

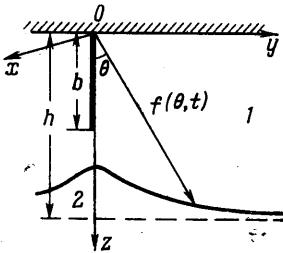
О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Ю. С. АБРАМОВ, Р. М. КАЦ

(Москва)

В работе приводятся интегро-дифференциальные уравнения пространственного движения границы раздела нефти и вытесняющей ее активной подошвенной воды к несовершенной по степени вскрытия пласта скважине при интенсивном отборе нефти из последней. Дано их численное решение на ЭЦВМ. Получены решения этих уравнений на главной линии тока в виде степенного ряда по времени. На их основе предложены формулы, описывающие движение границы раздела вдоль главной линии тока вплоть до момента прорыва воды в скважину.

§ 1. В работе [1] получено функциональное уравнение движения границы раздела нефти и воды в условиях пространственной фильтрации при интенсивном отборе нефти, когда различием удельных весов жидкостей можно пренебречь (жидкости и порода несжимаемые, фильтрация ламинарная, капиллярный эффект не учитывается, вытеснение идет при постоянных насыщенностях в зоне замещения)



Фиг. 1

$$m \frac{\partial F / \partial \tau}{\partial F / \partial n} = \left[\text{grad } W(P_0) + \frac{\lambda m}{2\pi} \int_S \frac{\partial F / \partial \tau}{\partial F / \partial v} \cdot v \cdot M(Q, P_0) dS - \frac{\lambda}{2\pi} \int_S \text{grad } W(Q) \cdot M(Q, P_0) dS \right] \cdot n \quad (1.1)$$

$$\lambda = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}, \quad c_1 = \frac{k}{\mu_1}, \quad c_2 = \frac{k}{\mu_2}$$

Здесь c_1 и c_2 — подвижности, а μ_1 и μ_2 — динамические вязкости нефти и воды соответственно; k и m — проницаемость и пористость однородного пласта; S — поверхность раздела нефти и воды (считается поверхностью Ляпунова). Ее уравнение

$$F(P_0, \tau) = F(Q, \tau) = 0 \quad (1.2)$$

где $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — точки границы раздела, а τ — время; $n(P_0)$ и $v(Q)$ — внешние нормали к поверхности границы раздела; $W(P_0)$ — некоторая функция, являющаяся решением уравнения Лапласа при заданных условиях на границах области фильтрации всюду внутри этой области, за исключением точек (линий), имитирующих скважины, где она имеет полюсы первого порядка. Иными словами, $W(P_0)$ — потенциал скоростей при фильтрации однородной жидкости. Ядро интегралов в функциональном уравнении есть квадратная матрица вида

$$M(Q, P_0) = \begin{vmatrix} \text{grad } \omega \cdot v & [\text{grad } \omega \times v]_3 & -[\text{grad } \omega \times v]_2 \\ -[\text{grad } \omega \times v]_3 & \text{grad } \omega \cdot v & -[\text{grad } \omega \times v]_1 \\ [\text{grad } \omega \times v]_2 & -[\text{grad } \omega \times v]_1 & \text{grad } \omega \cdot v \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$\omega(Q, P_0) = [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2]^{-1/2} + \omega_0(Q, P_0)$$

Здесь $\omega_0(Q, P_0)$ — гармоническая и не имеющая в рассматриваемой области фильтрации особенностей функция такого вида, что вектор скорости фильтрации

$$V = -\text{grad } W(P) + \frac{1}{4\pi} \int_S M(Q, P) q(Q) dS$$

где $P(x, y, z)$ — любая точка области фильтрации, а $q(Q)$ — некоторый потенциальный вектор, заданный в области фильтрации, удовлетворяет граничным условиям. Выражения $[\text{grad } \omega \times v]_i$ ($i = 1, 2, 3$) обозначают компоненты векторного произведения векторов $\text{grad } \omega$ и v , а $\text{grad } \omega \cdot v$ — скалярное произведение тех же векторов.

Поверхностные интегралы в уравнении (1.1) — несобственные, понимаются в смысле главного значения по Коши.

