

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ТЕЛА С МИНИМАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Н. М. БЕЛЯНИН

(Москва)

Точное решение задачи об определении оптимальной формы тела, при обтекании которого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью полный тепловой поток будет минимальным, связано как с вычислительными, так и с принципиальными трудностями. Поэтому в настоящее время широко используется обратный метод, основанный на сравнении тепловых потоков для тел различной заданной формы [1, 2]. Результаты таких расчетов не всегда могут заменить решение прямой вариационной задачи. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть прямую вариационную задачу об определении формы тела с минимальным тепловым потоком, используя приближенную формулу Ньютона для нахождения газодинамических параметров на границе пограничного слоя. Такой подход использовался для нахождения формы тела минимального сопротивления в идеальной жидкости [3-5] и с учетом силы трения [6], а также для определения формы тонкого плоского профиля с минимальным тепловым потоком при заданных аэродинамических характеристиках [7].

1. Рассмотрим обтекание плоского симметричного или осесимметричного тела под нулевым углом атаки в случае, когда температура стенки постоянная, пограничный слой ламинарный и влиянием излучения можно пренебречь. Пусть  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты, причем ось  $x$  в плоском случае лежит в плоскости симметрии, а в осесимметричном — совпадает с осью симметрии. Начало координат совмещено с критической точкой, уравнение образующей тела имеет вид  $x = x(y)$ , длина и половина толщины (в плоском случае) или радиус конечного сечения (в осесимметричном случае) заданы и равны соответственно  $x_3$  и  $y_3$ . Введем еще криволинейные координаты  $s$  и  $n$ , где  $s$  — расстояние от критической точки вдоль образующей тела,  $n$  — расстояние от поверхности тела.

Полное количество тепла  $Q$ , которое отводится в тело (в плоском случае — на единицу ширины) определяется формулой

$$Q = 2 \int_0^{s_3} (\pi y)^{\nu} q ds \quad (1.1)$$

Здесь  $q$  — удельный тепловой поток,  $s_3$  — длина образующей тела,  $\nu = 0$  в плоском случае и  $\nu = 1$  — в осесимметричном. Величина  $q$  зависит от параметров потока, которые определяются формой обтекаемого тела.

Воспользуемся гипотезой локального подобия, которая широко применяется при расчете пограничного слоя [8, 9]. Сущность этой гипотезы заключается в том, что величина  $q$  зависит от параметров в данном сечении так же, как при обтекании плоской пластины постоянной температуры потоком газа с заданным числом  $M$ . При обтекании плоской пластины и ламинарном режиме течения в пограничном слое [8]

$$S = \frac{q}{\rho u (H - h_w)} = \frac{2A^2}{R_\theta}, \quad R_\theta = \frac{\rho u \theta}{\mu} \quad (1.2)$$

$$A = 0.332 P^{-2/3} \left( 0.45 + 0.55 \frac{h_w}{h} + 0.09 (\gamma - 1) M^2 P^{1/2} \right)^{1/2(\alpha-1)}$$

Здесь  $S$  — число Стантона,  $\rho$ ,  $u$ ,  $h$ ,  $\mu$ ,  $M$  — соответственно плотность, скорость, энтальпия, коэффициент вязкости и число  $M$  на границе пограничного слоя;  $H$ ,  $h_w$  — равновесная энтальпия и энтальпия при температуре стенки;  $P$  — число Прандтля,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей,  $\omega$  — показатель степенной зависимости вязкости от температуры,  $\theta$  — толщина потери энергии.

Распределение толщины потери энергии вдоль обтекаемой поверхности определяется из интегрального уравнения энергии в криволинейных координатах [9]

$$y^{-\nu} \frac{d}{ds} [y^{\nu} \rho u (H - h_w) \theta] = q \quad (1.3)$$

Подставляя в (1.3) выражение для  $q$  из формулы (1.2), получим

$$[y^{\nu} \rho u (H - h_w) \theta]^2 = 4 \int_0^s A^2 y^{2\nu} (H - h_w)^2 \rho u \mu ds \quad (1.4)$$

причем постоянная интегрирования равна нулю ( $u = 0$  при  $s = 0$ ).

Полный тепловой поток можно выразить через толщину потери энергии, если в (1.1) подставить  $q$  из соотношения (1.3) и проинтегрировать

$$Q = 2\pi^{\nu} [y^{\nu} \rho u (H - h_w) \theta]_3 \quad (1.5)$$

Индексом 3 обозначены параметры при  $x = x_3$ ,  $y = y_3$ . Постоянная интегрирования снова равна нулю ( $u = 0$  при  $s = 0$ ).

