

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ ПЛАСТИН В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Д. Н. ГОРЕЛОВ, Л. В. ДОМИНАС

(Новосибирск)

Общее решение задачи о пространственном неустановившемся течении газа через решетку пластин было получено в работе [1]. Ниже показано, что в рассматриваемых прямой и обратной аэродинамических задачах могут существовать нетривиальные решения при однородных граничных условиях. Режимы течения, при которых существуют такие решения, можно трактовать как аэродинамический резонанс.

Приведенные примеры расчета для решетки пластин иллюстрируют поведение нестационарных аэродинамических сил вблизи режимов аэродинамического резонанса и позволяют оценить пределы применимости гипотезы плоских сечений. Кроме того, результаты расчета показывают возможность автоколебаний решеток пластин с одной степенью свободы в дозвуковом потоке газа.

§ 1. В работе [1] указано, что потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ нестационарного движения газа около решетки пластин в линейном приближении удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} + \frac{2Mc}{a(1-M^2)} \varphi_{xt} - \frac{c^2}{a^2(1-M^2)} \varphi_{tt} = 0 \quad (1.1)$$

и граничным условиям, выражающим условия непроницаемости пластин, непрерывности давления в следе и периодичности потока¹,

$$\varphi_y = \frac{c}{\sqrt{1-M^2}} v_y(x_j, y_j) e^{i(\nu t + j\psi)} \quad \text{при} \quad \begin{cases} y_j = 0, |x_j| \leq 1 \\ 0 \leq z_j \leq 2\Lambda \end{cases} \quad (1.2)$$

$$[\varphi_t - c^{-1} V \varphi_x]_{y_j=+0} = [\varphi_t - c^{-1} V \varphi_x]_{y_j=-0} \quad \text{при} \quad \begin{cases} -\infty < x_j < -1, \\ 0 \leq z_j \leq \Lambda \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z + 4\Lambda, t), \quad v_y(x, z) = v_y(x, z + 4\Lambda) \quad (1.4)$$

$$(M = V/a, \Lambda = \lambda \sqrt{1-M^2}, \lambda = l/b)$$

Здесь V — скорость набегающего потока; a — скорость звука; c — полухорда пластин; λ — удлинение пластины; l — длина пластины; ν — круговая частота колебаний; ψ — сдвиг фаз между колебаниями соседних пластин; x_j, y_j, z_j — система прямоугольных безразмерных координат, связанная с j -й пластиной ($j = 0, \pm 1, \dots$).

Координаты x, y, z связаны с x_j, y_j, z_j соотношениями

$$x_j = x + 2j\tau^{-1} \sin \beta, \quad y_j = y' - 2j\tau^{-1} \sqrt{1-M^2} \cos \beta, \quad z_j = z \quad (1.5)$$

где τ — плотность, β — угол выноса решетки.

В дополнение к условиям (1.2) — (1.4) в бесконечном удалении перед решеткой требуется выполнение принципа излучения, а на выходных краях пластин — постулата Жуковского.

¹ Ниже исправлены несущественные опечатки, замеченные в работе [1].

Решение задачи (1.1) — (1.4) построено в виде¹ [1]

$$\varphi(x, y, z, t) = e^{ivt} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x_j} \left[\frac{1}{2} (\Phi_j^{(0)} + \Psi_j^{(0)}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_j^{(n)} + \Psi_j^{(n)}) \cos \frac{n\pi z}{2\Lambda} \right] \quad (1.6)$$

Здесь

$$\sigma = kM^2 / (1 - M^2), \quad k = vc / V \quad (1.7)$$

а функции $\Phi_j^{(n)}(x_j, y_j)$, $\Psi_j^{(n)}(x_j, y_j)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Phi_j^{(n)} - \mu^2 \Phi_j^{(n)} = 0, \quad \Delta \Psi_j^{(n)} - \mu^2 \Psi_j^{(n)} = 0 \quad (1.8)$$

$$\mu^2 = \frac{k^2 M^2}{(1 - M^2)^2} \left[\frac{n^2 \lambda_*^2}{\lambda^2} - 1 \right] \quad \left(\lambda_* = \frac{\pi}{2kM} \sqrt{1 - M^2} \right) \quad (1.9)$$

и следующим граничным условиям: условию непротекания в точках разреза $y_j = 0$, $|x_j| \leq 1$

$$\frac{\partial \Phi_j^{(n)}}{\partial y_j} = \frac{c}{\sqrt{1 - M^2}} v_{yn}(x_j) e^{i(\sigma x_j + j\psi)}, \quad \frac{\partial \Psi_j^{(n)}}{\partial y_j} = \frac{c}{\sqrt{1 - M^2}} u_{yn}(x_j) e^{i(\sigma x_j + j\psi)} \quad (1.10)$$

условию непрерывности давления на разрезе $y_j = 0$, $-\infty < x_j < -1$, постулату Жуковского в точке $y_j = 0$, $x_j = -1$, а в бесконечно удаленной точке — условию затухания возмущений, если $\mu^2 \geq 0$, или принципу излучения, если $\mu^2 < 0$.

В условии (1.10) функция v_{yn} определяется через заданную функцию $v_y(x, z)$

$$v_y(x, z) = \frac{1}{2} v_{y0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_{yn}(x) \cos \frac{n\pi z}{2\Lambda} \quad (1.11)$$

$$v_{yn}(x) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{2\Lambda} v_y(x, z) \cos \frac{n\pi z}{2\Lambda} dz \quad (n=0, 1, \dots)$$

Функция $u_{yn}(x)$ выражается аналогично через искомую функцию $u_y(x, z)$.

Таким образом, выражение (1.6) для φ , которое содержит заранее известную функцию $u_y(x, z)$, удовлетворяет всем условиям задачи (1.1) — (1.4), кроме условия непротекания (1.2).

Требую выполнения этого условия на всех пластинах решетки, получим уравнение для определения искомой функции $u_{yn}(x)$ [1]

$$\frac{1}{2} \vartheta_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_{nm} \cos m\eta + \sum_{m=0}^{\infty} (\vartheta_{nm} + \vartheta_{nm}) \chi_m^{(n)}(\eta) = 0 \quad (n=0, 1, \dots) \quad (1.12)$$

$$\chi_m^{(n)}(\eta) = \sum_{\substack{j=-\infty \\ (j \neq 0)}}^{\infty} X_{mj}^{(n)}(\eta) \exp \{i(j\psi - \sigma x_j)\}, \quad \eta = \arccos x \quad (|x| \leq 1) \quad (1.13)$$

Здесь $X_{mj}^{(n)}(\eta)$ — известные функции, ϑ_{nm} , ϑ_{nm} — коэффициенты Фурье для заданной и искомой функций $v_{yn}(\cos \eta)$, $u_{yn}(\cos \eta)$ соответственно.

Уравнение (1.12) можно свести либо к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, как это сделано в работе [1], либо, применяя

¹ Во всех последующих формулах значение $n = 0$ соответствует задаче о плоском течении газа через решетку пластин.

метод коллокаций, — к конечной системе алгебраических уравнений. В любом из этих случаев уравнение (1.12) принимает вид

$$A\theta_n = X\theta_n, \quad A = X + B \quad (n=0, 1, \dots) \quad (1.14)$$

Здесь θ_n — заданный, а ϕ_n — искомый векторы, X — известная прямоугольная матрица.

Матрица B для первого случая равна единичной матрице E , а при решении задачи методом коллокаций компоненты матрицы B определяются равенствами

$$b_{r2} = 1/2, \quad b_{rm} = \cos(m-1)\eta_r, \quad \eta_r = \arccos x_r \quad (r, m=1, 2, \dots)$$

где x_r — координаты точек, в которых выполняется уравнение (1.12).

Давление потока на пластины решетки определяется уравнением Коши-Лагранжа, которое устанавливает связь между давлением жидкости в точках пластины с нормальными составляющими скорости движения пластин. Если, аналогично векторам θ_n и ϕ_n , ввести вектор p_n давления жидкости на исходную пластину, то, в соответствии с формулой (4.2) работы [1] и соотношением (1.12),

$$C\theta_n = p_n, \quad C = F(E - A^{-1}X) \quad (n=0, 1, \dots) \quad (1.15)$$

Здесь F — некоторая известная прямоугольная матрица, остальные матрицы определены выше.

Выражение (1.15) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений, соответствующих обратной аэродинамической задаче, когда по заданному распределению давления потока по пластине (вектору p_n) определяется закон деформации этой пластины (вектор θ_n).

Прямой аэродинамической задаче, определяющей закон распределения давления потока по пластине через заданное распределение нормальных составляющих скоростей движения пластины, соответствует система уравнений

$$Dp_n = \theta_n, \quad D = C^{-1} = B^{-1}AF^{-1} \quad (n=0, 1, \dots) \quad (1.16)$$

§ 2. Представляет интерес исследовать возможность существования нетривиальных решений систем однородных линейных алгебраических уравнений, соответствующих прямой и обратной аэродинамической задачам. В этом случае собственные значения матриц C и D определяют собственные частоты колебаний газа в рассматриваемой решетчатой области. Если эти частоты совпадают с частотой колебаний пластин решетки или с частотой вынужденных колебаний газа, то возникнет явление аэродинамического резонанса [2-6]. Необходимым условием существования нетривиальных решений однородных уравнений (1.15), (1.16) является обращение в нуль определителей матриц C и D .

