О ДИСПЕРСИОННЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ЭФФЕКТАХ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. М. МЕНДЕЛЬСОН, М. И. ШВИДЛЕР

(Уфа, Москва)

Известно, что нерегулярность поля скоростей жидкости в межпоровом пространстве приводит к рассеиванию частиц консервативной примеси, переносимой потоком. Теория этого явления, называемого обычно конвективной дисперсией, описана, например, в работах [1–3] и предполагает, что пористая среда макрооднородна, скорость фильтрации постоянна, что исключает из рассмотрения дисперсионные эффекты второго порядка, обусловленные флуктуациями поля скоростей на макронеоднородностях [1]. В статье делается попытка построения статистической теории, способной описать дисперсию примеси в средах со случайными неоднородностями. Исследуется поле скоростей фильтрации в пористой среде со случайными неоднородностями.

1. Рассмотрим в пространстве (x, y, z) квазиодномерный фильтрационный поток, направленный вдоль оси x. Будем считать течение стационарным, а жидкость несжимаемой и однородной. Тогда для проекций скорости фильтрации можно написать

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.1}$$

Здесь $k = k(x, y, z)$ — случайная проницаемость, $\mu = \text{const}$ — вязкость, p — давление. Используя уравнение неразрывности $u_x + v_y + w_z = 0$, напишем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0 \tag{1.2}$$

которое следует проинтегрировать при тех или иных условиях на границе области течения Г. Для решения задачи воспользуемся методом малых возмущений. Пусть

$$k = \langle k\rangle + k', \qquad p = \langle p\rangle + p_1 \tag{1.3}$$

(угловые скобки означают осреднение по вероятности). Считая $\langle k\rangle = k_0 = \text{const}$, а $\langle p\rangle = p_0$, где $\nabla^2 p_0 = 0$ при соответствующих условиях на границе области, для p_1 можно, пренебрегая малыми второго порядка, написать уравнение

$$\nabla^2 p_1 = -k_0^{-1}\nabla k'\nabla p_0 \tag{1.4}$$

Поскольку течение квазиодномерно и ориентировано вдоль оси x, а средняя скорость фильтрации принимается постоянной,

$$\partial p_0 / \partial x = \text{const}, \qquad \partial p_0 / \partial y = 0, \qquad \partial p_0 / \partial z = 0 \tag{1.5}$$

Уравнение (1.4) перепишется так:

$$\nabla^2 p_1 = -\frac{1}{k_0}\frac{\partial k'}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial x} = -\varphi(x, y, z) \tag{1.6}$$

а его интеграл при условии $p_1 = 0$ на границе Г имеет вид

$$p_1(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,\varphi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' \tag{1.7}$$

где интегрирование производится по всей области течения, а функция Грина G — решение задачи

$$\nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (G = 0 \text{ на границе Г}) \tag{1.8}$$

Если область течения неограничена, то, как известно,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1.9}$$

Используя (1.1) и ограничиваясь малыми первого порядка, можно записать флуктуации скорости, т. е. $u_1 = u - \langle u\rangle$ и т. д., в виде

$$u_1 = -\frac{1}{\mu}\left(k_0\frac{\partial p_1}{\partial x} + k'\frac{\partial p_0}{\partial x}\right), \qquad v_1 = -\frac{k_0}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial y}, \qquad w_1 = -\frac{k_0}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z} \tag{1.10}$$

[1] Необходимость изучения дисперсионных эффектов в макронеоднородных средах указывалась В. М. Шестаковым [4].