Используя соотношения (1.4) и (1.5), можно выразить полный тепловой поток через газодинамические параметры на границе пограничного слоя и геометрические параметры

$$Q^2 = 16\pi^{2\nu} \int_0^{s_3} A^2 y^{2\nu} (H - h_w)^2 \rho u \mu ds$$

или

$$S_*^2 R_* = 4x_3^{-1} y_3^{-2\nu} \int_0^{s_3} A^2 y^{2\nu} \left( \frac{H - h_w}{H_* - h_w} \right)^2 \psi ds \quad (1.6)$$

$$S_* = \frac{Q}{2\pi^{\nu} x_3 y_3^{\nu} \rho_* u_* (H_* - h_w)}, \quad R_* = \frac{\rho_* u_* x_3}{\mu_*}, \quad \psi = \frac{\rho u \mu}{\rho_* u_* \mu_*}$$

причем индексом \* обозначены критические параметры за прямым скачком уплотнения. Величины  $A$  и  $H$  мало изменяются при изменении параметров потока и при приближенном анализе их можно считать постоянными. Тогда соотношение (1.6) принимает вид

$$\chi^2 = S_*^2 R_* P_*^{1/3} = 0.44 x_3^{-1} y_3^{-2\nu} \int_0^{s_3} y^{2\nu} \psi ds \quad (1.7)$$

Вариационную задачу отыскания оптимальной формы тела, в отношении теплообмена, следует сформулировать следующим образом: среди допустимых функций  $x = x(y)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(y_3) = x_3$ , найти такую, которая давала бы минимум интеграла в правой части уравнения (1.7).

Оптимальный контур может состоять из участков экстремалей  $x = x(y)$  и участков границ  $x = 0$ ,  $x = x_3$ ,  $y = 0$ ,  $y = y_3$ , если они являются участками краевого экстремума. Так же, как при нахождении формы тел минимального сопротивления, на контур тела следует наложить ограничения, связанные с областью применимости формулы Ньютона [5].

Класс допустимых функций  $x(y)$  должен состоять из кусочногладких кривых, удовлетворяющих условию  $0 \leq x' \leq \infty$ , где  $x' = dx/dy$ .

Если в точке излома производная слева  $(x')^-$  меньше производной справа  $(x')^+$ , то применение формулы Ньютона может привести к ошибкам. В этом случае следует ожидать также возникновения отрыва пограничного слоя, и реальная картина течения будет существенно отличаться от расчетной. Поэтому при решении вариационной задачи в данной постановке прямые  $x = x_3$  и  $y = 0$  следует исключить из рассмотрения. Участками краевого экстремума могут быть торец ( $x = 0$ ) и участок постоянной толщины ( $y = y_3$ ). Стыковка торца с экстремалью происходит в точке 1 с координатами  $x_1 = 0, y_1$ , а стыковка экстремали с участком постоянной толщины — в точке 2 с координатами  $x_2, y_2 = y_3$ .

2. При обтекании тел с затупленной передней частью потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью распределение давления на поверхности тела приближенно описывается уточненной формулой Ньютона [3, 4]

$$\pi = \sin^2 \alpha (1 - \pi_\infty) + \pi_\infty \tag{2.1}$$

$$\pi = p/p_0^*, \quad \pi_\infty = p_\infty/p_0^*, \quad \sin^2 \alpha = (1 + x'^2)^{-1} \tag{2.2}$$

а  $p_0^*$  — давление торможения за прямым скачком уплотнения.

При решении рассматриваемой вариационной задачи будет использоваться формула Ньютона (2.1). Это означает, что рассматриваются тела с малым затуплением, при обтекании которых возникает отошедшая ударная волна. В дальнейшем будет показано, что тепловые потоки для заостренных тел при наличии присоединенной ударной волны оказываются выше, чем при наличии отошедшей ударной волны.

Так как течение за ударной волной можно считать изэнтропическим вдоль линии тока, то

$$\psi = B\pi^a (1 - \pi^b)^{1/2} \tag{2.3}$$

$$B = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^x, \quad a = \frac{1 - \omega + \omega\gamma}{\gamma}, \quad b = \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad x = \frac{1}{\gamma - 1} + \omega$$

Здесь  $\pi$  — известная функция геометрических характеристик контура, как следует из соотношений (2.1) и (2.2).