Для уравнения (1.1) должна быть решена задача Коши при начальном условии

$$F(P_0, \tau_0) = F_0(P_0) = 0. \quad (1.4)$$

§ 2. Рассматривается осесимметричная деформация первоначально плоской границы раздела между нефтью и водой в бесконечном по протяженности пласте с непроницаемой кровлей, нефтенасыщенный слой которого мощности h вскрыт на глубину b скважиной, работающей с объемным дебитом Q^* . Водонасыщенная мощность пласта бесконечна (фиг. 1).

Можно показать, что в этом случае функции W и ω_0 в уравнении (1.1) имеют вид

$$W(P_0) = \frac{Q^*}{2\pi b} \ln \frac{z_0 + b + \sqrt{(z_0 + b)^2 + x_0^2 + y_0^2}}{z_0 - b + \sqrt{(z_0 - b)^2 + x_0^2 + y_0^2}}, \quad \omega_0(Q, P_0) = 0 \quad (2.1)$$

Тогда из (1.1) после ряда преобразований и перехода к безразмерным сферическим координатам $f(\theta, t)$, $f(\varphi, t)$, θ и φ и безразмерному времени t по формулам

$$\begin{aligned} h^{-1}\sqrt{x_0^2 + y_0^2} &= f(\theta, t) \sin^{1/2}\pi\theta, & h^{-1}\sqrt{z_0^2 + \eta^2} &= f(\varphi, t) \sin^{1/2}\pi\varphi, \\ z_0 = hf(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta, & \zeta = hf(\varphi, t) \cos^{1/2}\pi\varphi, & F(P_0, \tau) = z_0 - f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta &= 0 \\ t &= 3Q^*\tau(2\pi mh^3)^{-1} & (0 \leq \theta, \varphi \leq 1) \end{aligned}$$

можно получить следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение движения границы раздела:

$$f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 f_t(\varphi, t) N(\theta, \varphi, t) M(\theta, \varphi, t) d\varphi = (1 + \lambda) L(\theta, t) \quad (2.2)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} L(\theta, t) &= \frac{1}{6\beta \cos^{1/2}\pi\theta} \left\{ \frac{1 + B(\theta) [f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta + \beta]}{\sqrt{j^2(\theta, t) + 2\beta f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta + \beta^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + B(\theta) [f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta - \beta]}{\sqrt{j^2(\theta, t) - 2\beta f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta + \beta^2}} \right\} \\ N(\theta, \varphi, t) &= \frac{B(\theta) \{ [m^2(\theta) - m^2(\varphi)] - [n(\theta) - n(\varphi)]^2 \} - 2 [n(\theta) - n(\varphi)]}{\{ [m(\theta) - m(\varphi)]^2 + [n(\theta) - n(\varphi)]^2 \} \sqrt{[m(\theta) + m(\varphi)]^2 + [n(\theta) - n(\varphi)]^2}} \times \\ &\times E(T) + \frac{B(\theta) \{ [m^2(\theta) - m^2(\varphi)] - [n(\theta) + n(\varphi)]^2 \} - 2 [n(\theta) + n(\varphi)]}{\{ [m(\theta) - m(\varphi)]^2 + [n(\theta) + n(\varphi)]^2 \} \sqrt{[m(\theta) + m(\varphi)]^2 + [n(\theta) + n(\varphi)]^2}} F(T^*) + \\ &+ \frac{B(\theta) K(T)}{\sqrt{[m(\theta) + m(\varphi)]^2 + [n(\theta) - n(\varphi)]^2}} + \frac{B(\theta) K(T^*)}{\sqrt{[m(\theta) + m(\varphi)]^2 + [n(\theta) + n(\varphi)]^2}} \\ M(\theta, \varphi, t) &= f(\varphi, t) \sin \pi\varphi [f_\varphi(\varphi, t) \sin^{1/2}\pi\varphi + f(\varphi, t) \cos^{1/2}\pi\varphi] \cdot \sec^{1/2}\pi\theta \\ T &= \left(\frac{4m(\theta)m(\varphi)}{[m(\theta) + m(\varphi)]^2 + [n(\theta) - n(\varphi)]^2} \right)^{1/2}, \quad T^* = \left(\frac{4m(\theta)m(\varphi)}{[m(\theta) + m(\varphi)]^2 + [n(\theta) + n(\varphi)]^2} \right)^{1/2} \\ m(\theta) &= f(\theta, t) \sin^{1/2}\pi\theta, \quad n(\theta) = f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta \\ m(\varphi) &= f(\varphi, t) \sin^{1/2}\pi\varphi, \quad n(\varphi) = f(\varphi, t) \cos^{1/2}\pi\varphi \\ B(\theta) &= \frac{f_\theta(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta - f(\theta, t) \sin^{1/2}\pi\theta}{[f_\theta(\theta, t) \sin^{1/2}\pi\theta + f(\theta, t) \cos^{1/2}\pi\theta] f(\theta, t) \sin^{1/2}\pi\theta} \\ f_\theta &= \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad f_\varphi = \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Здесь $\beta = b/h$ — безразмерная степень вскрытия нефтенасыщенной мощности, K и E — обозначения полных эллиптических интегралов первого и второго рода соответственно.

