3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексных переменных. Изд-во «Наука», 1965.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд-во «Наука», 1966.
5. Goulard R. The transition from black-body to Rosseland formulation in optically thick flows. Intern. I. Heat Mass Transport, 1963, vol. 6, No. 10.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Ю. А. БУЕВИЧ, А. И. ЛЕОНОВ

(Москва)

При изучении фильтрации интересуются обычно лишь средними характеристиками движения, зависящими от различных параметров, усредненных по весьма большим объемам пористого тела. Например, при рассмотрении стационарной фильтрации обычно достаточно знать скорость фильтрации как функцию внешних условий и средней проницаемости (или средней пористости) среды. Между тем, локальные значения пористости реальных сред могут значительно отличаться от средней пористости среды в целом. Обычно применяемое в теории фильтрации понятие «пористость» представляет собой отношение объема пор, содержащихся в физически бесконечно малом объеме пористой среды, к величине этого объема [1]. Пористость ε, вообще говоря, может меняться от точки к точке, причем масштаб этого изменения в большинстве практически интересных случаев значительно выше характерного размера поровых каналов. Поскольку практически функция $\varepsilon(\mathbf{x})$ неизвестна, можно считать ее случайной функцией точки. В отличие от этой локальной характеристики пористости среды можно ввести еще среднюю пористость ε° среды в целом, определяемую как среднее от случайной величины $\varepsilon(\mathbf{x})$ по всему объему среды. Таким образом, реальные пористые тела можно рассматривать как однородные лишь в статистическом смысле. Это обстоятельство не представляется существенным при расчете средней скорости фильтрации и т. п., но оказывается решающим при анализе локальных особенностей поля фильтрационных движений. Действительно, хаотические отклонения истинной пористости тела от средней вызывают появление локальных движений, регулярных в том смысле, что они всецело детерминированы локальными свойствами пористого тела. Однако в связи с тем, что в деталях эти свойства обычно неизвестны и можно реально говорить лишь о некоторых их статистических характеристиках, указанные движения представляются как хаотические, относящиеся к своего рода «псевдотурбулентности» в фильтрационных потоках. Характерные масштабы такой псевдотурбулентности совпадают по порядку величины с масштабами локальных неоднородностей пористого тела, рассматриваемого как континуум. Они, однако, выше характерного масштаба «струйных» течений по отдельным поровым каналам, имеющего порядок среднего размера пор. Поэтому можно ожидать, что вклад отмеченных крупномасштабных (по сравнению с характерным размером поровых каналов) псевдотурбулентных движений в многообразные процессы переноса, имеющие место в фильтрационных потоках, будет весьма значителен, а при высокой локальной неоднородности пористого тела — даже доминирующим.

Данная работа содержит общую постановку задачи об определении статистических характеристик крупномасштабных псевдотурбулентных случайных полей по заданной характеристике поля локальной пористости. При этом предположено, что скорости псевдотурбулентных движений относительно малы, и применимы методы, характерные для инвариантной теории обычной турбулентности [1, 2].

§ 1. Перед построением математической модели отметим две существенные особенности случайных полей скорости и давления. Во-первых, поскольку рассматриваемая псевдотурбулентность не имеет отношения к эффектам гидродинамической неустойчивости при фильтрации, достаточно рассмотреть лишь однородный случай, когда усредненная скорость жидкости не зависит от координат. Во-вторых, главным источником появления хаотических движений в пористом теле служит неоднородность локальной пористости.

[1] Заметим, что, как указал авторам А. С. Монин, в реальных пористых средах величина $\varepsilon(\mathbf{x})$ представляет собой статистическую характеристику: среднее от некоторой характеристической функции пористости $\chi(\mathbf{x})$, равной нулю, если точка лежит в поровом канале, и единице, если точка лежит на каркасе. Имеются также и модели пористых сред (например, среда из идеально упакованных сфер, цилиндров и т. п.), где пористость ε постоянна.

Если предположить, что отклонения последней от средней пористости ε° относительно малы, то и скорости случайных движений малы по сравнению со средней скоростью фильтрации. Эти предположения выполняются для большинства реальных пористых тел. Поэтому при исследовании псевдотурбулентности можно пренебрегать слагаемыми, имеющими высший порядок по отклонениям от различных средних, в частности, пренебрегать нелинейными по возмущениям инерционными членами в динамических уравнениях. В этом отношении фильтрационная псевдотурбулентность принципиально отличается от обычной турбулентности в жидкости, когда нелинейные инерционные силы представляют собой основную причину поддержания интенсивности турбулентных движений. Указанное обстоятельство значительно упрощает рассмотрение, так как позволяет отказаться от исследования проблемы замыкания нелинейных динамических уравнений, представляющей главную трудность в теории обычной турбулентности, и ограничиться изучением линеаризованных уравнений.