Однако использование формулы Ньютона (2.1) для определения величины  $\psi$  на торце приводит к неправильному результату, так как при  $x' = 0, \pi = 1$ , и величина  $\psi$  обращается в нуль. Поэтому для определения газодинамических параметров на торце нужно знать более детальную картину течения, для чего можно использовать метод интегральных соотношений в простейшем виде [10] в предположении, что скорость на кромке торца равна скорости звука.

Распределение скорости на торце в плоском случае ( $\nu = 0$ ) может быть получено в виде

$$\frac{y}{y_1} = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \left[ 1 - \frac{\pi_\infty}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)} \right] \times \times \left[ 1 - \frac{\pi_\infty}{1 + \lambda^2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^{1/(1-\nu)} \right]^{-1} \tag{2.4}$$

где  $y_1$  — половина толщины торца,  $\lambda$  — коэффициент скорости.

Распределение скорости на торце в осесимметричном случае ( $\nu = 1$ ) получено для  $M_\infty = \infty$  [10]

$$\frac{y}{y_1} = \lambda \left( \frac{\gamma + 1}{4\gamma + 2} + \frac{3\gamma + 1}{4\gamma + 2} \lambda^2 \right)^{-(2\gamma+1)/(3\gamma+1)} \tag{2.5}$$

Величина  $\psi$  определяется по формуле

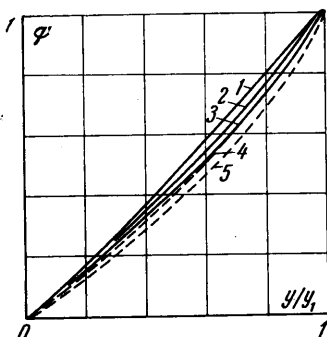
$$\psi = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^x \lambda \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^x \tag{2.6}$$

Результаты расчета распределения величины  $\psi$  на торце по формулам (2.4), (2.5) и (2.6) представлены на фиг. 1 для следующих случаев:  $\nu = 0, \gamma = 1.4, \omega = 0.75, M_\infty = \infty$  (кривая 1);  $\nu = 0, \gamma = 1.4, \omega = 0.75, M_\infty = 2$  (кривая 2);  $\nu = 0, \gamma = 1.0, \omega = \text{любое}, M_\infty = \infty$  (кривая 3);  $\nu = 1, \gamma = 1.4, \omega = 0.75, M_\infty = \infty$  (кривая 4);  $\nu = 1, \gamma = 1.0, \omega = \text{любое}, M_\infty = \infty$  (кривая 5). Зависимость  $\psi$  от  $y/y_1$  близка к линейной в широком диапазоне изменения параметров  $\gamma, \omega, M_\infty$ . Поэтому будем считать, что распределение величины  $\psi$  на торце как в плоском, так и в осесимметричном случаях приближенно описывается формулой

$$\psi = y / y_1 \quad (2.7)$$

С учетом соотношения (2.3) и (2.7) формула (1.9) преобразуется к виду

$$\chi^2 = \frac{0.44}{x_3 y_3^{2\nu}} \left[ \frac{y_1^{2\nu+1}}{2\nu + 2} + B \int_{y_1}^{y_2} \pi^a (1 - \pi^b)^{1/2} y^{2\nu} (1 + x^2)^{1/2} dy \right] \quad (2.8)$$



Фиг. 1

При использовании точных формул (2.4), (2.5) и (2.6) для зависимости  $\psi$  от  $y/y_1$  на торце значение коэффициента  $y^*$  перед  $y^{2\nu+1}$  в скобках соотношения (2.8) будет несколько отличаться от  $(2\nu + 2)^{-1}$ ; однако это отличие невелико, как видно из приведенных ниже значений.

$\nu$	0	0	0	0	0	1	1
$\gamma$	1.4	1.4	1.4	1.4	1.0	1.4	1.0
$\omega$	0.75	0.75	0.75	0.75	любое	0.75	любое
$M_\infty$	2	4	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$y^*$	0.455	0.481	0.483	0.434	0.448	0.237	0.221
$(2\nu + 2)^{-1}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25

Поэтому линейная аппроксимация распределения величины  $\psi$  вполне удовлетворительна.