Начальное положение границы раздела в сферических координатах

$$f(\theta, t_0) = \sec^{1/2} \pi \theta, \quad t_0 = 0 \quad (2.3)$$

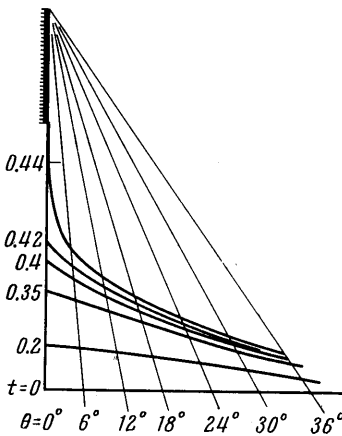
Получить общее решение задачи (2.2)–(2.3) не представляется возможным ввиду сложности уравнения движения.

Для численного решения задачи была использована явная суммирующе-разностная схема, описанная в [2, 3]. Для определения величины $f_t(\theta, 0)$, необходимой для начала счета по этой схеме, служит уравнение Фредгольма второго рода, которое получается из (2.2) при $t = 0$. Его решение, полученное последовательными приближениями, имеет вид

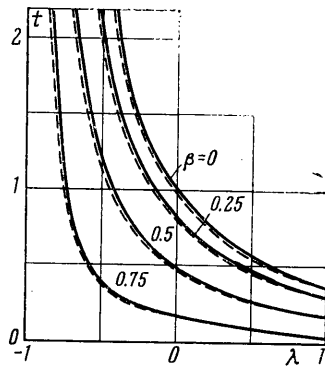
$$f_t(\theta, 0) = \frac{1 + \lambda}{6\beta \cos^{1/2} \pi \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^{n-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \pi \theta + (2n-1-\beta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \pi \theta + (2n-1+\beta)^2}} \right] \quad (2.4)$$

Ряд в (2.4) сходится быстро, величина остаточного члена легко оценивается по Лейбницу.

Интеграл в (2.2) вычислялся по формуле Симпсона. Логарифмическая особенность в точке $\varphi = \theta$ была выделена в отдельный интеграл, который вычислялся преобразованием Вондри [4]. Производная по времени f_t заменялась разностным отношением, а f_θ и f_φ вычислялись



Фиг. 2



Фиг. 3

по известным формулам центральных производных. Шаг во времени по мере приближения границы раздела к скважине уменьшался.

Описанная расчетная схема была реализована на ЭЦВМ «Минск-2». Расчет был произведен для 34 комбинаций параметров λ и β в диапазонах $-1 < \lambda \leq 1$ и $0 \leq \beta < 1$. При расчете были получены последовательные положения границы по всем лучам $\theta = \text{const}$ вплоть до момента достижения ею скважины. Динамика границы раздела в одном из рассчитанных вариантов ($\beta = 0.3$, $\lambda = 0.5$) показана на фиг. 2. На фиг. 3 приведено время достижения границей раздела скважины во всем диапазоне изменения параметров λ и β .