Ниже будем считать заданными величины, определяющие средний фильтрационный поток, и статистические характеристики поля локальной пористости, в частности, двухточечную корреляцию по отклонению от средней пористости $\langle\sigma\sigma\rangle = \langle\sigma_A\sigma_B\rangle$, определенную для произвольных точек A и B. Сделанные выше предположения можно записать в виде

$$u_i = u_i^\circ + u_i', \qquad \varepsilon = \varepsilon^\circ + \sigma, \qquad p = p_0 + p_1, \qquad u_i^\circ = \text{const} \tag{1.1}$$

$$|u_i'| \ll u_i^\circ, \qquad |\sigma| \ll \varepsilon^\circ, \qquad \langle\sigma\rangle = 0, \qquad \langle u_i'\rangle = 0, \qquad \varepsilon^\circ = \text{const}$$

Здесь u_i — истинная (осредненная по поровым каналам масштаба $l \ll H$) скорость жидкости, связанная со скоростью фильтрации $u_{\Phi i}$ соотношением $\varepsilon u_i = u_{\Phi i}$, ε — пористость, индекс $^\circ$ относится к осредненному движению. Величина $\varepsilon^\circ u_i^\circ$ — осредненная скорость фильтрации при отсутствии крупномасштабных флуктуаций пористости и определяется по внешним макрохарактеристикам фильтрационного режима из закона Дарси. Уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$\varepsilon d\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \varepsilon d g_i - F_i, \qquad \frac{\partial(\varepsilon u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь d — плотность жидкости, g_i — ускорение силы тяжести, F_i — сила сопротивления движению. Для усредненного движения уравнения (1.2) совпадают с уравнениями Дарси. Примем далее

$$\tau_{ij} = \eta(\varepsilon)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\eta(\varepsilon)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}, \qquad F_i = \sum_m \alpha_m(\varepsilon)u^m u_i \tag{1.3}$$

Здесь вязкость фильтрующейся жидкости $\eta(\varepsilon)$ и коэффициенты $\alpha_m(\varepsilon)$ предполагаются известными функциями от ε, а выражения для силы сопротивления в частных случаях сводятся к известным законам сопротивления, характерным для ламинарной и турбулентной фильтраций. Жидкость предполагается несжимаемой, в связи с чем в (1.3) в выражении для τ_{ij} опущен член с объемной вязкостью. Сдвиговая вязкость $\eta(\varepsilon)$, вообще говоря, отличается от вязкости жидкости η_0, при ламинарном режиме фильтрации величину $\eta(\varepsilon)$ можно оценить по результатам работы [3].

Линеаризованные уравнения, получаемые из (1.2) и (1.3) с учетом (1.1), в безразмерных переменных имеют вид

$$\varepsilon R\left(\frac{\partial}{\partial t} + w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)v_i = -R\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_j} -$$

$$-\sum_m\{\beta_m(v_i + m w_i w_j v_j) + \beta_m' w_i\sigma\} + g_i'\sigma, \qquad \varepsilon\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -w_i\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\ (\varepsilon \approx \varepsilon^\circ) \tag{1.4}$$

Безразмерные переменные в (1.4) суть

$$t' = \frac{tu^\circ}{H}, \quad x_k' = \frac{x_k}{H}, \quad v_i = \frac{u_i'}{u^\circ}, \quad w_i = \frac{u_i^\circ}{u^\circ}, \quad p' = \frac{p_1}{du^{\circ 2}}$$

$$\beta_m = \frac{\alpha_m u^{\circ m}H^2}{\eta}, \quad g_i' = \frac{g_i dH^2}{\eta u^\circ}, \quad R = \frac{du^\circ H}{\eta}$$

Штрихи над безразмерными переменными в (1.4) опущены для упрощения записи.

Введем корреляции между значениями различных величин в точках A и B

$$Q_{i,j} = \langle(v_i)_A(v_j)_B\rangle, \quad N_{i,\sigma} = \langle(v_i)_A\sigma_B\rangle, \quad N_{\sigma,i} = \langle\sigma_A(v_i)_B\rangle$$

$$K_{i,p} = \langle(v_i)_A p_B\rangle, \quad K_{p,i} = \langle p_A(v_i)_B\rangle, \quad S_{p,\sigma} = \langle p_A\sigma_B\rangle, \quad S_{\sigma,p} = \langle\sigma_A p_B\rangle$$

В предположении однородности псевдотурбулентности для введенных корреляций выполняются легко доказываемые соотношения, которые назовем условиями симметризации

$$Q_{i,j}(\xi) = Q_{j,i}(-\xi), \qquad N_{\sigma,i}(\xi) = N_{i,\sigma}(-\xi), \qquad K_{p,i}(\xi) = K_{i,p}(-\xi),$$
$$S_{p,\sigma}(\xi) = S_{\sigma,p}(-\xi) \tag{1.5}$$

Здесь $\xi = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ — вектор, соединяющий точки A и B. Ввиду отмеченной во введении регулярности псевдотурбулентности усреднение при определении корреляций следует проводить не по времени при фиксированных A и B, а по пространству при фиксированном ξ.

Стандартным путем из (1.4) получим динамические уравнения для корреляций

$$\varepsilon R\left(\frac{\partial}{\partial t} - w_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)N_{i,\sigma} = R\frac{\partial S_{p,\sigma}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 N_{i,\sigma}}{\partial \xi_j\partial \xi_j} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 N_{j,\sigma}}{\partial \xi_i\partial \xi_j} - aN_{i,\sigma} - bw_iw_jN_{j,\sigma} - c_i\langle\sigma\sigma\rangle,$$
$$a = \Sigma\beta_m, \qquad b = \Sigma m\beta_m, \qquad c_i = cw_i - g_i', \qquad c = \Sigma\beta_m'$$
$$\varepsilon R\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = R\left(\frac{\partial K_{p,j}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial K_{i,p}}{\partial \xi_j}\right) + 2\frac{\partial^2 Q_{i,j}}{\partial \xi_k\partial \xi_k} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 Q_{k,j}}{\partial \xi_i\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial \xi_j\partial \xi_k}\right) - \tag{1.6}$$
$$- 2aQ_{i,j} - b(w_iQ_{k,j} + w_jQ_{i,k})w_k - c_iN_{\sigma,j} - c_jN_{i,\sigma}$$