Для иллюстрации того, к каким ошибкам могут привести сделанные упрощения, на фиг. 2 приведено сравнение результатов приближенного расчета распределения относительных удельных тепловых потоков на конусе со сферическим носком (пунктирные кривые) с данными работы [11] (сплошные кривые). Это сравнение показывает, что изложенная приближенная методика позволяет получить правильную картину распределения тепловых потоков и пригодна для сравнительного анализа влияния формы тела на полный тепловой поток.

### 3. Рассмотрим функционал

$$J = (2\nu + 2)^{-1} y_1^{2\nu+1} + B \int_{y_1}^{y_2} F dy + B \int_{x_2}^{x_3} F y x' dx \quad (3.1)$$

$$F = y^{2\nu} \pi^a \left[ \frac{1 - \pi_\infty}{\pi - \pi_\infty} (1 - \pi^b) \right]^{1/2}, \quad y x' = dy/dx$$

Первая вариация функционала (3.1) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \delta J = & \left[ \frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} y_1^{2\nu} - B \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_1^+ \right] \Delta y_1 - B \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_1^+ \Delta x_1 + \\ & + B \left[ \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_2^- - \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_2^+ \right] \Delta y_2 + B \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^- - \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^+ \right] \Delta x_2 - \\ & - B \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \delta x dy + B \int_{x_2}^{x_3} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{x'} + \frac{d}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right) \right] \delta y dx \end{aligned}$$

Индексом 1 обозначены величины в точке стыковки прямой  $x = 0$  с экстремалью (точка 1), а индексом 2 — величины в точке стыковки экстремали с прямой  $y = y_3$  (точка 2). Параметры слева от точки стыковки отмечены индексом  $-$ , а справа — индексом  $+$ . Функционал (3.1) принимает минимальное значение, если при любом возможном варьировании контура

$$\delta J \geq 0 \quad (3.2)$$

При определении возможных изменений координат точки 1 следует учитывать следующее обстоятельство. Торцевой участок крайнего экстремума тогда, когда любое возможное изменение формы торца приводит к увеличению или уменьшению полного теплового потока. Известно [12], что изменение формы затупления в звуковой области оказывает существенное влияние на распределение газодинамических параметров почти во всей дозвуковой области течения. При этом удельный тепловой поток, который определяется газодинамическими параметрами, будет зависеть от всей картины обтекания, а не только от локальных значений переменных  $x, x', y$ . Поэтому в рассматриваемой приближенной постановке контур оптимального тела должен удовлетворять дополнительному условию, связанному с областью применимости формулы (2.7). Это условие состоит в том, что возможно варьирование лишь ординаты  $y_1$  точки 1, а  $\Delta x_1 = 0$ , если задана длина тела.

В точке 2 имеем  $\Delta y_2 \leq 0$ , а  $\Delta x_2$  произвольно. На экстремали  $\delta x$  произвольно, а на прямой  $y = y_3$  возможное варьирование ограничено условием  $\delta y \leq 0$ . Условия выполнения неравенства (3.2) будут

$$\frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} y_1^{2\nu} - B \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_1^+ = 0 \quad (3.3)$$

$$\left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_2^- - \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right)_2^+ \leq 0 \quad (3.4)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^- - \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_2^+ = 0 \quad (3.5)$$

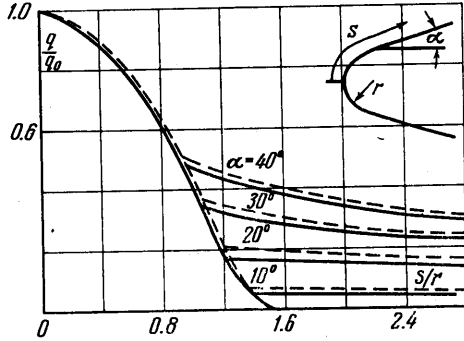
$$\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0 \quad (x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{x'} + \frac{d}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial x'} x' \right) \leq 0 \quad (y = y_3) \quad (3.7)$$

Условия (3.3), (3.5), (3.6) являются необходимыми условиями экстремума, а условия (3.4), (3.7) — необходимыми условиями минимума на участке крайнего экстремума. Необходимое условие минимума на экстремали (условие Лежандра) имеет вид

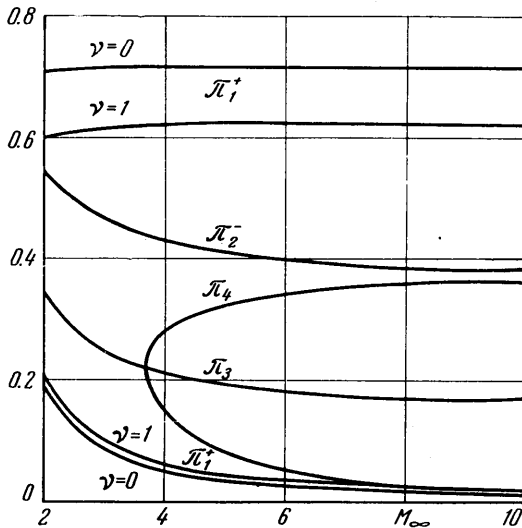
$$\partial^2 F / \partial x'^2 \geq 0 \quad (3.8)$$

Соотношение (3.3) служит для вычисления величины  $\lambda_1^+$ , а следовательно и  $(x')_1^+$ , т. е. определяет наклон экстремали в точке стыковки с плоским торцем.



Фиг. 2

Решение уравнения (3.3) при  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$  представлено на фиг. 3 в виде зависимости величины  $\pi_1^+$  от числа  $M_\infty$  для плоского ( $\nu = 0$ ) и осесимметричного ( $\nu = 1$ ) случаев, причем решение является двухзначным. Однако тела, контур которых содержит торце и участок экстремали, соответствующей



Фиг. 3

большому значению  $\pi_1^+$  из уравнения (3.3), должны быть исключены из рассмотрения, так как, по предположению, звуковая точка соответствует стыку торца с экстремалью, а на экстремали реализуется сверхзвуковое течение ( $\pi_1^+ < 0.528$  для  $\gamma = 1.4$ ). В точке 2 имеем  $(x')_2^+ = \infty$ ,  $\pi_2^+ = \pi_\infty$ , и из соотношения (3.5) можно определить  $\pi_2^-$ , а затем  $(x')_2^-$ , т. е. угол наклона экстремали. Кроме тривиального решения  $\pi_2^- = \pi_\infty$ , уравнение (3.5) имеет еще одно решение, которое приведено на фиг. 3 при  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ . Однако в этом случае условия минимума (3.4) и (3.7) не выполняются, и поэтому контур тела с минимальным тепловым потоком не может содержать участка постоянной толщины. На экстремали необходимое условие минимума (3.8) выполняется лишь при  $\pi \leq \pi_3$ , где  $\pi_3$  — корень уравнения  $\partial^2 F / \partial x^2 = 0$ . Зависимость величины  $\pi_3$  от числа  $M_\infty$  показана на фиг. 3 (при  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$ ). Для всех значений чисел  $M_\infty$  меньшее значение  $\pi_1^+$  меньше  $\pi_3$ , т. е. на экстремали в точке стыковки с торцем выполняется необходимое условие минимума (3.8). Следовательно контур тела с минимальным тепловым потоком может состоять из торца и участка экстремали или только из участка экстремали, на котором выполняется условие Лежандра (3.8).

Так как  $\pi_2^- > \pi_3$ , то при выполнении условия экстремума (3.5) будет выполняться необходимое условие максимума на экстремали в точке стыковки с участком постоянной толщины. При этом выполняются также необходимые условия максимума в точке 2 и на прямой  $y = y_3$ . Поэтому контур тела с максимальным тепловым потоком может состоять из экстремали, на которой  $\pi > \pi_3$ , и участка постоянной толщины.

Уравнение Эйлера (3.6) один раз интегрируется

$$y^{2\nu} f(x') = C \quad (3.9)$$

$$f(x') = \pi^a \left[ \frac{1 - \pi}{1 - \pi_\infty} (1 - \pi^b) \right]^{1/2} \frac{\pi - \pi_\infty}{\pi} \left( 2a - 1 - b \frac{\pi^b}{1 - \pi^b} - \frac{\pi_\infty}{\pi - \pi_\infty} \right)$$

В плоском случае ( $\nu = 0$ ) решение уравнения (3.9) имеет вид  $x' = \text{const}$ , и экстремальными будут прямые. Следовательно, плоским оптимальным телом может быть клин, полуугол которого удовлетворяет условию

$$\alpha < \alpha_3, \quad \alpha_3 = \arcsin \left( \frac{\pi_3 - \pi_\infty}{1 - \pi_\infty} \right)^{1/2}$$

или затупленный клин, угол наклона образующей которого определяется условием стыковки в точке 1

$$\alpha_1 = \arcsin \left( \frac{\pi_1^+ - \pi_\infty}{1 - \pi_\infty} \right)^{1/2}$$