§ 3. В работе [5] изложен метод получения решений одного типа интегро-дифференциальных уравнений в виде степенного ряда по времени. Этим методом удается построить решение уравнения (2.2) на главной линии тока $\theta = 0$ в виде

$$f(\theta, t) = f(0, 0) + f_t(0, 0) t/1! + f_{tt}(0, 0) t^2/2! + \dots \quad (3.1)$$

Задача состоит в определении величин $f_t(0, 0)$, $f_{tt}(0, 0)$ и т. д. Из (2.3) и (2.4) следует

$$f(0, 0) = 1, \quad f_t(0, 0) = -\frac{1 + \lambda}{3} \Phi_1(\lambda, \beta), \quad \Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{(2n-1)^2 - \beta^2} \quad (3.2)$$

Величины $f_{tt}(0, 0)$, $f_{ttt}(0, 0)$ и т. д. определяются решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которые получаются из (2.2) почленным дифференцированием его по t . Аналогично $f_t(0, 0)$, величины $f_{tt}(0, 0)$, $f_{ttt}(0, 0)$ и т. д. выражаются рядами по степеням параметра λ , так как соответствующие интегральные уравнения решаются последовательными приближениями

$$f_{tt}(0, 0) = -\frac{(1 + \lambda)^2}{9} \Phi_2(\lambda, \beta), \quad \Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n(\beta), \quad a_0(\beta) = \frac{2}{(1 - \beta^2)^3} \quad (3.3)$$

Ниже приводится ряд значений $a_1(\beta)$ для величин β на интервале от 0 до 0.8.

$\beta =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$a_1 =$	0.584	0.614	0.699	0.869	1.170	1.682	2.421	4.597	20.8

Сложность уравнений затрудняет вычисление приближений порядка выше первого.

Разложение (3.1) представляет собой ряд Тейлора функции $f(0, t)$, определенной выражением

$$t = \left\{ 1 - \left[\frac{\Phi_2(1 - \beta^2)}{2\Phi_1^2} (f - 1) + 1 \right]^3 + \frac{3\beta^2(1 - \beta^2)\Phi_2}{2\Phi_1^2} (f - 1) \right\} \frac{2\Phi_1}{(1 + \lambda)(1 - \beta^2)^2 \Phi_2} \quad (3.4)$$

Его точность при $\lambda \neq 0$ возрастает с увеличением числа членов, учтенных в рядах для Φ_1 и Φ_2 . При $\lambda = 0$ из (3.4) имеем закон движения по главному направлению границы раздела «разнощептвых» жидкостей $t = 1 - f^3 - 3\beta^2(1 - f)$, полученный в [6].

В диапазоне $0 \leq \lambda \leq 1$ формула (3.4) сохраняет физический смысл при

$$1 - \frac{2\Phi_1^2}{\Phi_2(1 + \beta)} \leq f \leq 1 \quad (3.5)$$

Нижняя граница этого неравенства соответствует времени появления на контуре точки возврата

$$t^* = \frac{2\Phi_1(1 - 3\beta^2 + 2\beta^3)}{\Phi_2(1 + \lambda)(1 - \beta^2)^2} \quad (3.6)$$

В момент появления точки возврата скорость движения границы по главному направлению $f_t(0, t^*)$ становится бесконечно большой, что влечет за собой мгновенный прорыв воды в скважину. Такой невозможный в условиях реальной пористой среды результат, отмечавшийся ранее для плоского случая в работах [7, 8], объясняется там неучетом инерционных членов в уравнении Дарси, что недопустимо при больших скоростях.

Следует отметить, что при численном решении задачи обнаружить появление точек возврата невозможно, так как в формулах численного дифференцирования контур заранее предполагается достаточно гладким. Однако и при расчете на ЭЦВМ при приближении контура к координате

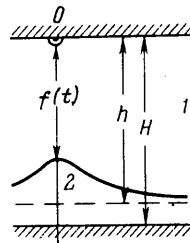
$$f_0 = 1 - 2\Phi_1^2\Phi_2^{-1}(1 + \beta)^{-1}$$

отмечается резкий рост скорости его движения, что влечет за собой быстрое измельчение шага по времени. Расчет справедлив, строго говоря, при отсутствии точек возврата ($\lambda \leq 0$) или до момента их появления, но экстраполяция его в область $0 \leq f \leq f_0$ оправдывается физическими соображениями.

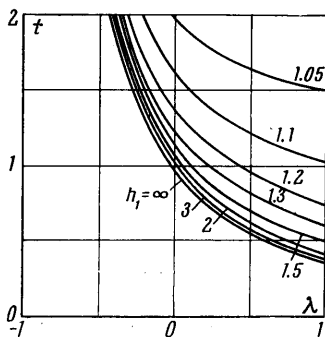
Результаты расчета по формулам (3.4) и (3.6) на фиг. 3 (штриховые линии). Они хорошо согласуются с результатами расчета на ЭЦВМ — расхождение не превышает 3%.

Время прорыва воды в скважину, рассчитанное на ЭЦВМ, несколько больше, что объясняется дискретностью счета.

§ 4. Формулу, аналогичную (3.4), удастся получить при решении задачи об осесимметричной деформации первоначально плоской границы раздела в пласте мощности H , нефтенасыщенный слой которого первоначальной мощности h вскрыт на кров-



Фиг. 4



Фиг. 5

ле полусферической скважины малого радиуса обильности Q^* (фиг. 4). Метод, изложенный в § 3, приводит к закону движения координаты f границы раздела по главному направлению в виде

$$t = -\frac{3\alpha_0}{\varphi_1(1+\lambda)} \int_1^f \frac{d\xi}{W(\lambda, h_1)}, \quad \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \alpha_n(h_1), \quad h_1 = \frac{H}{n} \quad (4.1)$$

$$W(\lambda, h_1) = \frac{1}{\omega^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2nn_1 - \omega)^2} - \frac{1}{(2nn_1 + \omega)^2} \right]$$

$$\omega = \frac{(\xi - 1)\varphi_2\alpha_0}{2\varphi_1^2\varphi_0} + 1, \quad \varphi_2 = 2\varphi_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \theta_n(h_1)$$

Величины $\alpha_n(h_1)$, $\varphi_0(h_1)$, $\theta_n(h_1)$, определяющиеся в процессе решения интегральных уравнений, выражаются функциональными рядами. Приводим результаты их суммирования для ряда значений параметра h_1 .

$h_1 = 1.0$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	∞
$\alpha_0 = 0$	0.515	0.725	0.827	0.833	0.917	0.977	1.000
$\alpha_1 = 0$	-0.202	-0.130	-0.060	-0.024	0	0.065	0.111
$\alpha_2 = 0$	0.039	0.084	0.020	0.002	0	0.012	0.040
$\varphi_0 = 2.115$	1.518	1.223	1.127	1.075	1.050	1.013	1.000
$\theta_1 = 0$	0.298	0.485	0.543	0.562	0.575	0.588	0.594

Точность формулы (4.1) повышается с увеличением числа членов, учтенных в рядах для φ_1 и φ_2 . С этой точки зрения, интересен случай $h_1 = 2$, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$ и $\theta_2 = \theta_3 = \dots = 0$.

Координата точки возврата, образующейся при $\lambda \geq 0$:

$$f = 1 - 2\varphi_1^2\varphi_0\varphi_2^{-1}\alpha_0^{-1} \quad (4.2)$$

Время ее появления определяется по формуле (4.1).

Предельным переходом при $h_1 \rightarrow \infty$ формулы (4.1) и (4.2) трансформируются в соответствующие формулы § 3 при $\beta_1 = 0$.

Результаты расчета времени обводнения скважины по формуле (4.1) нанесены на фиг. 5. Отмечается исчезающе малое влияние подошвы пласта при $h_1 > 2$.

Авторы благодарны В. Л. Данилову за внимание к работе и ценные советы.

Поступило 29 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

- Абрамов Ю. С., Кац Р. М. Уравнения движения границы раздела двух несжимаемых жидкостей в пористой среде в условиях пространственной фильтрации. Всес. н.-и. ин-т научно-техн. сб. по добыче нефти, Изд. «Недра», № 30, 1966.
- Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1957, № 11.
- Данилов В. Л., Скворцов В. В. Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкой воды и нефти. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1959, № 13.
- Кюхеман Д., Вебер И. Аэродинамика реактивных двигателей. Изд. иностр. лит., 1956.
- Данилов В. Л. Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
- Салехов Г. С., Данилов В. Л., Иванов Н. Ф., Хованский А. Н. К вопросу обводнения нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1954, № 5.
- Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
- Галин Л. А. Неустойчиваясья фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.