

## МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В. П. АНДРЕЕВ

(Москва)

Рассматриваемый метод последовательных приближений для одномерных нестационарных задач позволяет свести решение к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Движение газа ограничивается, с одной стороны, движущимся по произвольному закону поршнем, с другой — либо скачком уплотнения, либо волной разрежения, распространяющимися по газу с заданными произвольными параметрами. Проводится сравнение некоторых точных решений с полученными приближенными решениями.

1. Как показано Н. Е. Кочиним [1], произвольный разрыв приводит к появлению тангенциального разрыва. В каждую из двух сторон от него могут двигаться либо один скачок уплотнения, либо два слабых разрыва, ограничивающих волну разрежения.

Тангенциальный разрыв всегда может быть заменен жесткой стенкой, представляющей плоский, цилиндрический или сферический поршень, поэтому любое одномерное движение можно рассматривать как совокупность движений, ограниченных, с одной стороны, движущимся поршнем и, с другой — либо скачком уплотнения, либо волной разрежения, распространяющимися по газу с заданными произвольными параметрами.

Пользуясь постоянными  $r_0$ ,  $c_0$  и  $\rho_0$ , имеющими соответственно размерности длины, скорости и плотности [2, 3], легко перейти в рассматриваемой задаче к безразмерным функциям и безразмерным переменным.

Если ввести

$$R = \frac{r_2}{r_0}, \quad R_1 = \frac{r^0}{r_0}, \quad q = \frac{c_0}{c}, \quad \tau = \frac{c_0}{r_0} t, \quad \mu = \frac{m}{m_2} \quad (1.1)$$

и искомые безразмерные функции

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \quad f = \frac{u - u_2}{c_0} + 1, \quad g = \frac{v}{v_2}, \quad h = \frac{p}{p_2}, \quad \varepsilon = \frac{e}{e_2} \quad (1.2)$$

то известная система уравнений в форме Лагранжа [4] описывающая одномерные нестационарные течения газа, примет вид

$$j = 1 + k_1 + \frac{1}{q} \left( \lambda + R \frac{\partial \lambda}{\partial R} - y_2 \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right), \quad g = \lambda^{\nu-1} y_1 \left[ \frac{y_3}{y_1} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + R^{\nu-1} F_1 \left( \frac{y_1}{y_3} R^{\nu \mu} \right) \right] \\ \varepsilon = \varepsilon(R, q, \tau, h, g) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mu} = - \frac{y_1}{y_3} \frac{\lambda^{\nu-1}}{k_2 q} \left( R \frac{dk_1}{dR} + R \frac{\partial f}{\partial R} - y_2 \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right)$$

$$\frac{R \varepsilon}{k_3} \frac{dk_3}{dR} + R \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} - y_2 \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} + \frac{k_2}{k_3 y_1} h \left( \frac{R}{y_1} \frac{dy_1}{dR} + R \frac{\partial g}{\partial R} - y_2 \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \right) = F_2$$

В выражениях (1.1) — (1.3) величина  $\nu = 1, 2, 3$  — параметр симметрии;  $r$  — эйлерова координата;  $m$  — лагранжева (массовая) координата;  $t$  — время;  $c$  — скорость фронта ударной волны или волны разрежения;  $r^0$  — радиус поршня, являющийся произвольной функцией времени  $t$ ;  $u$  — массовая скорость;  $v$  — удельный объем;  $p$  — давление;  $e$  — внутренняя энергия единицы массы газа; индексом 2 обозначены фронтовые значения соответствующих величин, а  $y_1, y_2, y_3$  и  $k_1, k_2, k_3$  — известные безразмерные функции от  $R, q, \tau$  при заданном распределении параметров газа перед фронтом ударной волны или волны разрежения, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\rho_0 v_2}, & y_2 &= \frac{r_2}{m_2} \frac{dm_2}{dr_2}, & y_3 &= \frac{\rho_1 r_2^\nu}{m_2} \\ k_1 &= \frac{u_2}{c_0}, & k_2 &= \frac{p_2}{\rho_0 c_0^2}, & k_3 &= \frac{e_2}{c_0^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\rho_1$  — плотность в невозмущенном газе.

В системе (1.3) функция  $\varepsilon(R, q, \tau, h, g)$  — известная безразмерная, определяемая термодинамическими свойствами газа и его уравнением состояния;  $F_2(R, q, \tau, \mu, \lambda, f, g, h, \varepsilon)$  — известная безразмерная функция, характеризующая приток энергии к газу;  $F_1(y_1 R^\nu \mu / y_3)$  — функция, появляющаяся в результате интегрирования уравнения неразрывности и определяемая на основании краевых условий соотношением

$$F_1\left(\frac{y_1}{y_3} R^\nu\right) = \frac{1}{y_1 R^{\nu-1}} \left[ 1 - \frac{y_3}{y_2} (1 - k_1 q) \right] \quad (1.5)$$

Краевые условия для системы (1.3) имеют вид

$$\lambda = f = g = h = \varepsilon = 1 \quad \text{при } \mu = 1, \quad \lambda = R_1/R \quad \text{при } \mu = 0 \quad (1.6)$$

Интеграл энергии для системы (1.3) в безразмерных величинах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\rho_0 r_0^\nu c_0^2} + \int_{R_0}^R k_2 h(R, 0) R_1^{\nu-1} \frac{dR_1}{dR} dR + \int_{R_0}^R \left( \frac{1}{2} k_1^2 + k_3 \right) \frac{d}{dR} \left( \frac{y_1}{y_3} R^\nu \right) dR = \\ = \frac{y_1 R^\nu}{2 y_3} \int_0^1 (k_1 - 1 + f)^2 d\mu + \frac{y_1 R^\nu}{y_3} k_3 \int_0^1 \varepsilon d\mu \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $E_0$  — суммарная энергия, приобретаемая газом от различных процессов, сопровождающих движение, предполагаемая известной функцией;  $R_0$  — начальное значение безразмерного радиуса фронта  $R$ .

При конкретном задании вида функций  $\varepsilon$  и  $F_2$  систему уравнений (1.3) всегда можно свести к уравнению в частных производных относительно  $\lambda$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mu^2} = \Psi \left( R, q, \tau, \mu, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \frac{\partial \lambda}{\partial R}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R^2}, \frac{\partial^2 \lambda}{\partial R \partial \mu} \right) \quad (1.8)$$

с краевыми условиями

$$\lambda = 1, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = y_2^{-1} (1 - k_1 q) \quad \text{при } \mu = 1 \quad (1.9)$$

$$\lambda = R_1/R \quad \text{при } \mu = 0 \quad (1.10)$$

Если движение газа ограничено с одной стороны фронтом ударной волны, закон движения которого заранее неизвестен, то три величины  $R$ ,  $q$  и  $\tau$ , любая из которых может быть принята за независимую переменную, связаны всего лишь одним соотношением

$$d\tau / dR = q \quad (1.11)$$

В этом случае условие (1.10) представляет дополнительную связь к уравнению (1.11), налагаемую на три величины  $R$ ,  $q$  и  $\tau$ , так что уравнения (1.8) и (1.11) вместе с условиями (1.9) и (1.10) образуют замкнутую систему, имеющую единственное решение.

В задачах с волнами разрежения фронт волны и его скорость представляют собой известные функции времени  $t$ . В связи с этим величины  $R$ ,  $q$  и  $\tau$  связаны между собой, и любая из них, например,  $R$  может быть принята за независимую переменную.

Так как закон движения поршня произвольный, то второй слабый разрыв, являющийся внутренней границей волны разрежения, в общем случае будет находиться внутри интервала  $0 \leq \mu \leq 1$ , и закон его движения будет описываться некоторой величиной

$$\mu_0 = \mu_0(R) \quad (1.12)$$

На линии (1.12) величины  $u$ ,  $v$ ,  $p$  и  $e$  претерпевают слабый разрыв, ввиду чего  $\partial^2 \lambda / \partial \mu^2$  меняется скачком. Поэтому целесообразно интервал  $0 \leq \mu \leq 1$  разбить на два интервала:  $0 \leq \mu \leq \mu_0$  и  $\mu_0 \leq \mu \leq 1$ , в каждом из которых  $\lambda$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Если обозначить индексом 1 безразмерные функции в интервале  $\mu_0 \leq \mu \leq 1$ , а индексом 2 — в интервале  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ , то

$$\lambda_1 = 1, \quad \partial \lambda_1 / \partial \mu = y_2^{-1}(1 - k_1 q) \quad \text{при } \mu = 1 \quad (1.13)$$

в силу непрерывности решения

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \partial \lambda_1 / \partial \mu = \partial \lambda_2 / \partial \mu \quad \text{при } \mu = \mu_0(R) \quad (1.14)$$

$$\text{и } \lambda_2 = R_1 / R \quad \text{при } \mu = 0 \quad (1.15)$$

Условия (1.13) и (1.14) — краевые условия для уравнения (1.8) при отыскании решения соответственно в интервалах  $\mu_0 \leq \mu \leq 1$  и  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ . Поскольку  $\mu_0(R)$  заранее не определена, ее выбор позволяет удовлетворить оставшемуся условию (1.15). Таким образом, нестационарные одномерные задачи с волнами разрежения в безразмерных переменных и безразмерных функциях будут иметь единственное решение в каждом из интервалов  $1 \geq \mu \geq \mu_0$  и  $\mu_0 \geq \mu \geq 0$ , а также определять закон движения внутренней поверхности слабого разрыва  $\mu_0(R)$ .

2. Система уравнений (1.3) интересна тем, что все безразмерные функции распределения газодинамических величин определяются в явном виде из первых четырех уравнений, если известна зависимость  $\lambda$  от  $\mu$ .

Первоначально можно предположить степенную зависимость [2, 3]

$$\lambda_0 = a\mu^\alpha + b \quad (2.1)$$

Однако принципиально возможны и другие варианты задания первоначальной связи между лагранжевой и эйлеровой координатами в виде определенных монотонно возрастающих функций в интервале изменения  $\mu$ , содержащих по три произвольных параметра.

В дальнейшем следует различать случаи одномерных нестационарных движений газа с ударными волнами и с волнами разрежения.

В первом случае на основании условий (1.9) и (1.10) коэффициенты в выражении для  $\lambda_0$  определяются формулами

$$a = 1 - \frac{R_1}{R}, \quad b = \frac{R_1}{R}, \quad \alpha = \frac{1 - k_1 q}{y_2(1 - R_1/R)} \quad (2.2)$$

Тогда из первых четырех уравнений в (1.3) можно определить в явном виде нулевые приближения для значений функций распределения

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0\left(R, q, \tau, \frac{dq}{dR}, \mu\right), & h_0 &= h_0\left(R, q, \tau, \frac{dq}{dR}, \frac{d^2q}{dR^2}, \mu\right) \\ g_0 &= g_0\left(R, q, \tau, \frac{dq}{dR}, \mu\right), & \varepsilon_0 &= \varepsilon_0\left(R, q, \tau, \frac{dq}{dR}, \frac{d^2R}{dR^2}, \mu\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Временно не использованное уравнение энергии в (1.3) удобно заменить интегральным законом сохранения энергии (1.7). Тогда после подстановки в него нулевых приближений из (2.1) и (2.3) уравнение (1.7) определит дополнительную связь между величинами  $R$ ,  $q$  и  $\tau$ , которая вместе с (1.11) даст систему обыкновенных уравнений для отыскания закона движения фронта ударной волны. Начальные условия для решения системы получаются из равенства массовой скорости и ускорения газа на поршне в начальный момент времени соответственно скорости и ускорению самого поршня.

После определения закона движения фронта

$$q = q(R), \quad \tau = \tau(R) \quad (2.4)$$

первые приближения для функций распределения газодинамических величин могут быть найдены, если  $\lambda$  задать в виде

$$\lambda = \alpha\varphi^\alpha(\mu) + b \quad (2.5)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  — уже известные функции от  $R$ .

Тогда из (1.8) для  $\varphi(\mu)$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в которое  $R$  входит как параметр, и крайними условиями для которого являются

$$\varphi(1) = 1, \quad (d\varphi/d\mu)_1 = 1 \quad (2.6)$$

вытекающие из (1.9).

В силу (1.10), должно выполняться

$$\varphi(0) = 0 \quad (2.7)$$

Таким образом, (2.7) — единственное невыполненное условие, в результате чего оно может служить количественным критерием отличия полученного приближенного решения от истинного.

Нахождение очередных приближений для закона движения фронта и безразмерных функций распределения газодинамических величин связано только с повторением цикла расчета и не приводит ни к увеличению объема вычислений, ни к дополнительным математическим трудностям. Это положение особенно важно при использовании электронных вычислительных машин.

Если бы удалось доказать, что последовательность значений  $\varphi(0)$ , получаемых на каждом приближении, стремится к нулю, то это доказало бы сходимость предположенного метода. Нестрогое доказательство сходимости вытекает из единственности решения рассматриваемой задачи, однако доказать это более строго в общем случае пока не удалось.

В случае одномерных нестационарных задач с волнами разрежения  $\lambda_0$  как степенную функцию от  $\mu$  следует задать в каждом интервале изменения  $\mu$

$$\lambda_{1,0} = a_1 \mu^{\alpha_1} + b_1, \quad \lambda_{2,0} = a_2 \mu^{\alpha_2} + b_2 \quad (2.8)$$

Для определения функций  $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2$  от  $R$  в выражениях (2.8), к которым следует добавить также неизвестные значения  $\mu_0(R)$  и безразмерное давление на поршне  $h_2(R, 0)$ , имеются условия (1.13), (1.14), (1.15), интеграл энергии (1.7) и соотношение  $h_1 = h_2$ , выполняющееся на внутренней поверхности слабого разрыва при  $\mu = \mu_0(R)$ , т. е. семь уравнений, часть из которых алгебраические, а часть — дифференциальные. Восьмое уравнение может быть получено из условия, что плотность на поршне конечна.

При задании  $\lambda_2$  в виде (2.8) плотность в области, примыкающей к поршню, определяется выражением

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{y_1} (a_2 \mu^{\alpha_2} + b_2)^{1-\nu} \left[ \frac{y_3}{y_1} a_2 a_2 \mu^{\alpha_2-1} + R^{\nu-1} F_1 \left( \frac{y_1}{y_3} R^{\nu} \mu \right) \right]^{-1} \quad (2.9)$$

Так как  $F_1$ , согласно (1.5), зависит только от параметров невозмущенного газа и может тождественно равняться нулю, то для конечности плотности газа на поршне необходимо, чтобы

$$\alpha_2 = 1 \quad \text{при } b_2 \neq 0, \quad \alpha_2 = 1/\nu \quad \text{при } b_2 = 0 \quad (2.10)$$

т. е. при наличии поршня  $\alpha_2 = 1$ , а если поршень вырождается в ось или центр симметрии, то  $\alpha_2 = 1/\nu$ .

Восемь соотношений, которые сводятся в общем случае к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяют определить величины  $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \mu_0(R), h_2(R, 0)$ .

Начальные условия для этих уравнений вытекают из условия равенства в начальный момент времени массовой скорости газа и его ускорения соответственно скорости и ускорению поршня.

После нахождения  $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \mu_0(R), h_2(R, 0)$  первые приближения для функций распределения газодинамических величин могут быть найдены заданием  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в виде

$$\lambda_{1,1} = a_1 \varphi_1^{\alpha_1}(\mu) + b_1, \quad \lambda_{2,1} = a_2 \varphi_2^{\alpha_2}(\mu) + b_2 \quad (2.11)$$

где  $\varphi_1(\mu)$  и  $\varphi_2(\mu)$  удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, получающимся из (1.8) после подстановки в него  $\lambda_{1,1}$  и  $\lambda_{2,1}$  из (2.8). Величина  $R$  входит в эти уравнения как параметр, а крайними условиями для них будут соответственно условия

$$\varphi_1(1) = 1, \quad (d\varphi_1/d\mu)_1 = 1, \quad \varphi_2(\mu_0) = \mu_0, \quad (d\varphi_2/d\mu)_{\mu_0} = 1 \quad (2.12)$$

Соотношение (1.15) переходит в условие

$$\varphi_2(0) = 0 \quad (2.13)$$

Так как в полученном приближенном решении условие (2.13) непосредственно не используется, то отличие  $\varphi_2(0)$  от нуля служит количественной характеристикой точности полученного приближения.

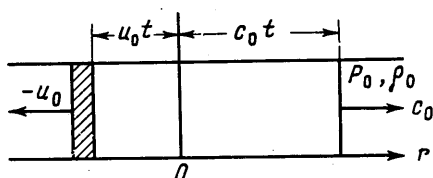
Аналогичным образом могут быть найдены последующие приближения, определяющие закон движения внутренней поверхности слабого разрыва и распределение газодинамических величин, причем их отыскание, как и в задачах с ударными волнами, связано только с повторением цикла и не приводит ни к каким дополнительным математическим трудностям.

3. Обоснованием предложенного метода и оценкой быстроты его сходимости может служить сравнение точных и приближенных решений некоторых одномерных нестационарных задач.

Очевидно, и это подтвердили многочисленные проверки, при наличии степенной связи между  $\lambda$  и  $\mu$  вида (2.1) приближенное решение полностью совпадает с точным [2-4], поэтому интерес вызывают те задачи, в которых эта связь отсутствует.

Здесь приводится решение задачи о сильном взрыве [2], являющейся одной из таких задач, полученное на основании первого приближения.

Нулевые функции распределения, полученные в предположении степенной связи между  $\lambda$  и  $\mu$ , после подстановки в интеграл энергии, сразу определяют закон движения фронта ударной волны, по внешнему виду совпадающий с законом, полученным в точном решении



$$c^2 = \frac{4}{(\nu + 2)^2} \frac{1}{\alpha} \frac{E_0}{\rho_0} r_2^{-\nu} \quad (3.1)$$

при этом коэффициент  $\alpha = \frac{4\delta}{\nu(\nu + 2)^2(\nu^2 - 1)} \frac{2(\nu - 1) + \nu(\nu + 1)}{2(\nu - 1) + \nu(3\nu - 1)}$  (3.2)

$$\alpha = \frac{4\delta}{\nu(\nu + 2)^2(\nu^2 - 1)} \frac{2(\nu - 1) + \nu(\nu + 1)}{2(\nu - 1) + \nu(3\nu - 1)}$$

В выражениях (3.1) и (3.2) величина  $E_0$  — энергия взрыва,  $\rho_0$  — плотность невозмущенного газа,  $\nu$  — показатель адиабаты

$$\delta = 2\pi(\nu - 1) + (\nu - 2)(\nu - 3)$$

Значения  $\alpha$ , рассчитанные для различных  $\nu$  и  $\nu$  по формуле (3.2), с точностью до построения совпадают с соответствующими точными значениями  $\alpha$ , приведенными в [2].

Значения безразмерных функций распределения

$$\lambda = r/r_2, \quad f = u/u_2, \quad g = \rho/\rho_2, \quad h = p/p_2$$

в зависимости от  $\mu$  для  $\nu = 1.4$  и  $\nu = 1, 2, 3$  также будут полностью совпадать с соответствующими точными значениями из [2] (таблица приведена для  $\nu = 1$ ).

$\mu$	$\lambda$	$f$	$g$	$h$
0.886875	0.979699	0.969863	0.861984	0.915876
0.715312	0.942000	0.915652	0.666186	0.791659
0.450073	0.856505	0.801681	0.398075	0.611882
0.197977	0.702897	0.626282	0.182304	0.466123
0.052872	0.491196	0.424394	0.064071	0.403743
0.015630	0.374999	0.298792	0.026312	0.392870
0.003771	0.232000	0.198912	0.009488	0.390474
0.000227	0.103999	0.089143	0.001275	0.390029
0.000018	0.050005	0.042862	0.000204	0.390018
$6.3 \cdot 10^{-8}$	0.010004	0.008575	0.000004	0.390023

Таким образом, уже первое приближение дает хорошее совпадение с точным решением. Такое же хорошее совпадение с точным решением дает первое приближение и в задаче о точечном взрыве с учетом противодействия [5].

Легко провести вычисления изложенным методом для задачи об адиабатическом движении волны разрежения по неподвижному идеальному газу, возникающем от плоского поршня, движущегося с постоянной скоростью  $u_0$ . Схема такого движения представлена на фигуре и решение будет точно совпадать с приведенным в [5].

Поступило 23 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kotchine N. Rendiconti del Circolo Mat. de Palermo, 1926, 50.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, изд. 5-е. Изд-во «Наука», 1965.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред, изд. 2-е. Гостехиздат, 1954.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, гл. XII, §§ 15, 22, 23. Физматгиз, 1963.
5. Охоцкий Д. Е., Кондрашева И. А., Власов З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1957, т. 50.