В зависимости от заданной относительной толщины тела возможны три случая. При  $y_3/x_3 \leq \operatorname{tg} \alpha_1$  оптимальным телом будет клин. При  $\operatorname{tg} \alpha_1 < y_3/x_3 < \operatorname{tg} \alpha_3$  необходимые условия минимума выполняются для клина и затупленного клина, поэтому вопрос об оптимальном теле может быть решен лишь сравнением полных тепловых потоков для обоих тел. При  $y_3/x_3 \geq \operatorname{tg} \alpha_3$  оптимальным телом будет затупленный клин.

В осесимметричном случае ( $\nu = 1$ ) решение уравнения (3.9) находится в параметрическом виде

$$y = C^{1/2} [f(z)]^{-1/2}, \quad x = -1/2 C^{1/2} \int_{z_1}^z z [f(z)]^{-1.5} f'(z) dz$$

причем постоянная интегрирования определяется условием стыковки в точке 1, а  $z_1 = (x')_1^+$ .

Если  $y_1 = 0$ , то  $C = 0$ , и при  $y > 0$  должно выполняться соотношение

$$2a - 1 - b \frac{\pi^b}{1 - \pi^b} - \frac{\pi_\infty}{\pi - \pi_\infty} = 0$$

Это уравнение имеет два, один или ни одного корня  $\pi_4$  в зависимости от числа  $M_\infty$  (фиг. 3). Экстремалами в этом случае будут прямые, угол наклона которых определяется формулой

$$\alpha_4 = \arcsin \left( \frac{\pi_4 - \pi_\infty}{1 - \pi_\infty} \right)^{1/2}$$

На экстремали, которая соответствует меньшему значению  $\pi_4$ , удовлетворяющему условию  $\pi_4 < \pi_3$  (фиг. 3), выполняется необходимое условие минимума (3.8). Следовательно, оптимальным телом при определенной относительной толщине ( $y_3/x_3 = \operatorname{tg} \alpha_4$ ) будет конус.

Так как в некоторых случаях имеется несколько относительных минимумов, то необходимо провести сравнение полных тепловых потоков для различных тел.

Для простейших контуров интеграл в формуле (2.8) вычисляется. Для затупленного клина

$$\chi^2 = 0.44 \left\{ \frac{y_1}{2x_3} + B(\pi_1^+)^a \left( \frac{1 - \pi_\infty}{\pi_1^+ - \pi_\infty} [1 - (\pi_1^+)^b] \right)^{1/2} \frac{y_3 - y_1}{x_3} \right\}$$

$$y_1 = y_3 - x_3 / (x')_1^+$$

Для затупленной пластины и цилиндра

$$\chi^2 = 0.44 \left[ \frac{1}{2\nu + 2} \frac{y_3}{x_3} + B\pi_\infty^a (1 - \pi_\infty^b)^{1/2} \right]$$

Для клина и конуса

$$\chi^2 = \frac{0.44B}{2\nu + 1} \pi^a \left[ \frac{1 - \pi_\infty}{\pi - \pi_\infty} (1 - \pi^b) \right]^{1/2} \frac{y_3}{x_3},$$

$$\pi = (1 - \pi_\infty) [1 + (x_3/y_3)^2]^{-1} + \pi_\infty$$

Для заостренной пластины и заостренного цилиндра

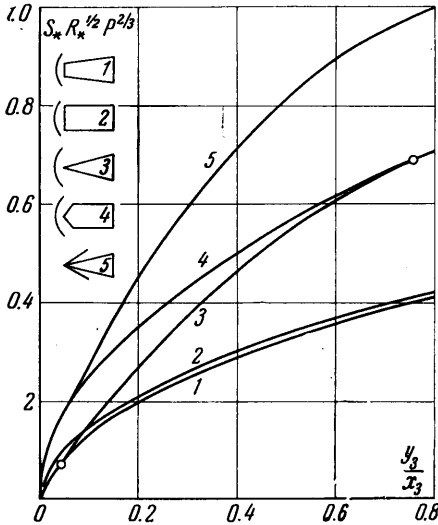
$$\chi^2 = 0.44B \left\{ \frac{1}{2\nu + 1} (\pi_2^-)^a \left( \frac{1 - \pi_\infty}{\pi_2^- - \pi_\infty} [1 - (\pi_2^-)^b] \right)^{1/2} \frac{y_3}{x_3} + \right.$$

$$\left. + \pi_\infty^a (1 - \pi_\infty^b)^{1/2} \left( 1 - \frac{x_2}{x_3} \right) \right\}, \quad x_2 = y_3 (x')_2^-$$

