применяемой иногда в оценочных расчетах. С увеличением скорости ударной волны эффект охлаждения усиливается.

Отметим, что выход излучения не приводит к разделению температур  $T_e$  и  $T_a$ . Однако радиационное охлаждение приводит к нарушению ионизационного равновесия. Вследствие потерь энергии температура падает, а степень ионизации не успевает «следовать» за нею. Поэтому локальная концентрация заряженных частиц превышает равновесную. Такого рода неравновесность типична для распадающейся плазмы, однако применительно к плазме за ударной волной отмечается впервые.

Институт высоких температур  
АН СССР

Поступило 13 VII 1967

НИИ механики МГУ

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Норман Г. Э., Якубов И. Т. Радиационный нагрев при гиперзвуковом обтекании. Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 3.
2. Биберман Л. М., Якубов И. Т. Состояние газа за фронтом сильной ударной волны. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, вып. 3.
3. Lin S. C., Teare J. D. Ionization behind the Shock waves in Air. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 2.
4. Касьянов В. А., Подлубный Л. И. К теории ассоциативной ионизации. Тр. МЭИ, 1967, физика.
5. Воробьев В. С., Норман Г. Э. Энергия, излучаемая равновесной плазмой в спектральных линиях II. Оптика и спектроскопия, 1964, т. 17, вып. 8.
6. Норман Г. Э. Сечение фотоионизации и силы осцилляторов нижних возбужденных состояний атомов азота и углерода. Оптика и спектроскопия, 1963, т. 17, вып. 5.
7. Биберман Л. М., Норман Г. Э. Рекомбинационное и тормозное излучение плазмы. J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 1963, т. 3, вып. 2.
8. Норман Г. Э. Вклад отрицательного иона азота в излучение азотной и водородной плазмы. Оптика и спектроскопия, 1964, т. 17, вып. 8.
9. Бренском Л. Фотоотрыв. Сб. «Атомные и молекулярные процессы», Изд-во «Мир», 1964.
10. Биберман Л. М., Мнацаканян А. Х. Оптические свойства воздуха в интервале температур 4000—10 000° К. Теплофизика высоких температур, 1966, т. 4, вып. 2.
11. Bates D. R., Seaton M. J. The Quantal Theory of Continuous Absorption of Radiation by various Atoms in Their Ground States. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1949, vol. 109, No. 6.
12. Лагарьков А. Н. Об условиях применимости приближения локального термодинамического равновесия. Теплофизика высоких температур, 1966, т. 4, вып. 3.
13. Воробьев В. С., Якубов И. Т. О причинах образования пика излучения неравновесного газа за ударной волной. Письма ЖЭТФ, 1966, т. 4, вып. 2.
14. Якубов И. Т. О максимуме излучения неравновесного газа за сильными ударными волнами. Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, вып. 3.