Кроме того, из уравнений неразрывности имеем дивергентные условия

$$\varepsilon\frac{\partial N_{i,\sigma}}{\partial \xi_i} = -w_i\frac{\partial\langle\sigma\sigma\rangle}{\partial \xi_i}, \qquad \varepsilon\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial \xi_j} = -w_j\frac{\partial N_{i,\sigma}}{\partial \xi_j}, \qquad \varepsilon\frac{\partial K_{i,p}}{\partial \xi_i} = -w_i\frac{\partial S_{p,\sigma}}{\partial \xi_i} \tag{1.7}$$

Аналогично можно построить уравнения и для других корреляций (например, $N_{\sigma,i}$, сопряженной с $N_{i,\sigma}$ условием симметризации (1.5)).

Как легко видеть, в общем случае фильтрации жидкости в изотропном пористом теле имеются два выделенных направления, определенные векторами $\lambda_1 = \mathbf{w}$ и $\lambda_2 = \mathbf{g}$ (напомним, что $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$ — единичные безразмерные векторы). В соответствии с общими требованиями инвариантной теории корреляций для произвольного корреляционного вектора $L_{i,s}$ (s — скалярная величина) и тензора $M_{i,j}$, имеем [1, 2]

$$L_{i,s} = L_1\xi_i + L_2w_i + L_3g_i$$
$$M_{i,j} = M_1\xi_i\xi_j + M_2w_iw_j + M_3g_ig_j + M_4\delta_{ij} + M_5\xi_iw_j +$$
$$+ M_6\xi_jw_i + M_7\xi_ig_j + M_8\xi_jg_i + M_9w_ig_j + M_{10}w_jg_i$$

Величины L_k ($k = 1, 2, 3$) и M_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$) — некоторые функции от переменных

$$r^2 = \xi\cdot\xi, \qquad r\mu_1 = \xi\cdot\mathbf{w}, \qquad r\mu_2 = \xi\cdot\mathbf{g}$$

Заметим, что вместо $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$ можно ввести любые другие независимые векторы, лежащие в той же плоскости. Из физических соображений следует, что в общем случае корреляционные величины, описывающие псевдотурбулентность, неинвариантны относительно отражений в плоскостях, не содержащих одновременно векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$. Поэтому, вообще говоря, в определение указанных величин следует вводить члены, зависящие от альтернирующего тензора ε_{ijk}. Однако введение таких членов не будет содержать какой-либо новой физической информации, если только считать L_k, M_k, а также $S_{p,\sigma}$ или $S_{\sigma,p}$ линейными комбинациями истинно скалярных и псевдоскалярных функций. Заметим еще, что при фильтрации в анизотропном пористом теле к векторам $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$ добавляются новые векторы (или тензоры), описывающие характер анизотропии. Ниже для определенности рассматриваем только изотропные пористые среды.

Сделаем еще два замечания. Во-первых, как видно из изложенного, наличие силового поля (в данном случае — поля тяжести) весьма существенно сказывается на псевдотурбулентности не только в количественном, но и в качественном отношении, ибо такое поле меняет свойства симметрии рассматриваемых движений. Во-вторых, нет необходимости формулировать какие-либо конкретные граничные условия для уравнений, определяющих введенные корреляции. Действительно, очевидное физическое условие состоит в том, что при равной тождественно нулю функции $\langle\sigma\sigma\rangle$ все искомые корреляционные функции также должны тождественно обращаться в нуль. При этом следует рассматривать лишь такие частные решения соответствующих уравнений, которые в дальнейшем будем называть «естественными». Из физических соображений эти естественные решения должны достаточно быстро убывать с ростом r (не медленнее, чем r^{-2}), не иметь особенностей при $r = 0$ и удовлетворять соответствующим условиям симметрии. Этих условий оказывается всегда достаточно для определения естественных решений, если функция $\langle\sigma\sigma\rangle$, в свою очередь, выбрана физически адэкватной. Так, для изотропного тела последнее означает, что $\langle\sigma\sigma\rangle$ монотонна и достаточно быстро убывает при $r \to \infty$, принимает конечное значение при $r = 0$ и не имеет других особенностей, а ее производная по r равна нулю в точке $r = 0$. Ниже все эти условия предполагаются выполненными. Тогда правые части во всех рассматриваемых ниже уравнениях для корреляций можно считать гладкими функциями, не имеющими особенностей. В дальнейшем эти вопросы специально не оговариваются.

§ 2. Рассматриваем осесимметричную задачу, пренебрегая членами с силой тяжести в динамических уравнениях (1.6) и предполагая, что сила сопротивления движению линейно зависит от скорости. Последнее отвечает ламинарной фильтрации, но может также быть использовано для турбулентной фильтрации, если экстраполировать силу сопротивления в некотором интервале скорости фильтрации линейной функцией. В данном случае единственная ось симметрии определяется вектором $\mathbf{w}$, а величина b в (1.6) равна нулю. Все корреляции инвариантны относительно полной группы вращений относительно оси $\mathbf{w}$ (т. е. поворотов вокруг этой оси и отражений в плоскостях, содержащих $\mathbf{w}$), но не обязательно инвариантны относительно отражений в плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{w}$. Заметим, что в теориях осесимметричной турбулентности [1, 2] молчаливо предполагается, что характеристики турбулентности инвариантны при отражениях вдоль $\mathbf{w}$. Физический смысл предлагаемого здесь формального обобщения будет детально выяснен в конце работы. Имеем

$$L_{i,s} = L_1\xi_i + L_2 w_i, \qquad L_{i,s} = N_{i,\delta},\ K_{i,p}$$

$$Q_{i,j} = Q_1\xi_i\xi_i + Q_2 w_i w_j + Q_3\delta_{is} + Q_4\xi_i w_j + Q_5\xi_j w_i$$

где L_k, Q_k — функции (в общем случае не обязательно скалярные) от $r^2 = (\xi\xi)$, $r\mu = (\xi\mathbf{w})$, вообще говоря неинвариантные при отражениях вдоль $\mathbf{w}$. Из условий симметризации (1.5) имеем

$$L_1(\xi) = -L_1^*(-\xi), \qquad L_2(\xi) = L_2^*(-\xi), \qquad L_{i,s}^* = N_{\delta,i},\ K_{p,i} \tag{2.1}$$
$$Q_k(\xi) = Q_k(-\xi), \qquad k = 1,\ 2,\ 3 \qquad Q_5(\xi) = -Q_4(-\xi)$$

Произвольный вектор $L_{i,s}$ можно представить в виде комбинации истинного вектора $L_{i,s}^+$ и псевдовектора $L_{i,s}^-$

$$L_{i,s} = L_{i,s}^+ + L_{i,s}^-, \qquad L_{i,s}^* = L_{i,s}^+ - L_{i,s}^-$$

То же самое можно проделать и со скалярными тензорными корреляциями. Имеем

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial\xi_i} = \xi_i D_r + w_i D_\mu, \qquad D_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}, \qquad D_\mu = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}$$

Свойства операторов D_r и D_μ и подробно рассмотрены в [2], здесь существенно, что

$$(r^2D_r + r\mu D_\mu + n + 1)(r\mu D_r + D_\mu) = (r\mu D_r + D_\mu)(r^2D_r + r\mu D_\mu + n)$$

$$r^2D_r + r\mu D_\mu + n = r\frac{\partial}{\partial r} + n, \qquad r\mu D_r + D_\mu = \mu\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}$$

$$D_rD_\mu = D_\mu D_r, \qquad \Delta_n = (r^2D_r + r\mu D_\mu + n)D_r + (r\mu D_r + D_\mu)D_\mu = \tag{2.2}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \mu\frac{n-1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}, \qquad D_r f(r\mu) \equiv 0$$

Операторы Δ_n представляют собой лапласианы, определенные в n-мерных пространствах.

Ограничимся далее рассмотрением стационарной турбулентности, представляющей основной интерес, и введем векторы

$$M_i = N_{i,\sigma} + \varepsilon^{-1}w_i\langle\sigma\sigma\rangle, \qquad M_i^* = N_{\sigma,i} + \varepsilon^{-1}w_i\langle\sigma\sigma\rangle \tag{2.3}$$

Из дивергентного условия (1.7) для $N_{i,\sigma}$ следует, что эти векторы соленоидальны. Из первого уравнения (1.6) следует уравнение для M_i (при $b = 0$)

$$\nabla_k\nabla_k M_i - aM_i + \varepsilon R w_k\nabla_k M_i = \Phi_i(r,\ \mu) - R\nabla_i S_{p,\sigma} \tag{2.4}$$

Вектор Φ_i, стоящий в правой части (2.4), равен

$$\Phi_i = \left\{\xi_i\frac{1}{3\varepsilon}\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) + w_i\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(r\frac{d}{dr} + \frac{10}{3}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + c - \frac{a}{\varepsilon} + \mu R\frac{d}{dr}\right]\right\}\langle\sigma\sigma\rangle$$

При вычислениях были использованы свойства операторов из (2.2), а также следующие из соответствующего дивергентного условия (1.7) соотношения

$$\nabla_i \nabla_k N_{k,\sigma} = -\varepsilon^{-1}(\xi_i D_r + w_i D_\mu)(r\mu D_r + D_\mu)\langle\sigma\sigma\rangle$$

и представление для градиента вектора

$$\nabla_j L_{j,s} = \xi_i \xi_j D_r L_1 + w_i w_j D_\mu L_2 + \delta_{ij} L_1 + \xi_i w_j D_\mu L_1 + \xi_j w_i D_r L_2$$

Дивергенция вектора Φ_i представима в виде

$$\Psi = \nabla_i \Phi_i = \Psi_0 + \mu\Psi_1 + \mu^2\Psi_2 = \Psi^{(0)} P_0(\mu) + \Psi^{(1)} P_1(\mu) + \Psi^{(2)} P_2(\mu)$$

$$\Psi^{(0)} = \Psi_0 + {}^1/_3\Psi_2, \qquad \Psi^{(1)} = \Psi_1, \qquad \Psi^{(2)} = {}^2/_3\Psi_2$$

$$\Psi_1 = \left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{3} r \left(r \frac{d}{dr} + 4\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr} + \frac{10}{3}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right] + \left(c - \frac{a}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dr}\right\}\langle\sigma\sigma\rangle$$

$$\Psi_0 = R\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\langle\sigma\sigma\rangle, \qquad \Psi_2 = Rr\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\langle\sigma\sigma\rangle$$

Здесь $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра. Применим операцию ∇_j к векторному уравнению (2.4). Раскрывая оператор $\nabla_j \nabla_j S_{p,\sigma} = \Delta_3 S_{p,\sigma}$ при помощи (2.2), имеем

$$R\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} S_{p,\sigma} = \Psi(r, \mu) \tag{2.5}$$

Используя представления функции $\Psi^{(n)}(r)$ $(n = 0,\ 1,\ 2)$ в виде интегралов Фурье — Бесселя, получим естественное решение уравнения (2.5)

$$RS_{p,\sigma} = \Sigma P_n(\mu) S_n(r), \quad S_n \equiv 0 \quad (n>2), \quad \omega_n = n + {}^1/_2$$

$$S_n = -\frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^\infty I_\omega(\rho r)\frac{d\rho}{\rho}\int_0^\infty I_\omega(\rho x)\,\Psi^{(n)}(x)\,x^{3/2}\,dx \tag{2.6}$$

Выражение (2.6) полностью определяет первую из искомых корреляций при произвольных значениях параметра R.

Далее, используя условие соленоидальности вектора $L_{i,s}$

$$\nabla_i L_{i,s} = (r^2 D_r + r\mu D_\mu + 3)L_1 + (r\mu D_r + D_\mu)L_2 = 0$$

введем потенциал, однозначно определяющий вектор $L_{i,s}$ («определяющий скаляр» по терминологии Чандрасекара [2]) посредством уравнений

$$L_1 = -(r\mu D_r + D_\mu)L, \ L_2 = (r^2 D_r + r\mu D_\mu + 2)L \tag{2.7}$$

Здесь использовано перестановочное соотношение из (2.2). Заметим, что определяющий скаляр представим в виде суммы истинного скаляра и псевдоскаляра, соответствующих истинно векторной и псевдовекторной частям $L_{i,s}$. Вектор M_i в (2.4) соленоидален по определению, соленоидальность вектора в правой части (2.4) следует из тензорного характера этого уравнения. Из (2.6) получим

$$R\nabla_i S_{p,\sigma} = \xi_i \Sigma P_n(\mu)\frac{1}{r}\frac{dS_n}{dr} + w_i\left(\frac{S_1}{r} + P_1(\mu)\frac{3S_2}{r}\right)$$

Используя это выражение и определение Φ_i, из уравнений (2.7) получим определяющий скаляр вектора $\Phi_i - R\nabla_i S_{p,\sigma}$ в виде

$$\Phi_s = \varphi_0(r) + \mu\varphi_1(r), \qquad \varphi_0(r) = \frac{2}{3\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\langle\sigma\sigma\rangle + \int\frac{dS_1}{dr}\frac{dr}{r}$$

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{r^2}\int\left(Rr\frac{d}{dr}\langle\sigma\sigma\rangle - 3S_2\right)dr = R\varphi_1{}^*(r)$$

Учитывая определение естественных решений, произвольные постоянные, возникающие при интегрировании, необходимо положить равными нулю. Ввиду однозначности представления соленоидальных векторов через их определяющие скаляры уравнение (2.4) можно заменить соответствующим уравнением для определяющих скаляров.

С учетом (2.2) имеем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\frac{4\mu}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}-a+\varepsilon R\left(\mu\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\right]M=\Phi_s(r,\mu) \quad (2.8)$$

Здесь было учтено также, что определяющие скаляры векторов $\nabla_k\nabla_k M_i$ и $w_k\nabla_k M_i$ равны соответственно $\Delta_5 M$ и $(r\mu D_r+D_\mu)M$. Переменные в (2.8) не разделяются, в связи с чем решение этого уравнения представляет значительные трудности. Однако большинство практически интересных случаев соответствует неравенствам $R\ll 1$ и $R\gg 1$. Построим асимптотические решения для этих двух случаев.

1°. Пусть $R\ll 1$. Уравнение для нулевого приближения $M^{(0)}$ суть

$$L_0\{M^{(0)}\}\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}-\frac{4\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}-a\right)M^{(0)}=\varphi_0(r)$$

а его естественное решение

$$M^{(0)}(r)=-\frac{1}{r^{3/2}}\int_0^\infty J_{3/2}(\rho r)\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+a}\int_0^\infty J_{3/2}(\rho x)\varphi_0(x)\,x^{5/2}\,dx$$

Уравнение для первого приближения $M^{(1)}$ записывается в форме

$$L_0\{M^{(1)}\}=\mu\left[\varphi_1{}^*(r)-\varepsilon\frac{d}{dr}M^{(0)}(r)\right]$$

Его естественное решение

$$M^{(1)}=-\frac{\mu}{r^{3/2}}\int_0^\infty J_{5/2}(\rho r)\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+a}\int_0^\infty J_{5/2}(\rho x)\left[\varphi_1{}^*(x)-\varepsilon\frac{d}{dx}M^{(0)}\right]x^{5/2}\,dx$$

Аналогичным путем нетрудно построить более высокие приближения.

2°. Пусть теперь $R\gg 1$. В нулевом приближении по R^{-1} имеем

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)M^{(0)}=\frac{\mu}{\varepsilon}\varphi_1{}^*(r)$$

Отсюда получим

$$M^{(0)}(r)=\frac{1}{\varepsilon}\int\varphi_1{}^*(r)\,dr$$

Уравнение для первого приближения имеет вид

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)M^{(1)}=\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(r)+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{d}{dr}-a\right)M^{(0)}(r)$$

Его решение можно представить, в частности, в следующих двух формах:

$$M^{(1)}=\sum_{n=1}^\infty\mu^{2n-1}m_{2n-1}^{(1)}(r),\qquad m_{2n+1}^{(1)}=\frac{r}{2n+1}\left(\frac{2n-1}{r}-\frac{d}{dr}\right)m_{2n-1}^{(1)}$$

$$m_1^{(1)}(r)=r\left[\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0(r)+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{d}{dr}-a\right)M^{(0)}(r)\right],\quad m_{2n}^{(1)}(r)\equiv 0$$

$$M^{(1)}=\sum_{n=1}^\infty r^n m_{*n}^{(1)}(\mu),\qquad m_{*n+1}^{(1)}(\mu)=s_n(1-\mu^2)^{1+1/2\,n}\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{1+1/2\,n}}$$

Здесь s_n — коэффициенты разложения по r правой части рассматриваемого уравнения.

Заметим, что уменьшение порядка основного уравнения при $R\gg 1$ вполне законно, ибо ищется лишь частное естественное решение этого уравнения. При рассмотрении корреляций $K_{i,p}$ и $Q_{i,j}$ ограничиваемся для простоты только нулевым приближением для M при $R\ll 1$ или $R\gg 1$. В этом случае из (2.3) и (2.7) имеем

$$N_{i,\sigma}\approx N_{\sigma,i}=-\xi_i\mu\frac{dM^{(0)}}{dr}+w_i\left[\left(r\frac{d}{dr}+2\right)M^{(0)}-\frac{1}{\varepsilon}\langle\sigma\sigma\rangle\right] \quad (2.9)$$

Как ниже станет ясно, включение следующих членов разложения для M не представляет принципиальных затруднений.

Введем соленоидальные по индексу j вектор L_j и тензор $V_{i,j}$

$$L_j = K_{j,p} + \varepsilon^{-1} w_j S_{p,\sigma}, \qquad V_{i,j} = Q_{i,j} + \varepsilon^{-1} w_j N_{i,\sigma}$$

Из второго уравнения (1.6) получим

$$R\left(\frac{\partial L_j^*}{\partial \xi_i} - \frac{\partial L_i}{\partial \xi_j}\right) + 2\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} - 2aV_{i,j} = \Pi_{i,j}(r, \mu) \tag{2.10}$$

$$\Pi_{i,j} = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 Q_{k,j}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right) + \frac{2}{3} w_j \frac{\partial^2 N_{i,\sigma}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} + \frac{R}{\varepsilon}\left(w_j \frac{\partial S_{\sigma,p}}{\partial \xi_i} - w_i \frac{\partial S_{p,\sigma}}{\partial \xi_j}\right) +$$
$$+ \frac{2a}{\varepsilon} w_j N_{i,\sigma} + c(w_i N_{\sigma,j} + w_j N_{i,\sigma})$$

Тензор $\Pi_{i,j}$ можно считать известным, ибо из дивергентного условия (1.7) следует

$$-\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Q_{k,j}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right) = \xi_i \xi_j D_r (r\mu D_r + D_\mu)(N_1 + N_1^*) +$$
$$+ w_i w_j D_\mu [(r\mu D_r + D_\mu)(N_2 + N_2^*) + (N_1 + N_1^*)] + \delta_{ij}(r\mu D_r + D_\mu)(N_1 + N_1^*) +$$
$$+ \xi_i w_j [D_\mu (r\mu D_r + D_\mu) N_1 + D_r (r\mu D_r + D_\mu) N_2^* + D_r N_1^*] +$$
$$+ s_j w_i [D_\mu (r\mu D_r + D_\mu) N_1^* + D_r (r\mu D_r + D_\mu) N_2 + D_r N_1]$$

В частном случае, когда справедливо соотношение (2.9), $N_n \approx N_n^*$ $(n = 1, 2)$. При выполнении (2.9) тензор $\Pi_{i,j}$ представляет собой тензорный полином второй степени по μ: $\Pi_{i,j} = \Pi_{i,j}^{(0)} + \mu\Pi_{i,j}^{(1)} + \mu^2\Pi_{i,j}^{(2)}$. Явные выражения для $\Pi_{i,j}^{(n)}(r)$ непосредственно следуют из (2.10). Дивергенция $\Pi_{i,j}$ по индексу j представится в виде

$$\Gamma_i = \nabla_j \Pi_{i,j} = \Sigma \gamma_i^{(n)}(r)\mu^n, \qquad \gamma_i^{(n)} \equiv 0 \quad \text{при} \quad n > 3$$

где $\gamma_i^{(n)}(r)$ — известные векторные функции только от r, ξ_i, w_i.

При применении оператора ∇_j к уравнению (2.10) получим

$$R\nabla_j \nabla_j L_i = -\Gamma_i$$

Отсюда сразу же следует, что Γ_i — соленоидальный вектор. Вводя определяющий скаляр Γ вектора Γ_i для определяющего скаляра L вектора L_i получим из (2.10) уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{4\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\right) L = -R^{-1}\sum_{n=1}^{4} \gamma^{(n)}(r) P_n'(\mu)$$

Здесь $\gamma^{(n)}(r)$ — коэффициенты разложения Γ по производным от полиномов Лежандра, представляющие собой простые линейные функции от коэффициентов разложения Γ по степеням μ. Решение этого уравнения записывается в виде

$$L = \Sigma L^{(n)}(r) P_n'(\mu), \qquad L^{(n)}(r) \equiv 0 \quad (n=0,\ n>3), \qquad \nu^2(n) = (n-1)(n+1) + {}^9/_4$$

$$L^{(n)}(r) = \frac{1}{Rr^{3/2}}\int_0^\infty J_\nu(\rho r)\frac{d\rho}{\rho}\int_0^\infty J_\nu(\rho x)\gamma^{(n)}(x)x^{5/2}dx \quad (0 < n \leqslant 3) \tag{2.11}$$

Далее, из (2.10) следует

$$(\nabla_k \nabla_k - a)V_{i,j} = \Omega_{i,j}, \qquad \Omega_{i,j} = {}^1/_2\Pi_{i,j} + R(\nabla_j L_i - \nabla_i L_j^*) \tag{2.12}$$

Здесь $\Omega_{i,j}$ — известная тензорная функция, соленоидальная по индексу j. Нетрудно заметить, что $\Omega_{i,j}$ представляет собой тензорный полином по степеням μ третьей степени. В отличие от осесимметричной турбулентности в обычной жидкости в рассматриваемом случае тензоры $V_{i,j}$ и $\Omega_{i,j}$ (а следовательно, и $Q_{i,j}$) не обязательно симметричны по индексам. Можно показать, что антисимметричные части этих тензоров имеют порядок R, если $R \ll 1$, и R^{-1}, если $R \gg 1$. Удобно выделить в тензорах

$V_{i,j}$ и $\Omega_{i,j}$ симметричную и антисимметричную части

$$V_{i,j}^{+} = {}^1/_2 (V_{i,j} + V_{j,i}), \qquad V_{i,j}^{-} = {}^1/_2 (V_{i,j} - V_{j,i})$$

$$\Omega_{i,j}^{+} = {}^1/_2 (\Omega_{i,j} + \Omega_{j,i}), \qquad \Omega_{i,j}^{-} = {}^1/_2 (\Omega_{i,j} - \Omega_{j,i})$$

Для $V_{i,j}^+$ и $V_{i,j}^-$ имеют место уравнения того же вида, что и (2.12). Тензор $V_{i,j}^+$ можно определить однозначно при помощи двух скалярных функций $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ посредством уравнений [2]

$$V_1^+ = (D_r - D_\mu{}^2) V^{(1)} + D_r V^{(2)}, \qquad V_2^+ = -r^2 D_\mu{}^2 V^{(1)} + (r^2 D_r + 1) V^{(2)}$$

$$V_3^+ = [-(r^2 D_r + r\mu D_\mu + 2) + r^2 (1-\mu^2) D_\mu{}^2 - r\mu D_\mu] V^{(1)} - [r^2 (1-\mu^2) D_r + 1 V^{(2)}$$

$$V_4^+ = V_5^+ = (r\mu D_\mu + 1) D_\mu V^{(1)} - \mu r D_r V^{(2)}$$

$$V_{i,j}^+ = V_1^+ \xi_i \xi_j + V_2^+ w_i w_j + V_3^+ \delta_{ij} + V_4^+ \xi_i w_j + V_5^+ \xi_j w_i$$

Как следует из (2.1), функция V_4^+ нечетна по ξ (или по μ). Аналогично вводятся определяющие скаляры тензора $\Omega_{i,j}^+$, которые в дальнейшем можно считать известными функциями от r и μ, представляющимися в виде конечных полиномов по μ. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае эти функции содержат μ лишь в нулевой и второй степенях. Определяющие скаляры тензора $\nabla_k \nabla_k V_{i,j}^+$ равны $\Delta_5 V^{(1)}$ и $\Delta_5 V^{(2)} + 2D_\mu{}^2 V^{(1)}$ (см. [2]). Поэтому уравнения для $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$, следующие из (2.12), запишутся в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{4\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu} - a\right) V^{(1)} = \Omega^{(1)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{4\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu} - a\right) V^{(2)} = \Omega^{(2)} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} V^{(1)}$$

Как и выше, представляем $\Omega^{(1)}$ в виде суммы $\Sigma \omega_n{}^{(1)}(r) P_n'(\mu)$ $(1 \leqslant n \leqslant 3)$. Тогда решение первого из записанных уравнений есть

$$V^{(1)} = \Sigma V_n{}^{(1)}(r) P_n'(\mu), \qquad V_n{}^{(1)}(r) \equiv 0 \quad (n=0,\ n>3)$$

$$V_n{}^{(1)} = -\frac{1}{r^{3/2}} \int_0^\infty J_\nu(\rho r) \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 + a} \int_0^\infty J_\nu(\rho x)\, \omega_n{}^{(1)}(x)\, x^{5/2}\, dx \qquad (1 \leqslant n \leqslant 3) \tag{2.13}$$

Решение второго уравнения представимо в форме

$$V^{(2)} = \Sigma V_n{}^{(2)}(r) P_n'(\mu), \qquad V_n{}^{(2)}(r) \equiv 0 \qquad (n=0,\ n>3) \tag{2.14}$$

$$V_n{}^{(2)} = -\frac{1}{r^{3/2}} \int_0^\infty J_\nu(\rho r) \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 + a} \int_0^\infty J_\nu(\rho x)\, \varkappa_n(x)\, x^{5/2}\, dx, \qquad \Omega^{(2)} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} V^{(1)} = \Sigma \varkappa_n(r) P_n'(\mu)$$

$$(1 \leqslant n < 3)$$

Далее, из (2.1) ясно, что антисимметричные части тензоров $\Omega_{i,j}$ и $V_{i,j}$ представимы в виде

$$\Omega_{i,j}^- = \Omega(r, \mu)(\xi_i w_j - \xi_j w_i), \qquad V_{i,j}^- = V(r, \mu)(\xi_i w_j - \xi_j w_i)$$

где $V(r, \mu)$ и $\Omega(r, \mu)$ — симметричные функции от μ. Из (2.10) получим уравнение для $V(r, \mu)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{4\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu} - a\right) V = \Omega$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$V = \Sigma V_n(r) P_n'(\mu), \qquad V_n(r) \equiv 0 \quad (n=0,\ n>3)$$

$$V_n = -\frac{1}{r^{3/2}} \int_0^\infty J_\nu(\rho r) \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 + a} \int_0^\infty J_\nu(\rho x)\, \omega_n(x)\, x^{5/2}\, dx \tag{2.15}$$

Здесь $\omega_n(r)$ — коэффициенты разложения Ω в полином по $P_n'(\mu)$, а величина ν определена в (2.11).

Формулы (2.13)—(2.15) полностью определяют последнюю из искомых корреляций — тензор $Q_{i,j}$.

Заметим, что важные выводы, касающиеся одноточечных корреляций псевдотурбулентных полей, могут быть сделаны уже из рассмотрения приближенных решений, справедливых в малой окрестности точки $r = 0$. Получение таких решений в явном виде связано с разложением в этой окрестности интегралов, входящих в записанные выше формулы, и во многих случаях значительно проще, чем получение полного решения в явном виде.

Отметим отдельно особенности псевдотурбулентных движений жидкости в пористом теле. Все корреляционные функции в общем случае неинвариантны относительно отражений в плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{w}$, и представляют собой линейные комбинации истинно тензорных и псевдотензорных функций. Последнее просто означает, что направления $\mathbf{w}$ и $-\mathbf{w}$ неравноправны. Например, формально вводимые коэффициенты вихревого переноса, построенные по указанным корреляциям обычным способом, в этих направлениях окажутся различными. Другая особенность, связанная с первой, заключается в том, что хаотические движения жидкости в пористом теле вызывают появление дополнительного потока жидкости, равного $\langle\sigma v_\lambda\rangle$, где v_λ — компонента скорости псевдотурбулентного движения в направлении λ, а значения σ и v_λ берутся в одной точке A.

Физический смысл отмеченной выше неинвариантности псевдотурбулентных характеристик при отражениях в плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{w}$, связан с тем обстоятельством, что, в отличие от истинно турбулентных движений, интенсивность псевдотурбулентных движений целиком определяется внешней причиной — флуктуациями пористости. Математически это проявляется в том, что построенные решения для корреляций суть частные решения неоднородной системы уравнений (1.4) с заданной правой частью, которая однозначно определяется двухточечной корреляцией пористости $\langle\sigma\sigma\rangle$. При этом не всякие преобразования симметрии допускаются указанной правой частью системы. В частности, как нетрудно показать, из первого уравнения системы (1.4) при линейном законе фильтрации ($b = 0$) вектор M_i, определенный равенством (2.3), и скаляр $S_{p,\sigma}$ не удовлетворяют одновременно условиям отражательной симметрии. Тем не менее, для некоторых (но, вообще говоря, не всех) корреляционных характеристик, рассмотренных в настоящей работе, можно потребовать выполнения условий отражательной симметрии за счет введения скорости осредненного движения $\langle u\rangle = u^\circ(1 + \langle\sigma v\rangle)$ ($\langle\sigma v\rangle$ — осредненная по μ одноточечная корреляция $\langle\sigma v_\lambda\rangle$) по плотности потока жидкости в направлении $\mathbf{w}$. При этом корреляция M_i должна была бы обладать отражательной симметрией $M_i(\xi) = -M_i(-\xi)$, которая и представляла бы условие для определения $\langle u\rangle$. Следуя идеям заметки [4], можно было бы аналогично потребовать, чтобы коэффициенты вихревого переноса имели бы истинно тензорную природу, определяя среднюю скорость по плотности диффузионного потока вещества в направлении $\mathbf{w}$. Однако, как указывалось выше, выполнение условий отражательной симметрии для всех рассмотренных корреляций в рассмотренном случае невозможно.

Зная выражения для различных корреляций, нетрудно вычислить по обычным правилам микро- и макромасштабы псевдотурбулентности в различных направлениях. Знание указанных масштабов и среднеквадратичных скоростей в различных направлениях позволяет получить приближенное выражение для тензора вихревой диффузии, вызванной псевдотурбулентностью, и записать уравнения переноса различных субстанций в фильтрационных потоках. Однако построение теории процессов переноса при фильтрации связано с решением своих специфических проблем и не входит в задачи данной работы.

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту за дискуссию.

Поступило 2 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. The Theory of Axisymmetric Turbulence. Proc. Roy. Soc. A., 1946, vol. 186, p. 480.
2. Chandrasekhar S. The Theory of Axisymmetric Turbulence. Phil. Trans. Roy. Soc. A., 1950, vol. 242, p. 557.
3. Буевич Ю. А., Сафрай, В. М. Вязкость жидкой фазы в дисперсных системах. ПМТФ, 1967, № 2.
4. Шапошников И. Г. К вопросу об учете диффузионных явлений в уравнениях гидродинамики. Ж. эксперим. и теор. физ., 1951, т. 21, вып. 11.