Тогда для дисперсии u_1 будем иметь

$$\langle u_1^2\rangle = \frac{1}{\mu^2}\left[k_0^2\left\langle\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2\right\rangle + 2k_0\frac{\partial p_0}{\partial x}\left\langle k'\frac{\partial p_1}{\partial x}\right\rangle + \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2\langle k'^2\rangle\right] \qquad (1.11)$$

Произведем вычисление членов формулы (1.11). Итак,

$$\left\langle k'\frac{\partial p_1}{\partial x}\right\rangle = \frac{1}{k_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}\int G_x(\mathbf{r},\mathbf{r}')K_{x'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' \qquad (1.12)$$

Здесь $K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle k'(\mathbf{r})k'(\mathbf{r}')\rangle$ — корреляционная функция проницаемости. Если случайная функция $k'(\mathbf{r})$ статистически однородна и изотропна, то ее корреляционная функция так же, как и G, зависит от $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Перенося начало координат в точку $\mathbf{r}$ и интегрируя по частям (1.12), предварительно заменив G_x на $-G_{x'}$, можно написать

$$\left\langle k'\frac{\partial p_1}{\partial x}\right\rangle = \frac{1}{k_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}\int G(\mathbf{r})K_{x'x'}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \qquad (1.13)$$

Вводя сферические координаты и выполнив интегрирование в (1.13) по всему пространству, получим после преобразований и при условии $K(\mathbf{r})\to 0$ при $|\mathbf{r}|\to\infty$

$$\left\langle k'\frac{\partial p_1}{\partial x}\right\rangle = -\frac{K(0)}{3k_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} \qquad (1.14)$$

Далее,

$$\left\langle\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{k_0^2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2\iint G_x(\mathbf{r},\mathbf{r}')G_x(\mathbf{r},\mathbf{r}'')K_{x'x''}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}'' =$$
$$= \frac{1}{k_0^2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2\iint G_{x'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')G_{x''}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')K_{x'x''}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}'' \qquad (1.15)$$

Сделаем замену $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1$; $\mathbf{r}''-\mathbf{r}' = \mathbf{r}_2$. Тогда

$$\left\langle\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2\right\rangle = -\frac{1}{k_0^2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2\int B(\mathbf{r}_2)K_{x_2x_2}(\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_2 \qquad (1.16)$$

где

$$B(\mathbf{r}_2) = \int G_{x_1}(\mathbf{r}_1)G_{x_1}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{16\pi^2}\int\frac{x_1(x_1-x_2)}{|\mathbf{r}_1|^3|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\,d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{8\pi|\mathbf{r}_2|}\left(1-\frac{x_2^2}{|\mathbf{r}_2|^2}\right) \qquad (1.17)$$

Подставив (1.17) в (1.16), получим интеграл типа (1.13), вычислив который, найдем

$$\left\langle\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2\right\rangle = \frac{K(0)}{5k_0^2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2 \qquad (1.18)$$

Для $\langle u_1^2\rangle$ можно написать

$$\langle u_1^2\rangle = \frac{8}{15}\zeta_0^2u_0^2 \qquad \left(\zeta_0^2 = \frac{K(0)}{k_0^2},\qquad u_0^2 = \frac{k_0^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2\right) \qquad (1.19)$$

Вычисления дисперсии проекций скорости v_1 и w_1 производятся аналогично и также после довольно громоздких преобразований дают

$$\langle v_1^2\rangle = {}^1/_{15}\zeta_0^2u_0^2,\quad \langle w_1^2\rangle = {}^1/_{15}\zeta_0^2u_0^2$$

Проведенный анализ показывает, что дисперсии компонент скорости фильтрации конечны, определяются коэффициентом вариации проницаемости ζ_0 и средней скоростью u_0. Интересно, что дисперсия u_1 значительно больше дисперсий остальных компонент, что и предопределяет преимущественное рассеяние потока примеси вдоль оси x. Отметим, что проведение аналогичных вычислений корреляционных функций компонент встречает большие затруднения. Сравнительно несложно устанавливается лишь одинаковый порядок радиусов корреляции компонент скорости и проницаемости.

2. Перейдем к рассмотрению рассеяния примеси потоком, поле скоростей которого флуктуирует на макронеоднородностях. При этом естественно использовать лагранжево описание поля. Предполагая пористость m постоянной, будем считать, что макроперенос осуществляется полем «истинной» средней скорости, имеющей эйлеровы компоненты u/m, v/m, w/m. Как было указано, радиус корреляции эйлеровой скорости по порядку совпадает с a-радиусом корреляции проницаемости. Поскольку поле эйлеровых скоростей от времени не зависит, введение эйлерового времени корреляции не имеет смысла. С другой стороны, параметр $\tau\sim am/u_0$ — единственный.