Выясним, прежде всего, условия обращения в нуль (собственные значения) определителя матрицы C для обратной аэродинамической задачи. Определитель $|C| = 0$, если $|E - A^{-1}X| = 0$. Из определения матриц A и X следует, что последнее равенство возможно при условии, когда определитель матрицы A (или X) стремится к бесконечности, так как в этом случае $A^{-1}X \rightarrow E$. Иначе говоря, собственные значения матрицы C можно определять как условия обращения в бесконечность определителя матрицы A . Элементы матрицы A определяются через функции $\chi_m^{(n)}$, которые, в свою очередь, выражаются рядами по функциям $X_{mj}^{(n)}$ (см. формулу (1.13)). Сходимость этих рядов и определяет в конечном счете возможность обращения в бесконечность определителя матрицы A . Для выяснения сходимости рядов (1.13) найдем асимптотические выражения для функций $X_{mj}^{(n)}$ при $|j| \gg 1$.

Прежде всего найдем асимптотические выражения для эллиптических координат ξ_j, η_j , связанных с j -й пластиной решетки ($j = 0, \pm 1, \dots$). Эти координаты связаны с декартовыми координатами x_j, y_j соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \xi_j &= -1/2(1 - x_j^2 - y_j^2) + \sqrt{1/4(1 - x_j^2 - y_j^2)^2 + y_j^2}, \\ \sin \eta_j &= y_j / \operatorname{sh} \xi_j, \quad \cos \eta_j = x_j / \operatorname{ch} \xi_j \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из формул (1.5), (2.1) следует, что

$$x_j \sim 2j\tau^{-1} \sin \beta, \quad y_j \sim 2j\tau^{-1} \cos \beta \sqrt{1 - M^2} \quad \text{при } |j| \gg 1 \quad (2.2)$$

Отсюда

$$\operatorname{sh} \xi_j \sim \operatorname{ch} \xi_j \sim 2\tau^{-1}|j| \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \beta} \quad (2.3)$$

Асимптотические формулы для функций $X_{mj}^{(n)}$, являющихся решением уравнений Гельмгольца (1.8), с учетом выражений (2.2), (2.3) можно привести к следующему виду:

$$X_{mj}^{(n)} \sim \operatorname{const} e^{-v} / \sqrt{v} \quad \text{при } \mu^2 > 0 \quad (2.4)$$

где const не зависит от j , а

$$v = 1/2|\mu|e^{\xi_j} \sim 2|\mu j|\tau^{-1} \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \beta}. \quad (2.5)$$

При $\mu^2 < 0$, если пластины колеблются в покоящемся на бесконечности газе ($V = 0, kM = vc/a$), то¹

$$X_{mj}^{(n)} \sim \operatorname{const} v^{-3/2} e^{-iv} \quad (2.6)$$

а при колебаниях решетки пластин в потоке ($V \neq 0$)

$$X_{mj}^{(n)} \sim \operatorname{const} v^{-1/2} e^{-iv} \quad (2.7)$$

В соответствии с асимптотическими формулами (2.4), (2.6), можно утверждать, что ряд (1.13) в рассматриваемых случаях сходится при всех значениях параметров решетки и потока.

Что касается случая $\mu^2 < 0, V \neq 0$, для которого имеет место формула (2.7), то здесь сходимость ряда (1.13) зависит от сходимости двух сумм

$$\sum_{j=\pm N}^{\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{|j|}} \exp[i(j\psi - \sigma x_j - v)] \quad (N \gg 1). \quad (2.8)$$

Эти суммы, в соответствии с интегральным признаком Коши, сходятся при всех значениях параметров, кроме тех, которые удовлетворяют условию

$$j\psi - \sigma x_j - v = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (2.9)$$

Если учесть формулы (1.7), (1.9), (2.2) и (2.5), то условие (2.9) можно записать в виде

$$\psi = 2m\pi + \frac{2kM}{\tau(1 - M^2)} \left\{ M \sin \beta \pm \left[\left(1 - \frac{n^2 \lambda_*^2}{\lambda^2} \right) (1 - M^2 \cos^2 \beta) \right]^{1/2} \right\} \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (2.10)$$

Таким образом, если параметры решетки и потока удовлетворяют условиям (2.10), то элементы матрицы A обращаются в бесконечность, а определитель матрицы C соответственно — в нуль.

¹ Именно для этого случая справедливо замечание о сходимости рядов (1.13), сделанное в работе [6].

Это позволяет сделать вывод, что соотношение (2.10) определяет собственные числа матрицы C , а вместе с ними, и условия возникновения аэродинамического резонанса.

В случае обтекания решетки пластин плоским дозвуковым потоком газа ($n = 0$) условие (2.10) примет вид¹

$$\psi = 2m\pi + \frac{2kM}{\tau(1-M^2)} [M \sin \beta \pm \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \beta}] \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (2.11)$$

В частном случае решетки без выноса, профили которой колеблются в противофазе, условие (2.11) принимает вид

$$(2m + 1)\pi = \frac{2kM}{\tau\sqrt{1-M^2}} \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (2.12)$$

Это совпадает с условием аэродинамического резонанса, отмеченного в работе [3].

Условие (2.11) для плоского потока имеет вполне определенный смысл. При этом условии в любой фиксированной точке плоскости становится бесконечной скорость возмущения, индуцированная бесконечной цепочкой точечных диполей с интенсивностью $\gamma_0 \exp\{i(vt + j\psi)\}$, расположенных на расстоянии h друг от друга вдоль прямой, составляющей угол $(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ с направлением скорости V набегающего дозвукового потока газа. Здесь γ_0 , ν — амплитуда и круговая частота изменения интенсивности j -го диполя ($j = 0, \pm 1, \dots$), $2k/\tau = \nu h/V$.

При помощи соотношения (2.12) можно вывести еще одно условие аэродинамического резонанса для пространственной решетки пластин.

Действительно, условие периодичности (1.4) позволяет перейти к рассмотрению бесконечной решетки в направлении оси z , течение газа в которой для рассматриваемого закона колебаний, определяемого в соответствии с формулой (1.11) функцией $v_{yn}(x) \cos(n\pi z/2\Lambda)$, меняется периодически по четному закону через отрезки длиной $4\Lambda/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Это приводит к тому, что деформации пластин новой решетки в точках $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 \pm (2m + 1)2\Lambda/n$ (x_0, y_0, z_0 — координаты фиксированной точки на одной из пластин, $m = 0, 1, \dots$) будут находиться в противофазе одна к другой.

При решении задачи пластины такой бесконечной решетки можно заменить системой диполей с шагом $(2m + 1)2\Lambda/n$, интенсивность которых меняется со сдвигом фазы $\psi = \pi$. Но в этом случае, как было указано, могут возникнуть бесконечно большие возмущения в потоке, если расстояние между диполями, частота изменения их интенсивности и скорость набегающего потока удовлетворяют условию (2.12), в котором $\tau = n/(2m + 1)\lambda$. Сравнивая формулы (2.12) и (1.9), приходим к выводу, что для пространственной решетки пластин, расположенных между двумя плоскостями, следует ожидать появления еще одного резонанса при

¹ Формула (3.5) в работе [6] неверна и должна быть заменена на (2.11). Это обстоятельство было отмечено Г. С. Самойловичем в работе [2], в которой дан иной вывод соотношения (2.11). К сожалению, в этот вывод вкралась ошибка. Окончательная формула, определяющая условия резонанса для случая $M < 1$, в обозначениях [2], имеет вид

$$\nu = \alpha(M \sin \gamma \pm \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \gamma}) (2\pi m + \alpha) / t$$

Кроме того, вызывает сомнение вывод автора о незатухании возмущений в бесконечном удалении перед решеткой при сверхрезонансной частоте колебаний профилей.

удлинении пластин

$$\lambda = \frac{2m+1}{n} \lambda_* \quad (m=0, 1, \dots; n=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

Таким образом, доказана возможность существования нетривиальных решений обратной аэродинамической задачи (1.15) при соответствующих однородных граничных условиях. Соотношения (2.10), (2.13), определяющие собственные значения матрицы C , можно трактовать как условия возникновения аэродинамического резонанса.

Выясним характер поведения нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на пластины решетки на режимах течения, приближающихся к рассмотренному выше аэродинамическому резонансу.

При заданном законе деформаций пластин решетки уравнение Коши-Лагранжа (1.15) позволяет определить распределение давления по пластине для каждой формы колебаний, определяемой функцией $v_{yn}(x) \cos(n\pi z/2\Lambda)$, где $n = 0, 1, \dots$. Предположим теперь, что при некотором фиксированном значении n соотношения между параметрами решетки и потока таковы, что они удовлетворяют условиям (2.10) или (2.13). В этом случае определитель $|C| \rightarrow 0$, а вместе с ним стремится к нулю и вектор давлений потока p_n , так как вектор θ_n предполагается заданным и отличным от нуля.

Таким образом, на режимах аэродинамического резонанса, соответствующего обратной аэродинамической задаче (1.15), при некотором фиксированном значении $n = 0, 1, \dots$, обращается в нуль та часть аэродинамических сил и моментов, которая определяется законом колебания пластин вида $v_{yn}(x) \cos(n\pi z/2\Lambda)$. В частном случае плоского течения газа, когда $n = 0$, при выполнении условия (2.11) все возмущения давления потока на профилях плоской решетки равны нулю.

Обращение в нуль части давления на пластинах решетки имеет вполне определенный физический смысл. А именно, при выполнении условий (2.10), (2.13) соответствующая волна возмущений давления такова, что узлы ее находятся на пластинах решетки, а лучности, например, — в середине межпрофильного канала. Это и приводит к тому, что давление потока в точках пластин не зависит от соответствующего закона колебаний пластин.

Перейдем к рассмотрению прямой аэродинамической задачи, определяемой в настоящем случае системой линейных алгебраических уравнений (1.16). Как отмечено выше, обращение в нуль определителя D этой системы (условие существования нетривиального решения прямой аэродинамической задачи при однородных граничных условиях) определяет условия аэродинамического резонанса. Получение аналитических зависимостей между параметрами решетки и потока, при которых может возникнуть этот резонанс, в общем случае не представляется возможным. Однако в частном случае обтекания решетки пластин без выноса плоским дозвуковым потоком газа такие зависимости были получены аналитически из других соображений в работах В. Б. Курзина [4, 5].

В работе [5] приведены следующие условия возникновения аэродинамического резонанса

$$(2.14)$$

$$k = |^{1/2}\pi M^{-1} \{ (1 - M^2) [r^2\tau^2 + m^2(1 - M^2)] \}^{1/2} \quad (r = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots)$$

$$k = ^{1/2}\pi\tau M^{-1}m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

Для случая решетки без выноса соотношение (2.14) дает условие аэродинамического резонанса, при котором период колебаний профилей решетки кратен времени прохождения волны возмущения давления от одно-

го открытого конца межпрофильного канала до другого. Второе соотношение (2.15) дает условие кратности частоты колебаний профилей с временем прохождения возмущения от одного профиля до другого, и обратно [5]¹.

Можно показать, используя результаты работ [4, 5], что при условии (2.14) действительно существует нетривиальное решение прямой аэродинамической задачи типа (1.16) при соответствующих однородных граничных условиях.

При колебаниях пластин решетки давление потока на них растет по мере приближения к режиму аэродинамического резонанса, соответствующего прямой аэродинамической задаче. Это утверждение можно доказать, исходя из уравнений (1.15), (1.16). Действительно, на режимах резонанса определитель $|D| = 0$, или, что эквивалентно, обращается в бесконечность определитель матрицы C . Это приводит к тому, что давление потока на пластины решетки, определяемое уравнением Коши-Лагранжа (1.15), при отличных от нуля амплитудах колебаний пластин обращается в бесконечность, если $|D| = 0$.

Этим указанный вид аэродинамического резонанса существенным образом отличается от рассмотренного выше резонанса, соответствующего обратной аэродинамической задаче.

Следует отметить, что специального расчета по определению условий обращения в нуль определителя матрицы D не проводилось. Поэтому трактование в работе [5] некоторых численных результатов для решетки пластин с выносом, как соответствующих режиму аэродинамического резонанса, требует, строго говоря, своего обоснования.

Что касается пространственной решетки пластин, то для нее можно указать еще одно соотношение, при котором может возникнуть аэродинамический резонанс. Действительно, выше указывалось, что рассматриваемую пространственную решетку можно периодически продолжить вдоль оси z . При этом в направлении оси z получится решетка без выноса с густотой $\tau = b/l = 1/\lambda$. Применяя условие (2.15), справедливое для плоской волны возмущения, получим, что в пространственной решетке возможен аэродинамический резонанс, если

$$k_m = m\pi / (2M\lambda) \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

Этот резонанс соответствует кратности времени прохождения плоской волны возмущения от одной плоскости к другой и обратно с периодом колебаний пластин решетки, расположенных между этими плоскостями.

§ 3. Перейдем к непосредственному расчету нестационарных аэродинамических сил и моментов, действующих на пластины решетки. В качестве примера рассмотрим случай, когда закон колебаний пластин в направлении оси y задан в виде

$$y(x, z, t) = \alpha(t)X(1 - \cos(\pi Z/l)) \quad (3.1)$$

Здесь X, Z — размерные координаты рассматриваемой точки поверхности пластины. Тогда нормальная составляющая скорости движения пластины в точке X, Z равна

$$V\alpha(t)[\frac{1}{2}v_{y0} + v_{y1} \cos(\pi Z/l)] \quad (2v_{y0} = -v_{y1} = +1 - ikX/c) \quad (3.2)$$

Этот случай соответствует крутильным колебаниям пластин с переменной амплитудой закрутки вдоль оси z . Аэродинамические сила и момент, действующие на единицу длины пластины, представляются в виде

$$\begin{aligned} \Delta P(Z, t) &= \frac{1}{2}\rho_0 V^2 b C_{y\alpha}(Z) \alpha(t), & C_{y\alpha} &= C_{y\alpha}' + iC_{y\alpha}'' \\ \Delta M(Z, t) &= \frac{1}{2}\rho_0 V^2 b^2 C_{m\alpha}(Z) \alpha(t), & C_{m\alpha} &= C_{m\alpha}' + iC_{m\alpha}'' \end{aligned} \quad (3.3)$$

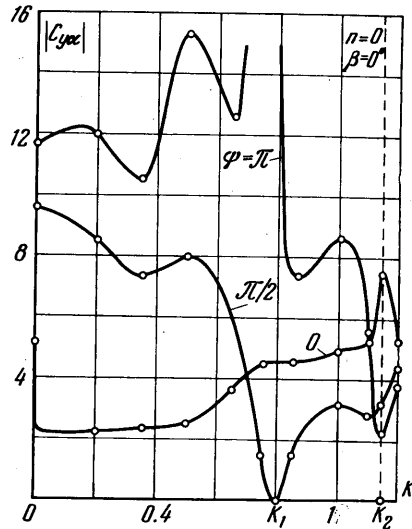
где ρ_0 — плотность невозмущенного потока, b — хорда пластин ($b = 2c$), а $\Delta P, \Delta M$ определяются формулами (4.5), (4.6) работы [1]. Следует отметить, что в рассматриваемом случае эти формулы будут содержать только два слагаемых, соответствующих значениям $n = 0, 1$. Коэффициенты θ_{nm} определяются заданной формой колебаний (3.2) и равны $\theta_{00} = -\theta_{10} = -2, \theta_{01} = -\theta_{11} = ik, \theta_{nm} = 0$ при $n, m \geq 2$, а коэффициенты ϕ_{nm} суть решения уравнения (1.12). Это уравнение решалось методом коллокаций с учетом шести первых значений коэффициентов ϕ_{nm} ($n = 0, 1; m = 0, 1, \dots, 5$). При расчете функций $\chi_m^{(n)}(\eta)$ учитывались асимптотические оценки (2.4) — (2.7), определяющие быстроту сходимости рядов (1.13). В соответствии с этими оценками при вычислении $\chi_m^{(n)}$ значения j принимались: $|j| \leq 30$ — для $\mu^2 < 0$ и $|j| \leq 5$ — для $\mu^2 > 0$. В обоих случаях это обеспечивало достаточную точность расчета.

¹ Аэродинамический резонанс, определяемый условием (2.15), реализуется, видимо, для случая течения газа в канале с плоскими стенками.

Расчет коэффициентов C_{ya} , C_{ma} проводился на ЭВМ для решетки с параметрами: $\tau = 1$, $\beta = 60^\circ$ в широком диапазоне изменения удлинения пластин λ . При этом число Струхала выбиралось равным $k = 0.5$, а числа Маха $M = 0$ и 0.7 . Сдвиг фазы между колебаниями соседних пластин изменялся на $\Delta\psi = 0.1\pi$ в диапазоне $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Кроме того, был проведен расчет решетки пластин без выноса ($\beta = 0$) в плоском дозвуковом потоке газа ($n = 0$, $M = 0.7$) при ряде значений числа Струхала k и для сдвига фазы $\psi = 0$, $1/2\pi$, π . Цель этого расчета заключается в выяснении характера действия аэродинамических нагрузок вблизи режимов аэродинамического резонанса, условия возникновения которого для плоской решетки пластин определяются формулами (2.11), (2.14) и (2.15). Некоторые результаты расчета приведены на фиг. 1, 2¹.

На фиг. 1 показана зависимость амплитуды коэффициента аэродинамических сил $|C_{ya}|$ от числа Струхала k для трех значений сдвига фазы ψ . Число Струхала $k = k_1$ определяется формулой (2.11) при $\psi = 1/2\pi$ и представляет собой собственное значение матрицы C обратной аэродинамической задачи. Величина $k = k_2$ определена из формулы (2.14) при $r = 0$, $m = 1$ и является собственным значением матрицы D прямой аэродинамической задачи. Результаты расчета показывают, что на режимах резонанса, соответствующего обратной аэродинамической задаче, амплитуда сил действительно обращается в нуль, а вблизи режима другого аэродинамического резонанса происходит довольно резкое изменение амплитуды аэродинамических сил независимо от сдвига фазы колебаний пластин. Следует отметить, что погрешность расчета при приближении к режимам аэродинамического резонанса возрастает. Поэтому значение $|C_{ya}| = 0$ в точке $k = k_1$ взято в соответствии с теоретическим выводом.