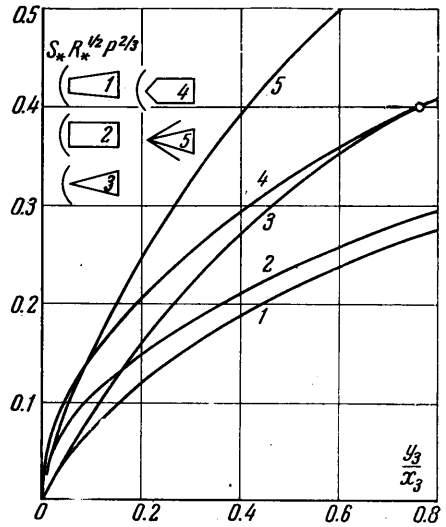
Результаты расчета тепловых потоков для различных тел при  $M_\infty = \infty$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\omega = 0.75$  представлены на фиг. 4 ( $\nu = 0$ ) и на фиг. 5 ( $\nu = 1$ ). Светлым кружком обозначена точка слияния кривых 3 и 4, соответствующая вырождению заостренной пластины (или цилиндра) в клин (или конус), причем в этой точке

$$y_3/x_3 = \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \alpha_2 = \arcsin \left( \frac{\pi_2^- - \pi_\infty}{1 - \pi_\infty} \right)^{1/2}$$

В плоском случае (фиг. 4) точка слияния кривых 1 и 3, соответствующая условию  $y_3/x_3 = \operatorname{tg} \alpha_1$ , также обозначена светлым кружком. Оптимальным телом при  $y_3/x_3 \leq \operatorname{tg} \alpha_1$  будет клин, а при  $y_3/x_3 > \operatorname{tg} \alpha_1$  — затупленный клин. Аналогичные результаты получаются и при конечных числах  $M_\infty$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

В осесимметричном случае при  $M_\infty = \infty$  оптимальным будет затупленное тело с выпуклой образующей (фиг. 5, кривая 1). Для конечных значений чисел  $M_\infty$  и  $y_3/x_3 = \operatorname{tg} \alpha_1$  оптимальным телом будет конус. Для больших значений  $y_3/x_3$  оптимальным будет затупленное тело с вогнутой ( $M_\infty < 12$ ) или выпуклой ( $M_\infty > 12$ ) образующей.

При обтекании клина или конуса с присоединенной ударной волной формула (1.7) принимает вид

$$\chi^2 = \frac{0.44}{2\nu + 1} \frac{\rho_{\text{ш}} \mu}{\rho_\infty u_\infty \mu_\infty} \frac{\rho_\infty u_\infty \mu_\infty}{\rho_* u_* \mu_*} \left[ 1 + \left( \frac{y_3}{x_3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Результаты расчета теплового потока по этой формуле также приведены на фиг. 4, 5 (кривая 5), причем параметры на поверхности тела и критические параметры за прямой ударной волной определялись по таблицам [13]. Оказывается, что тепловой поток больше для заостренных тел, при обтекании которых образуется присоединенная ударная волна, чем для затупленных тел, при обтекании которых образуется отошедшая ударная волна. Следовательно, тело с минимальным тепловым потоком следует искать среди тел с затупленной передней частью, для которых справедлива формула Ньютона (2.1).

В заключение можно указать еще на одно интересное обстоятельство. Если вместо условия постоянства длины тела задано условие  $x_3 - x_1 \leq l$ , где  $l$  — максимально допустимая длина, то  $\Delta x_1 \geq 0$ , и имеется еще одно необходимое условие минимума функционала  $(\partial F / \partial x')_1^+ \leq 0$ . Это условие выполняется при  $M_\infty > 18.7$  (для плоского случая) и при  $M_\infty > 12$  (для осесимметричного случая), и оптимальное тело будет иметь максимальную длину  $l$ . При  $M_\infty < 18.7$  ( $\nu = 0$ ) и  $M_\infty < 12$  ( $\nu = 1$ ) уменьшение длины тела приводит к уменьшению теплового потока, и оптимальным телом будет торцев  $x = x_3$ ,  $0 \leq y \leq y_3$ .