имеющий размерность времени, естественно считать лагранжевым временем корреляции. Аналогично, параметр микроструктуры $\tau \sim \sqrt{k_0 m} / u_0$, с этой же точки зрения, естественно считать лагранжевым временем корреляции для процесса конвективной дисперсии. В то же время очевидно, что дисперсии полей эйлеровой и лагранжевой скоростей одинаковы. Таким образом, известны дисперсии компонент лагранжевой скорости и имеется оценка времени корреляции.

Пусть $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ — координаты блуждающей частицы, а

$$u^*(t) = d\xi / dt, \qquad v^*(t) = d\eta / dt, \qquad w^* = d\zeta / dt \tag{2.1}$$

— компоненты ее скорости. Очевидно, их средние значения имеют вид

$$\langle u^* \rangle = u_0 / m, \qquad \langle v^* \rangle = \langle w^* \rangle = 0 \tag{2.2}$$

Выписав смещения,

$$\xi(t) = \int_0^t u^*(t)\,dt, \qquad \eta(t) = \int_0^t v^*(t)\,dt, \qquad \zeta(t) = \int_0^t w^*(t)\,dt \tag{2.3}$$

легко найти их средние значения за время t

$$\langle \xi(t) \rangle = u_0 t / m, \qquad \langle h(t) \rangle = \langle \zeta(t) \rangle = 0 \tag{2.4}$$

Для средних квадратов смещений будем иметь

$$\begin{gathered}\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t U(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2 = \varphi_1(t) \\ \langle \eta^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t V(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2 = \varphi_2(t), \qquad \langle \zeta^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t W(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2 = \varphi_3(t)\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь U, V, W — корреляционные функции скоростей u^*, v^*, w^*

$$U(t_1, t_2) = \langle [u^*(t_1) - \langle u^*(t_1) \rangle][u^*(t_2) - \langle u^*(t_2) \rangle] \rangle$$

$$V(t_1, t_2) = \langle v^*(t_1) v^*(t_2) \rangle, \quad W(t_1, t_2) = \langle w^*(t_1) w^*(t_2) \rangle$$

Естественно считать u^*, v^*, w^* стационарными случайными функциями времени, что приводит к зависимости U, V, W от $|t_1 - t_2|$.

Как известно, теория конвективной дисперсии основана на гипотезе о марковости процесса блужданий частицы примеси, что позволяет использовать теорию уравнений Колмогорова [5] и выписать уравнения для плотности вероятности — концентрации примеси. Принятие этой гипотезы в определенной степени противоречит представлению о движении частиц вдоль линий тока, о конечности скорости блужданий, дифференцируемости траекторий и т. д. Тем не менее, определенная корреляция теоретических соотношений с экспериментом позволяет надеяться, что уравнения Колмогорова будут достаточным приближением для рассматриваемого круга задач. Хотя в случае рассеяния частиц примеси на флуктуациях макропотока недостатки постулирования марковости процесса должны проявляться сильнее, отсутствие достаточной альтернативы вынуждает и в этом случае остановиться на предположении о марковости процесса блужданий. Итак, поставим в соответствие процессу блужданий частицы некоторый марковский процесс, моментные функции которого (до второго порядка включительно) совпадают с моментными функциями (2.4) и (2.5) изучаемого процесса. Вводя $C(\mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{r}, t)$ — плотность вероятности попадания частицы, находящейся в момент t_0 в точке $\mathbf{r}_0$, в точку $\mathbf{r}$ в момент t, можно написать второе уравнение Колмогорова, порождающее моментные функции (2.4) и (2.5)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{u_0}{m} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[b_1(t) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b_2(t) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + b_3(t) \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right] \tag{2.6}$$

$$b_i(t) = d\varphi_i(t) / dt$$

В отличие от теории конвективной дисперсии, поскольку дисперсия скорости конечна, при $a \to 0$ коэффициенты $b_i \to 0$, т. е. дисперсионные эффекты исчезают.