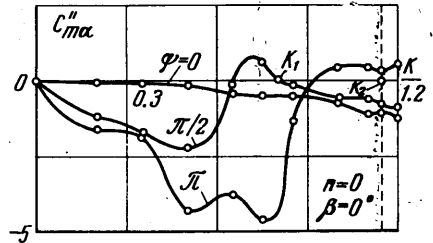


Фиг. 1

На фиг. 2 представлены результаты расчета мнимой части коэффициента аэродинамического момента C_{ma}'' , определяющей аэродинамическое демпфирование пластин решетки, в зависимости от числа Струхала k . При $C_{ma}'' > 0$ аэродинамическое демпфирование становится отрицательным, что, при отсутствии сил трения в системе, приводит к крутильным автоколебаниям пластин решетки с одной степенью свободы. Интересно отметить, что вблизи режимов аэродинамического резонанса обоих видов при определенных сдвигах фазы могут возникнуть автоколебания плоской решетки пластин без выноса. Что касается точки $k = k_1$ (соответствует $\psi = 1/2\pi$), то здесь снова получаем нулевые значения для аэродинамических нагрузок.

На фиг. 3 и 4 представлено изменение модуля коэффициента погонной аэродинамической нагрузки $|C_{ya}|$ вдоль размаха пластины ($\bar{z} = Z/l$) при удлинениях $\lambda = 0, 1, 3$ и ∞ для случая сжимаемой и несжимаемой жидкости при $\psi = \pi$. Значения угла выноса, густоты решетки и числа Струхала фиксированы и указаны выше. Для рассматриваемого случая колебаний (3.1) коэффициент C_{ya} можно представить в виде $C_{ya} = C_{ya0} - C_{ya1} \cos(\pi\bar{z})$, где индексы 0, 1 относятся, соответственно к величинам, вычисляемым при $n = 0$ (плоский поток) и $n = 1$. Случай $\lambda = \infty$ соответствует расчету по гипотезе плоских поперечных сечений, когда погонная аэродинамическая нагрузка при каждом значении \bar{z} зависит от закона деформации пластины только в рассматриваемом сечении. Поэтому $C_{ya} = C_{ya0}[1 - \cos(\pi\bar{z})]$ для $\lambda = \infty$.

Другой предельный случай соответствует значению $\lambda = 0$. Из формулы (1.9) следует, что при $\lambda \rightarrow 0$ параметр $\mu \rightarrow \infty$, если $n \neq 0$. В этом случае решение соответствующей плоской задачи стремится к нулю, что следует из теории функций Маттье (см. [4]). Таким образом, при $\lambda \rightarrow 0$ отличное от нуля решение нашей задачи получается только при $n = 0$, когда μ остается конечным.



Фиг. 2

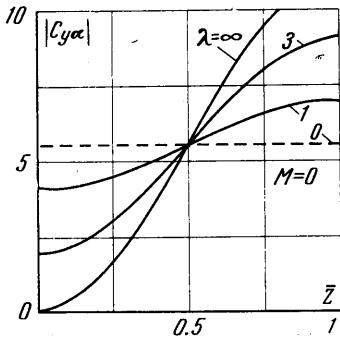
¹ На всех кривых расчетные точки обозначены.

Последний случай соответствует плоскому течению газа около пластины, колеблющейся по осредненному вдоль размаха закону.

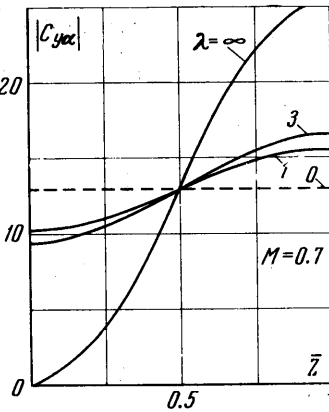
Результаты, представленные на фиг. 3 и 4, показывают, что с уменьшением удлинения пластины происходит существенное выравнивание распределения аэродинамической нагрузки вдоль размаха пластины, особенно в случае сжимаемой жидкости.

Для пластин малого удлинения, когда $\lambda < 1$, погонная аэродинамическая нагрузка практически не зависит от закона деформации пластины в рассматриваемом сечении и определяется по существу нагрузкой в предельном случае $\lambda = 0$.

На фиг. 5 дана зависимость модуля того же коэффициента $|C_{y\alpha}|$ от удлинения пластины λ при $\bar{z} = 1$ (концевое сечение пластины), $\psi = \pi$ и $M = 0, 0.7$. Значение $\lambda = \lambda_*$, в соответствии с формулой (2.13), определяет собственное число матрицы C обратной аэродинамической задачи для $n = 1$. Вследствие этого при $\lambda = \lambda_*$ величина $|C_{y\alpha}|$ должна быть равна ее значению $|C_{y\alpha 0}|$ в плоском потоке (для $n = 0$ или, как было показано, для $\lambda = 0$). Это полностью подтверждается результатами расчета.

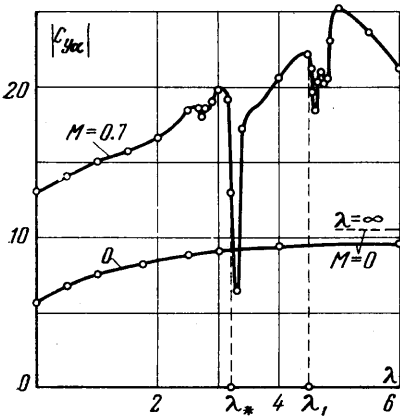


Фиг. 3

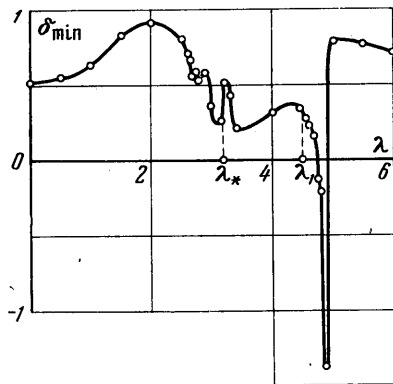


Фиг. 4

Значение $\lambda = \lambda_1$, где λ_1 определяется формулой (2.16), является собственным значением прямой аэродинамической задачи для $n = 1$. При этом значении λ также имеется аэродинамический резонанс, который проявляется резким изменением коэффициента подъемной силы.



Фиг. 5



Фиг. 6

В случае течения несжимаемой жидкости с ростом λ происходит монотонное стремление коэффициента $|C_{y\alpha}|$ к предельному значению.

Результаты фиг. 3—5 позволяют сделать вывод, что в случае несжимаемой жидкости для пластин большого удлинения основной вклад в аэродинамическую нагрузку в рассматриваемом сечении вносит закон деформации пластины в этом сечении.

Поэтому расчет нестационарного обтекания потоком несжимаемой жидкости решеток пластин большого удлинения (в рассматриваемом случае для $\lambda > 5$) по гипотезе плоских сечений оказывается вполне приемлемым.

Этот вывод нельзя распространить на случай дозвукового течения газа вследствие появления аэродинамических резонансов, зависящих от удлинения пластин.

Наконец, как и для случая плоской решетки, выясним величину аэродинамического демпфирования на режимах аэродинамического резонанса. С этой целью была определена работа аэродинамических сил за период колебаний, совершаемая потоком при заданном законе колебаний пластины. Эта работа, подсчитанная как интеграл по площади пластины, оказалась равной

$$W = -\frac{1}{2} \rho_0 V^2 l b^2 \delta, \quad \delta = C''_{m\alpha 0} + \frac{1}{2} C''_{m\alpha 1} \quad (3.4)$$

Значение $\delta > 0$ соответствует режиму затухающих колебаний пластин решетки, а $\delta < 0$ — режиму автоколебаний.

Отметим, что коэффициент δ зависит от сдвига фазы между колебаниями пластин. Так как в реальной турбомашине сдвиг фазы может быть, вообще говоря, любым, то целесообразно определять наименьшее значение δ для всех значений ψ . Зависимость минимальной величины δ_{min} от удлинения пластин решетки λ при $M = 0.7$ приведена на фиг. 6.

Здесь снова при $\lambda = \lambda_*$ аэродинамическое демпфирование определяется только осредненным по размаху пластины законом колебаний (при $n = 1$ соответствующая часть демпфирования обращается в нуль). Вблизи же другого резонансного значения $\lambda = \lambda_1$ наблюдается резкое падение аэродинамического демпфирования в узкой зоне изменения λ , что должно приводить к автоколебаниям с одной степенью свободы пластин рассматриваемой решетки.

Таким образом, решение задачи нестационарного дозвукового течения газа около пространственной решетки пластин позволило выявить целый ряд явлений, существование которых связано с сжимаемостью среды. Можно полагать, что часть этих явлений, а именно, аэродинамический резонанс, соответствующий решению прямой аэродинамической задачи, и автоколебания пластин решетки с одной степенью свободы, могут наблюдаться в реальных турбомашинах.

Поступило 5 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н. Пространственное обтекание лопаточного венца осевой турбомшины дозвуковым нестационарным потоком газа, Изв. АН СССР ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
2. Самойлович Г. С. О резонансных явлениях в аэродинамической решетке, обтекаемой до- или сверхзвуковым потоком, Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
3. Wollston D. S., Runyan H. L. Some considerations on the air forces on a wing oscillating between two walls for subsonic compressible flow. JAS, 1955, No. 1.
4. Курзин В. Б. Колебание решетки тонких профилей в сжимаемом дозвуковом потоке. ПМТФ, 1962, № 1.
5. Курзин В. Б. Об аэродинамической интерференции профилей в дозвуковом нестационарном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
6. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Решетка пластин в дозвуковом нестационарном потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.