4. Для проверки результатов расчета было проведено экспериментальное исследование тепловых потоков при обтекании сверхзвуковым потоком нагретого газа пяти тел различной формы с относительной толщиной  $y_3/x_3 = 0,36$  (цилиндра с углом наклона образующей  $\text{tg } \alpha = 0$ ; затупленных конусов с  $y_1/y_3 = 0,61$ ,  $\text{tg } \alpha = 0,14$  и с  $y_1/y_3 = 0,20$ ,  $\text{tg } \alpha = 0,28$ ; конуса с  $\text{tg } \alpha = 0,36$  и заостренного цилиндра с  $x_2/x_3 = 0,46$ ,  $\text{tg } \alpha = 0,78$ ). Эксперименты проводились в аэродинамической трубе с электродуговым подогревом при  $M_\infty = 4,6$  и  $R_\infty = 700-1000$ .

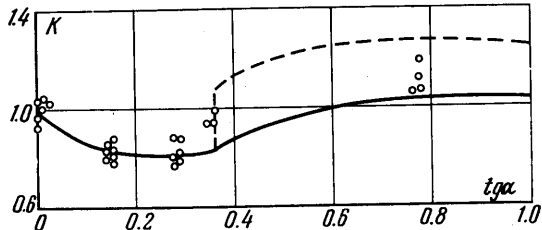
Ввиду того что воздух при высоких температурах не является совершенным газом с постоянным значением показателя адиабаты  $\gamma$ , сравнивались не абсолютные, а относительные значения расчетных и экспериментальных величин.

В качестве исходной была величина  $(S_\infty R_\infty^{1/2} P^{2/3})_0$ , характеризующая тепловой поток для цилиндра, причем определяющими параметрами были параметры невозмущенного потока. Зависимость расчетных и экспериментальных значений величины

$$K = S_\infty R_\infty^{1/2} P^{2/3} (S_\infty R_\infty^{1/2} P^{2/3})_0^{-1}$$

от тангенса угла наклона образующей, которая характеризует форму тела, показана на фиг. 6.

Сплошная кривая соответствует обтеканию с отошедшей ударной волной, а пунктирная — обтеканию с присоединенной ударной волной. Наименьший тепловой поток воспринимают затупленные конуса, которые близки к оптимальному телу. Обтекание конуса и заостренного цилиндра происходит с образованием присоединенной ударной волны, при этом тепловой поток увеличивается. Таким образом, экспериментальные данные подтверждают характер влияния формы тела на тепловой поток, полученный расчетным путем.



Фиг. 6

Поступило 12 IX 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брэдфилд В. С., Боллингер И. Г. Сравнительный анализ теплообмена аппаратов трех различных форм, влетающих в атмосферу со скоростью  $M = 12$ . Сб. «Вопросы ракетной техники». Изд. иностр. лит., 1957, № 1, стр. 50—66.
2. Столдер И. Проблемы теплопередачи при гиперзвуковых полетах. Сб. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия», Изд. иностр. лит., 1959, стр. 96—114.
3. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
4. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
5. Крайко А. Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 484—495.
6. Гонор А. Л. Определение формы пространственного оптимального тела с учетом силы трения. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4, стр. 24—30.
7. Поляков М. Б., Щербак Я. С. Тонкий профиль сверхзвукового крыла с минимальным средним коэффициентом теплоотдачи при заданных аэродинамических характеристиках. Изв. высш. учебн. завед. Авиационная техника, 1965, № 4, стр. 52—61.
8. Сб. «Современное состояние аэродинамики больших скоростей». (под ред. Хоурта Л.). Изд. иностр. лит., 1955.
9. Авдучевский В. С., Данилов Ю. И., Кошкин В. К., Кутырин И. Н., Михайлова М. М., Михеев Ю. С., Сергель О. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. Оборонгиз, 1960.
10. Черный Г. Г. Гиперзвуковое обтекание крыльев при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2, стр. 302—305.
11. Стетсон К. Ф. Исследование абляции конических моделей. Сб. «Вопросы ракетной техники». Изд. иностр. лит., 1966, № 2, стр. 17—23.
12. Лив Л. Современное состояние аэродинамики гиперзвуковых течений. Сб. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия», Изд. иностр. лит., 1959, стр. 40—95.
13. Кибардин Ю. А., Кузнецов С. И., Любимов А. Н., Шумяцкий Б. Я. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока. Госанергоиздат, 1961.