Пусть начальное распределение концентрации задано соотношением

$$C(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \tag{2.7}$$

Тогда решение уравнения (2.6) может быть записано в виде

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \varphi_1\varphi_2\varphi_3}} \exp\left[-\frac{(x-u_0t\,|\,m)^2}{2\varphi_1} - \frac{y^2}{2\varphi_2} - \frac{z^2}{2\varphi_3}\right] \tag{2.8}$$

Перейдем к вычислению φ_i. Аппроксимируя корреляционные функции выражениями

$$U(t_1, t_2) = \frac{8}{15}\zeta_0^2\frac{u_0^2}{m^2}\exp\left[-\frac{|t_1-t_2|}{\tau}\right]$$

$$V(t_1, t_2) = \frac{1}{15}\zeta_0^2\frac{u_0^2}{m^2}\exp\left[-\frac{|t_1-t_2|}{\tau}\right] = W(t_1, t_2) \tag{2.9}$$

и вычислив интегралы (2.5), найдем

$$\varphi_1(t) = {}^{16}/_{15}\zeta_0^2u_0^2m^{-2}\tau^2[t/\tau - 1 + e^{-t/\tau}], \qquad \varphi_2(t) = \varphi_3(t) = {}^1/_8\varphi_1(t) \tag{2.10}$$

Дифференцируя (2.10), выпишем коэффициенты b_i

$$b_1(t) = {}^{16}/_{15}\zeta_0^2u_0^2\,/\,m^{-2}\tau(1-e^{-t/\tau}), \qquad b_2(t) = b_3(t) = {}^2/_{15}\zeta_0^2u_0^2m^{-2}\tau(1-e^{-t/\tau}) \tag{2.11}$$

Если $t \ll \tau$, то из (2.12) следуют формулы

$$b_1(t) = {}^{16}/_{15}\zeta_0^2u_0^2m^{-2}t, \qquad b_2(t) = b_3(t) = {}^2/_{15}\zeta_0^2u_0^2m^{-2}t \tag{2.12}$$

Напротив, для больших $t \gg \tau$ коэффициенты b_i не зависят от t

$$b_1 = {}^{16}/_{15}\zeta_0^2u_0^2m^{-2}\tau, \qquad b_2 = b_3 = {}^2/_{15}\zeta_0^2u_0^2m^{-2}\tau \tag{2.13}$$

Зависимость φ_i от параметра τ открывает возможность при определенных условиях, интерпретируя натурные замеры $C(r, t)$ при помощи описанной выше теории, находить τ, а через него и радиус корреляции проницаемости $a \sim \tau u_0 / m$.

Аналогично может быть проанализирован важный вариант задачи, когда рассеяние потока происходит на совокупности неоднородностей разных масштабов, некоррелированных между собой. И в этом случае, интерпретируя $C(r, t)$ соответствующим образом, можно получить важные сведения о величинах масштабов, распределении дисперсии по масштабам и т. д.

Очевидно, что для совместного учета дисперсионных эффектов, обусловленных рассеянием на микро- и макронеоднородностях, в уравнении (2.6) к коэффициентам $b_i(t)$ следует добавить постоянные b_i^* — коэффициенты конвективной дисперсии. При малых t из (2.12) следует, что именно b_i^* будут определять процесс рассеяния. Напротив, при достаточно больших ζ_0, τ и t коэффициент b_i может оказаться значительно больше, чем b_i^*.

Поступило 29 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Scheidegger A. E. Statistical hydrodynamics in porous media. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.
2. Saffman P. G. A theory of dispersion in a porous medium. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, No. 3.
3. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
4. Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов при фильтрации из хранилищ промышленных стоков. ВОДГЕО. Научн. сообщ. лаборатории водного хозяйства. М. 1961.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.

Хроника

О присуждении премии имени С. А. Чаплыгина в 1967 году. По представлению экспертной комиссии и Отделения механики и процессов управления Президиум Академии наук СССР постановил:

Присудить премию имени С. А. Чаплыгина 1967 года в размере 1000 рублей кандидату физико-математических наук **КУЛИКОВСКОМУ АНДРЕЮ ГЕННАДЬЕВИЧУ** (Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР) за работы «Об устойчивости однородных состояний» и «Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других плоско-параллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса».